**Latvijas 70. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi un atrisinājumi**

**9.-12. klase**

**9.1.** Kādām naturālām vērtībām izteiksmes vērtība ir vesels skaitlis?

**Atrisinājums.** Ekvivalenti pārveidojam doto izteiksmi:

Tā kā ir naturāls skaitlis, tad dotās izteiksmes vērtība būs vesels skaitlis tikai tad, ja ir vesels skaitlis, bet tas iespējams, ja ir skaitļa 14 dalītājs. Ievērojot, ka ir naturāls, iegūstam, ka vai , no kā iegūstam, ka vai .

**9.2.** Atrast visus naturālos skaitļus intervālā , kuriem izpildās šāda īpašība: jebkuram naturālam skaitlim , kuram ir spēkā , kur ir skaitļu 1, , , 100 vidējais aritmētiskais.

**Atrisinājums.** Pēc dotā . Tā kā , tad var pieņemt, ka , kur . Līdz ar to iegūstam, ka četru doto skaitļu vidējais aritmētiskais ir

Ņemot vērā, ka jāizpildās nevienādībām , iegūstam

Pārrakstot iegūto divkāršo nevienādību kā nevienādību sistēmu, iegūstam

 jeb

Ievērojam, ja nevienādība izpildās pie , tad tā izpildās arī pie lielākiem . Tāpēc tas, ka šī nevienādība izpildās visiem ir ekvivalents apgalvojumam, ka tā izpildās pie . Tātad

 jeb

Līdz ar to esam ieguvuši, ka jebkurai derīgai vērtībai ir spēkā sakarība , ja ir 49, 50 vai 51.

**9.3.** Punkts atrodas uz stara un punkti un atrodas uz stara tā, ka un . Leņķa bisektrise krusto staru punktā . Pierādīt, ka ir bisektrise!

**Atrisinājums.** Pagarinām nogriezni , tad kā krustleņķi (skat. 1. att.) un līdz ar to arī . Izmantojot bisektrises īpašību, iegūstam, ka punkts atrodas vienādā attālumā no

* leņķa malām un , tas ir, ;
* leņķa malām un , tas ir, .

Tātad un esam ieguvuši, ka punkts atrodas vienādā attālumā no leņķa malām. Līdz ar to pēc bisektrises pazīmes esam ieguvuši, ka punkts atrodas uz bisektrises jeb ir bisektrise.



1. att.

**9.4.** Vai eksistē tādi četri dažādi **a)** naturāli skaitļi, **b)** pirmskaitļi , ka vienlaicīgi izpildās šādi nosacījumi:

* dalās ar ,
* dalās ar ,
* dalās ar ,
* dalās ar ?

**Atrisinājums.** **a)** Jā, eksistē. Skaitļiem 1, 2, 3, 6 izpildās visi uzdevuma nosacījumi:

* dalās ar ,
* dalās ar ,
* dalās ar ,
* dalās ar .

**b)** Nē, neeksistē. Ievērojam, ka

* dalās ar (jo abi saskaitāmie dalās ar ),
* dalās ar ,
* dalās ar ,
* dalās ar .

Tā kā ir pirmskaitļi, tad dalās ar , no kā izriet, ka . Nezaudējot vispārīgumu varam pieņemt, ka . Tādā gadījumā , jo pat trīs mazāko atšķirīgo pirmskaitļu reizinājums . Esam ieguvuši pretrunu, tātad neeksistē tādi četri dažādi pirmskaitļi, kuriem izpildās visi uzdevuma nosacījumi.

**9.5.** Vai kubu ar izmēriem iespējams salikt no ķieģeļiem, kuru izmēri ir

**Atrisinājums.** Pamatosim, ka prasīto nevar izdarīt. Sadalām kubu 9 mazākos kubos, kuru izmēri ir , un iekrāsojam tos kā šaha galdiņu (skat. 2. att.). Pavisam ir melni un balti kubiņi ar izmēriem . Tā kā katrs ķieģelis pārklāj 4 melnus un 4 baltus kubiņus ar izmēriem (skat. 3. att.), tad, ja no šiem ķieģeļiem būtu salikts kubs, tas saturētu vienāda skaita melnos un baltos kubiņus ar izmēriem ,
bet .

|  |  |
| --- | --- |
| 2. att. | C:\Users\Maruta\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\Kiegeli.png3. att. |

**10.1.** Pierādīt, ka skaitlim ir vismaz 20 dažādi pozitīvi dalītāji!

**Atrisinājums.** Apzīmējam unpārveidojam doto skaitli:

Tā kā naturālam skaitlim , kur ir dažādi pirmskaitļi, pavisam ir dažādi naturālie dalītāji, tad dotajam skaitlim ir vismaz dažādi dalītāji, pat neņemot vērā reizinātāju . Patiesībā dotajam skaitlim ir 640 dažādi dalītāji.

**10.2.** Zināms, ka . Kāda var būt vērtība?

**1. atrisinājums.** Pamatosim, ka . Veicam ekvivalentus pārveidojumus:

Tā kā iegūta patiesa nevienādība, tad arī dotā nevienādība ir patiesa. Līdz ar to esam ieguvuši, ka jeb , tātad .

Vēl jāparāda, ka visām vērtībām šajā intervālā ir atbilstošas un vērtības. Apzīmējam ). No dotās vienādības iegūstam

Sastādām kvadrātvienādojumu , kura sakņu summa ir un sakņu reizinājums ir . Ja šim vienādojumam ir atrisinājums dotai vērtībai, tad tā saknes ir meklētās un vērtības. Aprēķinām diskriminantu , tā kā , tad , tātad visām pieļaujamajām vērtībām . Tātad .

**2. atrisinājums.** Apzīmējam un . Ievietojot apzīmējumus dotajā vienādībā, iegūstam

Lai pēdējā vienādība būtu patiesa, tad . Tā kā , tad .

**10.3.** Taisnlenķa trijstūrī , kurā , novilkts augstums , nogriežņa viduspunkts ir . Punkti un ir attiecīgi nogriežņu un viduspunkti. Pierādīt, ka .

**Atrisinājums.** Ievērojam, ka pēc pazīmes , jo un
 (skat. 4. att.). Tātad trijstūru malas ir proporcionālas, tas ir, . Tā kā
 un , tad . Līdz ar to pēc pazīmes . Tātad
 jeb .

Līdzīgi pierāda, ka .

Tātad .



4. att.

**10.4.** Aplūkojam skaitļu virkni 7; 737; 73737; 7373737; ..., kuras pirmais loceklis ir 7 un katru nākamo iegūst, iepriekšējam pierakstot galā 37. Pierādīt, ka neviens šīs virknes loceklis nedalās ar 17.

**Atrisinājums.** Apzīmējam virknes locekļus ar , , , …

Redzams, ka virknē ir spēkā sakarība . Patiešām, skaitli pareizinot ar 100 tam tiek galā pierakstītas divas nulles, bet pieskaitot 37 šīs nulles pārvēršas par 37, tātad šī operācija pieraksta skaitļa galā 37. Apzīmēsim ar atlikumu virkni, kas rodas dalot ar 17, . Mums jāpierāda, ka virknē nav nevienas nulles.

Arī virknes katrs loceklis (tāpat kā virknei ) ir atkarīgs tikai no iepriekšējā

Izmantojot šo formulu un to, ka , aprēķināsim virknes pirmos locekļus.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|  | 7 | 6 | 8 | 4 | 12 | 13 | 11 | 15 | 7 |

Esam ieguvuši, ka . Tā kā šajā virknē katrs loceklis ir atkarīgs tikai no iepriekšējā, tad šī virkne būs periodiska ar periodu 8: no tā, ka , secinām, ka , tad utt.

Tā kā starp pirmajiem 8 locekļiem šajā virknē nav nevienas nulles, tad, tā kā tā ir periodiska, tad arī tālāk tajā nebūs nevienas nulles.

**10.5.** Dotas četras pēc ārējā izskata vienādas monētas, katras monētas masa ir 20 g vai 21 g. Kā noteikt katras monētas masu ar trīs svēršanām uz elektroniskajiem svariem, kas rāda uz svariem uzlikto monētu kopējo masu?

**Atrisinājums.** Apzīmējam monētas ar . Pirmajā svēršanā uz svariem liekam un .

* Ja vai , tad un masas jau zināmas, tās attiecīgi ir 20 g un 20 g vai 21 g un 21 g. Pēc tam ar divām svēršanām atrodam un masu.
* Ja , tad otrajā svēršanā uz svariem liekam un .
	+ Ja un , tad zinām un masu, tātad arī masu. Trešajā svēršanā uz svariem liekam un nosakām tās masu.
	+ Ja , tad no tā, ka , secinām, ka . Trešajā reizē uz svariem liekam un D. Ievērojam, ka  ir pāra skaitlis (40 vai 42). Apskatot visus iespējamos svēršanas iznākumus, iegūstam katras monētas masu, skat. 5. att.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 40 | 60 | 20 | 20 | 20 | 21 |
| 40 | 61 | 21 | 20 | 20 | 21 |
| 42 | 62 | 20 | 21 | 21 | 20 |
| 42 | 63 | 21 | 21 | 21 | 20 |

5. att.

**11.1.** Dota funkcija . Ar kādām parametra vērtībām funkcija ir augoša intervālā ?

**1. atrisinājums.** Ievērojam, ka .Lai funkcija būtu augoša, jāizpildās nevienādībai . Atrisinām šo nevienādību:

Vēl jāgarantē, ka parabolas virsotne neatrodas intervālā . Tā kā vērtības ir pozitīvas, tad parabolas zari ir vērsti uz augšu un, lai dotajā intervālā funkcija būtu augoša, jāizpildās nevienādībai jeb . Reizinot nevienādību ar , iegūstam jeb . Līdz ar to funkcija ir augoša intervālā , ja .

**2. atrisinājums.** Ievērojam, ka .Ja , tad parabolas virsotnes abscisa kas nozīmē, ka funkcija nav augoša dotajā intervālā. Ja , tad iegūstam un tā ir dilstoša funkcija. Ja , tad parabolas zari ir vērsti uz augšu un, lai dotajā intervālā funkcija būtu augoša, jāizpildās nevienādībai . Reizinot nevienādību ar , iegūstam jeb . Līdz ar to funkcija ir augoša intervālā , ja
.

**11.2.** Aplūkojam virkni 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; ..., kurā katrs naturālais skaitlis tiek atkārtots reizes. Pierādīt, ka šīs virknes -to locekli var aprēķināt pēc formulas

Ar apzīmējam skaitļa veselo daļu, tas ir, lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz . Piemēram, , , .

**Atrisinājums.** Katrs naturāls skaitlis dotajā virknē atkārtojas reizes, noskaidrosim, ar kādiem indeksiem (kurās pozīcijās) tas tajā parādās.

Pirms pirmā skaitļa ir viens vieninieks, divi divnieki, trīs trijnieki, …, skaitlis , tātad kopā

skaitļi. Tātad skaitlim indeksi šajā virnē būs

jeb, citiem vārdiem sakot, jebkurš skaitlis šajā virknē parādās ar indeksu , kur .

Lai pierādītu formulu, jāpierāda, ka visiem naturāliem un visiem naturāliem izpildās

 jeb

Vienādība , kur ir naturāls skaitlis izpildās tad un tikai tad, ja , tāpēc vienādība pārvēršas par divkāršo nevienādību

Atņemot un kāpinot kvadrātā, iegūstam

Redzams, ka pēdējā nevienādība ir patiesa visiem . Tā kā visi pārveidojumi bija ekvivalenti (kvadrātā tika kāpinātas pozitīvas izteiksmes), tad sākotnējā izteiksme arī ir spēkā.

**11.3.** Četrstūris ievilkts riņķa līnijā. Pierādīt, ka trijstūros ievilkto riņķa līniju centri ir taisnstūra virsotnes!

**Atrisinājums.** Ja un ir attiecīgi un ievilkto riņķa līniju centri (skat. 6. att.), tad un ir attiecīgi un bisektrises. Tātad

Līdzīgi .

Tā kā kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku, tad . Tātad punkti atrodas uz vienas riņķa līnijas. Līdz ar to .

Ja *Z* ir ievilktās riņķa līnijas centrs, tad līdzīgi iegūstam, ka .

Izmantojot šīs divas vienādības, iegūstam

Līdzīgi pierāda, ka arī pārējie četrstūra leņķi ir taisni, tātad tas ir taisnstūris.



6. att.

**11.4.** Zināms, ka trīsciparu skaitlis ir pirmskaitlis un ka vienādojumam ir divas reālas saknes. Vai var gadīties, ka šīs saknes ir **a)** veseli skaitļi, **b)** racionāli skaitļi?

**Atrisinājums.** **a)** Nē, saknes nevar būt veseli skaitļi. Ievērojam, ka , jo pretējā gadījumā nav pirmskaitlis. Tas nozīmē, ka nav vienādojuma sakne. Ja , tad . Tātad vienādojumam var būt tikai negatīvas saknes. Apzīmējot saknes ar , un sadalot kreisās puses izteiksmi reizinātājos, iegūstam

Pieņemsim, ka šīs saknes ir veseli skaitļi. Ja , tad iegūstam

Tātad esam ieguvuši, ka ir salikts skaitlis, kas ir pretrunā ar doto. Līdz ar to vienādojumam nav veselu sakņu.

**b)** Nē, saknes nevar būt racionāli skaitļi. Pieņemsim pretējo, ka saknes vienādojumam ir racionālas, tas ir, un , kur ir savstarpēji pirmskaitļi un arī ir savstarpēji pirmskaitļi. Sadalām vienādojuma kreiso pusi reizinātājos:

Ievietojot , iegūstam

Pamatosim, ja kvadrātvienādojuma sakne ir (nesaīsināma daļa), tad dalās ar .

Ievietojam vienādojumā tā sakni un pārveidojam iegūto identitāti:

Tā kā pēdējās vienādības kreisā puse dalās ar , tad arī labās puses izteiksmei jādalās ar . Ņemot vērā, ka pēc pieņēmuma un ir savstarpēji pirmskaitļi, secinām, ka ir jādalās ar .

Līdz ar to secinām, ka ir viencipara skaitlis, jo ir cipars.

Analogi iegūst, ka dalās ar . Tas nozīmē, ka ir divciparu skaitlis.

Tātad vienādība nevar pastāvēt, jo kreisajā pusē ir reizinātājs (trīsciparu pirmskaitlis), bet labajā pusē ir viencipara skaitlis un pārējie reizinātāji – divciparu. Līdz ar to dotā vienādojuma saknes nav racionāli skaitļi.

**11.5.** Atrast lielāko naturālo skaitli , kuram ir spēkā īpašība: lai kuras rūtiņas būtu aizkrāsotas rūtiņu tabulā, vienmēr varēs izvēlēties divas rindas un divas kolonnas tā, ka katra aizkrāsotā rūtiņa atrodas vai nu izvēlētajā rindā, vai izvēlētajā kolonnā (vai abās).

**Atrisinājums.** Lielākā vērtība ir 6. Pamatosim, ja iekrāsotas 6 rūtiņas, tad jebkuram krāsojumam izpildās uzdevuma nosacījumi. Ja kādā rindā ir vairāk nekā divas iekrāsotas rūtiņas, tad izvēlamies šo rindu un vēl kādu rindu, kurā ir kāda iekrāsota rūtiņa. Tātad izvēlētajās divās rindās jau ir vismaz četras iekrāsotas rūtiņas. Tā kā ir palikušas divas iekrāsotas rūtiņas, tad pietiek izvēlēties divas kolonnas, lai iekrāsotās rūtiņas atrastos šajās kolonnās.

Ja nevienā rindā nav vairāk kā divas iekrāsotas rūtiņas, tad pēc Dirihlē principa divas iekrāsotas rūtiņas ir vismaz divās rindās. Izvēlamies šīs divas (vai divas no trim, ja trīs rindās ir pa divām iekrāsotām rūtiņām) rindas. Tad izvēlētajās divās rindās jau ir tieši četras iekrāsotas rūtiņas. Tā kā ir palikušas divas iekrāsotas rūtiņas, tad pietiek izvēlēties divas kolonnas, lai iekrāsotās rūtiņas atrastos šajās kolonnās.

Pamatosim, ka lielākām vērtībām īpašība nav spēkā visām tabulām. Ja , tad īpašība nav spēkā, piemēram,
7. att. dotajam rūtiņu izvietojumam. Ievērojam, ka, izvēloties jebkuras divas rindas, paliek trīs kolonnas, kurās atrodas iekrāsotās rūtiņas.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

7. att.

**12.1.** Ģeometriskās progresijas pirmais, desmitais un 2020-ais loceklis ir naturāls skaitlis. Vai noteikti arī tās 2019-ais loceklis ir naturāls skaitlis?

**Atrisinājums.** Nē, 2019-ais loceklis var nebūt naturāls skaitlis, piemēram, ja un , tad

* ,
* ,
* , kas nav naturāls skaitlis.

**12.2.** Noteikt izteiksmes vislielāko un vismazāko vērtību, ja .

**Atrisinājums.** Pārveidojam doto izteiksmi un lietojam nevienādību :

Tātad dotās izteiksmes mazākā vērtība ir 9 un to var iegūt, ja .

Lai atrastu izteiksmes maksimālo vērtību, vispirms pierādīsim lemmu.

*Lemma.* Funkcija dilst pa kreisi no tās minimuma punkta un aug pa labi no tā, tas ir,

 un

*Pierādījums.* Apskatām abus gadījumus.

Saskaņā ar Lemmu fiksētiem funkcija

maksimālo vērtību sasniedz intervāla galapunktā, tas ir, kad vai . Simetrijas dēļ tas pats attiecas uz gadījumiem, kad fiksējam un . Tātad izteiksme maksimālo vērtību sasniedz tad, kad . Apskatām izteiksmes vērtību, ja :

* vai , tad ;
* un , tad ;
* un , tad .

Līdz ar to dotās izteiksmes vislielākā vērtība ir .

**12.3.** Riņķa līnijā ievilkta vienādsānu trapece , punkts ir garākā pamata viduspunkts. Punkts ir viduspunkts tam lokam , kas nesatur punktus un . Taisnes un krustojas punktā . Zināms, ka nogriežņi , un krustojas vienā punktā un . Pierādīt, ka .

**Atrisinājums.** Pierādīsim, ka irriņķa līnijas centrs. Tā kā , tad un (skat. 8. att.). Tā kā uz vienādiem lokiem balstās vienādas hordas, tad . Ievērojam, ka
 un kā ievilktie leņķi, kas balstās attiecīgi uz viena un tā paša loka. Tad
 pēc pazīmes un kā atbilstošās malas. Esam ieguvuši, ka punkts atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem. Trijstūris ir vienādsānu, jo kā leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem un , tātad punkts atrodas vienādā attālumā no nogriežņa galapunktiem. Līdz ar to (jeb ) ir nogriežņa vidusperpendikuls. Ievērojam, ka simetrijas dēļ ir malu un vidusperpendikuls. Tā kā četrstūris ir ievilkts četrstūris, tad tam apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas malu vidusperpendikulu krustpunktā, līdz ar to punkts ir riņķa līnijas centrs.

Tā kā punkts ir mazākā loka viduspunkts, tad . Trijstūris ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, jo balstās uz diametra , tad pēc Pitagora teorēmas .

 

8. att.

**12.4.** Zināms, ka četrciparu skaitlis ir pirmskaitlis un ka vienādojumam ir trīs reālas saknes. Vai var gadīties, ka visas šīs saknes ir **a)** veseli skaitļi, **b)** racionāli skaitļi?

**Atrisinājums.** **a)** Nē, saknes nevar būt veseli skaitļi. Ievērojam, ka , jo pretējā gadījumā nav pirmskaitlis. Tas nozīmē, ka nav vienādojuma sakne. Ja , tad . Tātad vienādojumam var būt tikai negatīvas saknes. Apzīmējot saknes ar , , un sadalot kreisās puses izteiksmi reizinātājos, iegūstam

Pieņemsim, ka vienādojuma saknes ir veseli skaitļi. Ja , tad iegūstam

Tātad esam ieguvuši, ka ir salikts skaitlis, kas ir pretrunā ar doto. Līdz ar to vienādojumam nav veselu sakņu.

**b)** Nē, saknes nevar būt racionāli skaitļi. Pieņemsim, ka saknes vienādojumam ir racionālas, tas ir, , un , pie kam daļas ir nesaīsināmas jeb un ir savstarpēji pirmskaitļi. Pārveidojam vienādojuma kreisās puses izteiksmi:

Ievietojot , iegūstam

Reizinot abas puses ar , iegūstam

Pamatosim, ja vienādojuma sakne ir (nesaīsināma daļa), tad dalās ar .

Ievietojam vienādojumā tā sakni un pārveidojam iegūto identitāti:

Tā kā pēdējās vienādības kreisā puse dalās ar , tad arī labās puses izteiksmei jādalās ar . Ņemot vērā, ka pēc pieņēmuma un ir savstarpēji pirmskaitļi, secinām, ka ir jādalās ar .

Līdz ar to secinām, ka ir viencipara skaitlis, jo ir cipars.

Analogi iegūst, ka dalās ar . Tas nozīmē, ka ir divciparu skaitlis.

Tātad vienādība nevar pastāvēt, jo kreisajā pusē ir reizinātājs (četrciparu pirmskaitlis), bet labajā pusē ir viencipara skaitlis un pārējie reizinātāji – divciparu. Līdz ar to dotā vienādojuma saknes nav racionāli skaitļi.

**12.5.** Kādā valstī ir 2020 pilsētas, katra ar katru ir savienota ar ceļu, ceļi ārpus pilsētām nekrustojas (izmantoti viadukti). Biznesmenis ar ceļu pārvaldi spēlē šādu spēli: katru dienu biznesmenis privatizē vienu ceļu, bet ceļu pārvalde nojauc desmit neprivatizētus ceļus. Pierādīt, ka biznesmenis var panākt, ka pēc kāda laika viņam pieder ciklisks ceļu maršruts kas iet caur tieši 70 pilsētām, katrā iegriežoties tieši vienu reizi!

**Atrisinājums.** Vispirms biznesmenis sev var izveidot ceļu virkni no 67 ceļiem caur kādām pilsētām
. To noteikti var izdarīt, jo pat pēc pēdējā gājiena ceļu pārvalde ir nojaukusi
tikai ceļus, bet no katras pilsētas iziet 2019 ceļi. Nosauksim pilsētas par zaļām.

Nākamajā etapā biznesmenis var sev privatizēt 40 ceļus, kas iziet no pilsētas un iet uz pilsētām
(skat. 9. att.), kas nav zaļas. To noteikti var izdarīt, jo no pilsētas iziet ceļš uz pilsētām, kas nav zaļas, bet ceļu pārvalde pat pēdējā gājienā kopā ir nojaukusi tikai ceļus. Nosauksim pilsētas par sarkanām.



9. att.

Nākamajā etapā biznesmenis var sev privatizēt 40 ceļus, kas iziet no pilsētas un iet uz pilsētām , kas nav ne zaļas, ne sarkanas. To noteikti var izdarīt, jo no pilsētas iziet ceļi uz pilsētām, kas nav ne zaļas, ne sarkanas, bet ceļu pārvalde pat pēdējā gājienā kopā ir nojaukusi tikai ceļus.

Uz doto brīdi ceļu pārvalde ir nojaukusi 1470 ceļus, bet 40 sarkanās ar 40 zaļajām pilsētām kopā savieno
 ceļi, tātad vismaz 130 no tiem vēl nav nojaukti. Pieņemsim, ka nav nojaukts ceļš, starp pilsētām un . Tad pēdējā gājienā biznesmenis var privatizēt šo ceļu un viņš būs ieguvis ciklisku maršrutu caur 70 pilsētām
(skat. 10. att.).



10. att.