**Latvijas 66. matemātikas olimpiādes 3. posma uzdevumi un atrisinājumi**

**9.1.** Zināms, ka un ir tādi naturāli skaitļi, ka ir naturāla skaitļa kubs. Pierādīt, ka arī ir naturāla skaitļa kubs!

**Atrisinājums**

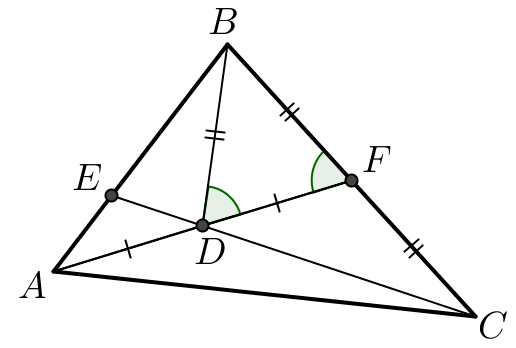
Apzīmējam , kur – naturāls skaitlis. Kāpinot abas puses kvadrātā, iegūstam . Izsakām

Skaitlis ir naturāls skaitlis, tāpēc arī ir naturāls. Ja nedalītos ar , tad varētu izteikt kā nesaīsināmu daļu . Bet tad arī būtu nesaīsināma daļa, taču tam jābūt naturālam skaitlim – pretruna. Tāpēc dalās ar un tātad ir naturāla skaitļa kubs.

**9.2.** Trijstūrī novilkta mediāna , punkts ir tās viduspunkts. Taisne krusto malu punktā .   
Pierādīt: ja , tad !

**Atrisinājums**

Trijstūris ir vienādsānu ( pēc dotā), tāpēc kā leņķi pie pamata malas (skat.   
1. att.). Tā kā (jo ir viduspunkts), (kā vienādu leņķu blakusleņķi) un , tad pēc pazīmes . Tātad kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūros. Tā kā   
 kā krustleņķi, tad un ir vienādsānu trijstūris. Līdz ar to kā sānu malas vienādsānu trijstūrī.

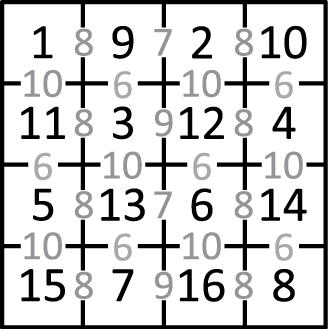


1. att.

**9.3.** Vai tabulā, kuras izmēri ir rūtiņas, var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā citu) tā, lai katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība būtu vismaz **a)** 6; **b)** 7?

**Atrisinājums**

**a)** Jā, skaitļus tabulā var ierakstīt, piemēram, skat. 2. att., kur pelēkā krāsā norādītas skaitļu starpības.



2. att.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 8 | 15 |  |  |
| 16 |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

3. att.

**b)** Pamatosim, ka skaitļus tabulā nevar ierakstīt tā, lai izpildās uzdevuma nosacījumi. Skaitlim 8 blakus var atrasties tikai skaitļi 1, 15 un 16. Pieņemsim, ka 1 neatrodas blakus 8. Tad skaitlim 8 ir tikai divi kaimiņi, tātad tas atrodas stūrī (skat. 3. att.).

Skaitlim 7 var atrasties blakus tikai skaitļi 14, 15, 16, tātad tas noteikti ir blakus skaitlim 15 vai 16 (skat. 3. att.), līdz ar to tas atrodas kādā no vietām , , . Tas nevar būt vietā, jo tur tam būtu četri kaimiņi. Tas nevar atrasties vietā, jo tur tam ir trīs kaimiņi, bet viens no skaitļiem, kas tam varētu būt blakus (skaitlis 16) tam blakus neatrodas. Līdzīgi skaitlis 7 nevar atrasties arī vietā.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka skaitļiem 1 un 8 jābūt blakus. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka skaitļi izkārtoti tā, kā parādīts 4. att. Skaitlis nevar būt 15, jo tad vietā būtu jāieraksta skaitlis 8, bet tas jau ir ierakstīts tabulā. Tātad vietā jābūt skaitlim 16, un tad vienīgā iespējamā vērtība ir 9. Līdz ar to esam ieguvuši 5. att. parādīto skaitļu izkārtojumu.

|  |  |
| --- | --- |
| 8 |  |
| 1 |  |

4. att.

|  |  |
| --- | --- |
| 8 | 16 |
| 1 | 9 |

5. att.

Ievērojam, ka skaitlim 9 blakus rūtiņās var būt ierakstīti tikai skaitļi 1, 2, 16. Tātad skaitlis 8 nav stūrī, jo tad skaitlim 9 būtu četri kaimiņi. Tieši tāpat stūrī nav arī skaitlis 9, jo tad skaitlim 8 būtu četri kaimiņi. Tātad tiem ir vēl pa vienam kaimiņam. Skaidrs, ka skaitlim 8 vēl ir kaimiņš 15, bet skaitlim 9 vēl ir kaimiņš 2. Iespējami divi gadījumi, kur attiecībā pret skaitli 8 var būt ierakstīts skaitlis 15 (skat. 6. att. un 7. att.). Neviens no šim gadījumiem nav iespējams, jo vietā būtu jāieraksta skaitlis 9, bet vietā – skaitlis 8.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 15 |  |  |  |
| 8 | 16 |  |  |
| 1 | 9 | 2 |  |

6. att.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 15 | 8 | 16 |
|  |  | 1 | 9 |
|  |  |  | 2 |
|  |  |  |  |

7. att.

**9.4.** Atrast skaitļa mazāko pirmreizinātāju!

**Atrisinājums**

Apzīmēsim , tad dotais skaitlis ir .

Tā kā ir pāra skaitlis, tad ir nepāra un arī dotais skaitlis ir nepāra, tātad tas nedalās ar 2.

Ievērojam, ka 2016 dalās ar 9, tātad . Tā kā skaitlis dalās ar 3, bet nedalās ar 9, tad dotajam skaitlim nav pirmreizinātājs 3.

No kongruences izriet, ka , tātad dotais skaitlis nedalās ar 5.

No kongruences izriet, ka , tātad dotais skaitlis nedalās ar 7.

Ievērosim, ka ; tātad . Virkne , , ir periodiska pēc moduļa 11; apskatīsim šīs virknes pirmos locekļus:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
|  | **1** | 3 | 9 | 5 | 4 | **1** | … |

Tā kā , tad secinām, ka

Līdz ar to , tātad gan , gan dalās ar 11. Tātad dotā skaitļa mazākais pirmreizinātājs ir 11.

**9.5.** Naturālu skaitļu virkni pēc parauga „2016” veido šādi: virknes pirmais loceklis ir 2; virknes otrais loceklis – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 0; virknes trešais loceklis   
 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 1; virknes ceturtais loceklis   
 – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 6. Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50.

Kādi ir četri nākamie skaitļi, kas virknē seko aiz skaitļa 2016?

**Atrisinājums**

Pavisam ir četru veidu *gājieni*: „” (skaitlis satur 2 un meklējam nākamo skaitli, kas satur 0), „”,   
„” un „”. Turklāt šie *gājieni* cikliski atkārtojas tieši šādā secībā.

Lai noskaidrotu, kuri nākamie skaitļi seko virknē pēc skaitļa 2016, nepieciešams uzzināt, pēc kāda *gājiena* tika sasniegts skaitlis 2016.

Aplūkosim iespējamos gadījumus.

1. Skaitli 2016 nevar iegūt pēc *gājiena* „”, jo iepriekšējais virknes loceklis būtu 2006, bet nākamais skaitlis, kas ir lielāks nekā 2006 un satur ciparu 2, ir 2007.
2. Skaitli 2016 nevar iegūt pēc *gājiena* „”, jo iepriekšējam virknes loceklim tad būtu jābūt 2015, bet pirms tā izdarītajam *gājienam* jābūt „”, kas noved pie tās pašas pretrunas kā a) gadījumā.
3. Skaitli 2016 nevar iegūt pēc *gājiena* „”, jo iepriekšējam virknes loceklim būtu jābūt 2015, bet pirms tā izdarītajam *gājienam* jābūt „” un skaitlim 2014. Savukārt, pirms skaitļa 2014 izdarītajam *gājienam* jābūt „” un iegūstam līdzīgu pretrunu kā a) gadījumā.
4. Tātad skaitli 2016 iegūst pēc *gājiena* „”, un nākamie skaitļi virknē pēc *gājieniem* „”,   
   “”,”” un “” ir skaitļi 2017, 2018, 2019 un 2026.

**10.1.** Zināms, ka un ir tādi naturāli skaitļi, ka ir naturāla skaitļa 33. pakāpe. Pierādīt, ka arī ir naturāla skaitļa 33. pakāpe!

**Atrisinājums**

Apzīmējam , kur – naturāls skaitlis. Kāpinot abas puses 10. pakāpē, iegūstam . Izsakām

Skaitlis ir naturāls skaitlis, tāpēc arī ir naturāls. Ja nedalītos ar , tad varētu izteikt kā nesaīsināmu daļu . Bet tad arī būtu nesaīsināma daļa, taču tam jābūt naturālam skaitlim – pretruna. Tāpēc dalās ar un tātad arī ir naturāla skaitļa 33. pakāpe.

**10.2.** Trijstūra leņķu un bisektrises krusto tam apvilkto riņķa līniju attiecīgi punktos un , bet pašas krustojas punktā . Pierādīt, ka !

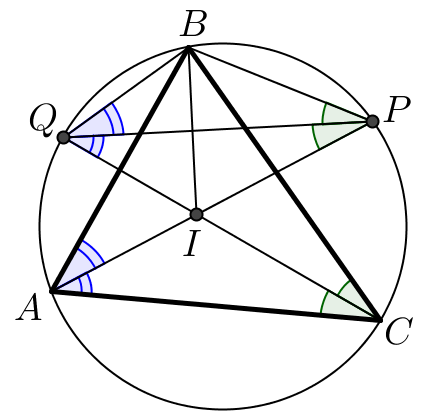
**Atrisinājums**

Apzīmējam un (skat. 8. att.). Ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka, ir vienādi, tāpēc

* (balstās uz loka );
* (balstās uz loka );
* (balstās uz loka );
* (balstās uz loka ).

Līdz ar to pēc pazīmes , jo , ir kopīga mala un .

Tāpēc kā atbilstošās malas vienādos trijstūros un ir vienādsānu trijstūris ar pamatu . Tā kā ir bisektrise, kas vilkta no virsotnes leņķa, tad ir arī augstums pret un līdz ar to .



8. att.

**10.3.** Doti tādi reāli skaitļi un , ka . Pierādīt, ka .

**Atrisinājums**

Dotās vienādības abas puses kāpinot kvadrātā un pēc tam reizinot ar 2, iegūstam:

;

.

Pieskaitot un atņemot vienādības kreisai pusei vienu un to pašu izteiksmi un pēc tam izmantojot starpības kvadrāta formulu, iegūstam:

;

.

Tā kā , tad jeb .

**10.4.** Pitagora trijstūrī visu malu garumi ir lielāki nekā 5. Vai var gadīties, ka tā **a)** trīs malu, **b)** divu malu garumi ir pirmskaitļi?

*Piezīme.* Pitagora trijstūris ir taisnleņķa trijstūris, kam visi malu garumi ir naturāli skaitļi.

**Atrisinājums**

**a)** Nē, trīs malu garumi nevar būt pirmskaitļi. Taisnleņķa trijstūrī malu garumus , un saista Pitagora teorēma . Tā kā visu malu garumiem jābūt pirmskaitļiem, kas lielāki nekā 5, tad visu malu garumi ir nepāra skaitļi, tātad arī un ir nepāra skaitļi, bet divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis – pretruna ar to, ka ir nepāra skaitlis.

**b)** Jā, divu malu garumi var būt pirmskaitļi. Piemēram, der malu garumi 11, 60, 61, jo divi no tiem ir pirmskaitļi un tiem izpildās Pitagora teorēmas nosacījums, tas ir, jeb .

*Piezīmes*

1. Vērtības b) gadījumā var atrast, ja zina sakarību, ka katram Pitagora skaitļu trijniekam , un eksistē tādas naturālas un vērtības (), ka , , . Skaitlis nav pirmskaitlis, jo ir pāra skaitlis, kas ir lielāks nekā 5 (pēc dotā). Tātad vienlaikus pirmskaitļi ir un . Lai skaitlis   
   ) būtu pirmskaitlis, reizinātājam jābūt vienādam ar 1 jeb un pirmskaitļiem jābūt formā un . Pārbaudot nelielas ( pēc dotā) vērtības, pie atrod minēto skaitļu trijnieku 11, 60, 61.
2. To, ka a) gadījumā viens no skaitļiem ir pāra, var secināt no skaitļa izteiksmes.

**10.5.** Regulāra 2016-stūra visas virsotnes sākotnēji ir baltas. Kādu mazāko skaitu no tām var nokrāsot melnā krāsā tā, lai nepaliktu neviens **a)** taisnleņķa, **b)** šaurleņķu trijstūris, kuram visas virsotnes atrodas 2016-stūra baltajās virsotnēs?

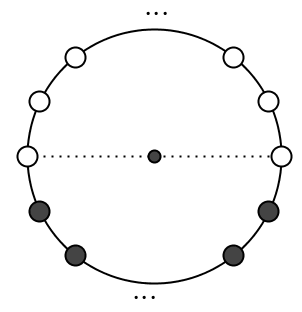
**Atrisinājums**

**a)** Visas regulāra 2016-stūra virsotnes atrodas uz vienas riņķa līnijas. Ievilkts leņķis ir taisns tikai tādā gadījumā, ja tas balstās uz diametra. Tātad, ja kāda diametra abi galapunkti būtu balti, tad visi pārējie punkti būtu jānokrāso melni, jo diametra galapunkti ar jebkuru trešo punktu veido taisnleņķa trijstūri. Līdz ar to katra diametra vismaz viens galapunkts ir jānokrāso melns. Tātad melnas jānokrāso vismaz regulārā 2016-stūra virsotnes. Ja katra diametra vienu galapunktu nokrāso melnu, tad nepaliek neviens taisnleņķa trijstūris, kuram visas virsotnes ir baltas. Tātad mazākais punktu skaits, kas jānokrāso melni, ir 1008.

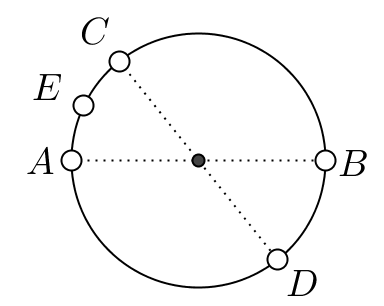
**b)** Ja melnas nokrāso 1007 pēc kārtas esošas virsotnes, tad no atlikušajām 1009 virsotnēm var izveidot tikai taisnleņķa vai platleņķa trijstūrus, jo katra trijstūra viens leņķis balstās uz loka, kura lielums ir vismaz (skat. 9. att.).

Pierādīsim, ka mazāk virsotnes nevar nokrāsot, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

Pieņemsim, ka melnas nokrāsotas ne vairāk kā 1006 virsotnes, tad baltas ir palikušas vismaz 1010 virsotnes. Tā kā ir tieši 1008 diametri, kuriem abi galapunkti atrodas regulārā 2016-stūra virsotnēs, tad būs vismaz divi diametri kuriem abi galapunkti ir balti (Dirihlē princips). Šos diametrus apzīmējam ar un (skat. 10. att.). Izvēlamies kādu punktu , kurš ir balts (nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka tas atrodas uz loka ), bet tad trijstūris ir šaurleņķu, jo visi trīs loki , , ir mazāki nekā , tātad trijstūra leņķi ir mazāki nekā , jo tie ir ievilktie leņķi, kas balstās uz šiem lokiem.



9. att.



10. att.

**11.1.** Zināms, ka un ir tādi naturāli skaitļi, ka ir naturāla skaitļa 2016. pakāpe. Pierādīt, ka arī ir naturāla skaitļa 2016. pakāpe!

**Atrisinājums**

Apzīmējam , kur – naturāls skaitlis. Kāpinot abas puses 433. pakāpē, iegūstam . Izsakām

Skaitlis ir naturāls skaitlis, tāpēc arī ir naturāls. Ja nedalītos ar , tad varētu izteikt kā nesaīsināmu daļu . Bet tad arī būtu nesaīsināma daļa, taču tam jābūt naturālam skaitlim – pretruna. Tāpēc dalās ar un tātad arī ir naturāla skaitļa 2016. pakāpe.

**11.2.** Šaurleņķu trijstūrim () apvilktās riņķa līnijas centrs ir un punkts ir malas viduspunkts. Riņķa līnija ar diametru krusto malas un attiecīgi punktos un . Uz nogriežņa atlikts punkts tā, ka . Pierādīt, ka trijstūri un ir līdzīgi!

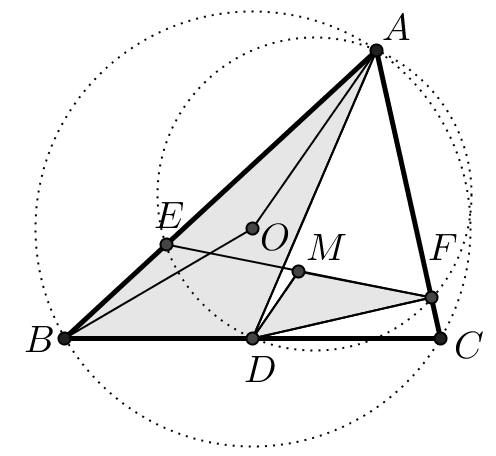
**Atrisinājums**

Apzīmējam , un .

Ievērojam, ka kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka (skat. 11. att.).

Tā kā un ir vienādsānu (), tad iegūstam  
. Tā kā ir riņķa līnijas diametrs, tad . No trijstūra iegūstam, ka . Tā kā ir trijstūra ārējais leņķis, tad   
. Ievērojam, ka un   
. Tā kā (kā iekšējie šķērsleņķi pie paralēlām taisnēm un ) un , tad . Tātad .

Līdz ar to pēc pazīmes .



11. att.

**11.3.** Pierādīt, ka katram naturālam skaitlim () var atrast tādus naturālus skaitļus un (), ka

**Atrisinājums**

Izmantojot vienādību , pārrakstām dotās vienādības labās puses izteiksmi

Tātad katrai vērtībai nepieciešams atrast atbilstošo un vērtību. No vienādības izsakot , iegūstam . Izvēloties , iegūstam, ka . Līdz ar to

Tā kā , tad jeb , un prasītais ir pierādīts visām naturālām vērtībām.

*Piezīme.* Ja ir pāra skaitlis, tad var izmantot un .

**11.4.** Naturālu skaitļu virkni pēc parauga „2016” veido šādi: ; – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 0; – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 1; – mazākais naturālais skaitlis, kas lielāks nekā un tā pierakstā ir cipars 6. Pēc tam meklētie cipari cikliski atkārtojas: 2-0-1-6-2-0-... . Virknes pirmie locekļi ir 2; 10; 11; 16; 20; 30; 31; 36; 42; 50.

Vai šajā virknē ir skaitlis **a)** 2001, **b)** 2006?

**Atrisinājums**

Pavisam ir četru veidu *gājieni*: „” (skaitlis satur 2 un meklējam nākamo skaitli, kas satur 0), „”,   
„” un „”. Ievērojam, ka neviens *gājiens* neļauj pārlēkt no skaitļa uz skaitli, kas ir lielāks   
nekā .

Virknē pēc izdarīta *gājiena* “” būs kāds no skaitļiem 1906, 1916, 1926 vai 1936.

Aplūkosim, kāda ir tālākā skaitļu virkne katrā no gadījumiem:

Kā redzams, visos gadījumos virknē pēc *gājiena* “” ir skaitlis 1936.

Tātad, turpinot virkni, iegūsim

.

Līdz ar to esam pierādījuši, ka skaitlis 2001 pieder virknei, bet skaitlis 2006 – nepieder.

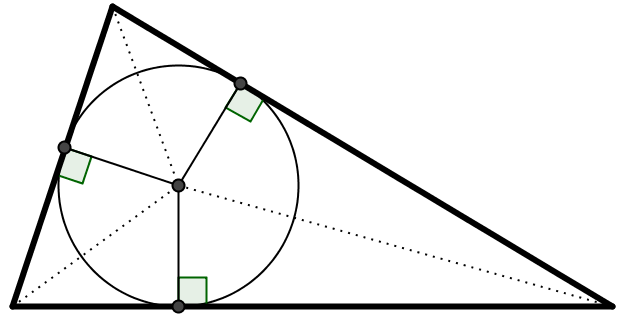
**11.5.** Pierādīt, ka jebkuru trijstūri **a)** ar trim, **b)** ar diviem nogriežņiem var sadalīt trīs daļās tā, ka katrai no daļām ir simetrijas ass!

**Atrisinājums**

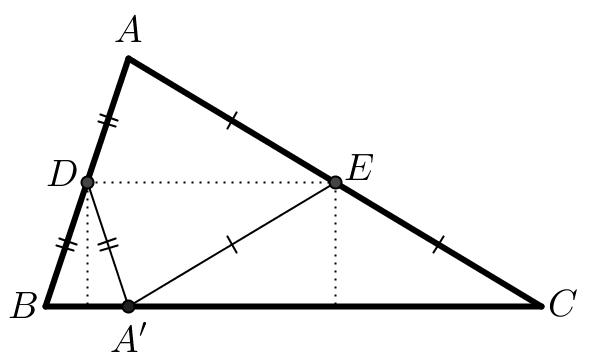
**a)** Novelkot ievilktās riņķa līnijas rādiusus pret visām trim trijstūra malām, tas tiek sadalīts trīs četrstūros   
(skat. 12. att.). Katram no tiem simetrijas ass ir dotā trijstūra bisektrise (12. att. atzīmēta ar pārtrauktu līniju).

**b)** Trijstūra garāko malu apzīmēsim ar , malu un viduspunktus – attiecīgi un (skat. 13. att.).

Attēlojot virsotni simetriski pret viduslīniju , tās projekcija atrodas uz malas . Simetrijas dēļ trijstūri un ir vienādsānu – tātad simetrijas ass tajos ir augstums pret pamatu. Četrstūris pēc konstrukcijas ir simetrisks pret . Tātad divi meklētie nogriežņi ir un .



12. att.



13. att.

*Piezīmes*

1. a) gadījumā šaurleņķu trijstūriem der arī apvilktās riņķa līnijas centrs. Šajā gadījumā par trīs nogriežņiem izvēlas rādiusus, kas vilkti uz trijstūra virsotnēm, bet malu vidusperpendikuli ir simetrijas asis – svarīgi, ka vidusperpendikulu krustpunkts (apvilktās riņķa līnijas centrs) atrodas trijstūra iekšpusē.
2. b) gadījuma atrisinājums der arī kā a) gadījuma atrisinājums, ja vienu no nogriežņiem sadala divās daļās (piemēram, izvēlas punktu un uzskata nogriezni par diviem nogriežņiem un ).

**12.1.** Zināms, ka , un ir tādi naturāli skaitļi, ka ir naturāla skaitļa septītā pakāpe. Pierādīt, ka arī ir naturāla skaitļa septītā pakāpe!

**Atrisinājums**

Apzīmējam , kur – naturāls skaitlis. Kāpinot abas puses ceturtajā pakāpē, iegūstam   
. Izsakām

Skaitlis ir naturāls skaitlis, tāpēc arī ir naturāls. Ja nedalītos ar , tad varētu izteikt kā nesaīsināmu daļu . Bet tad arī būtu nesaīsināma daļa, taču tam jābūt naturālam skaitlim – pretruna. Tāpēc dalās ar un tātad arī ir naturāla skaitļa 7. pakāpe.

**12.2.** Trijstūrī ievilktās riņķa līnijas centrs ir . Uz malām un izvēlēti attiecīgi punkti un tā, ka un . Nogrieznis krusto punktā . Taisne, kas pieskaras punktā , krusto malas un attiecīgi punktos un . Pierādīt, ka !

**Atrisinājums**

Apzīmējam pieskaršanās punktus malām un attiecīgi ar un (skat. att.). Tā kā un , tad pēc pazīmes . Tātad

(1)

kā vienādu trijstūru atbilstošās malas.

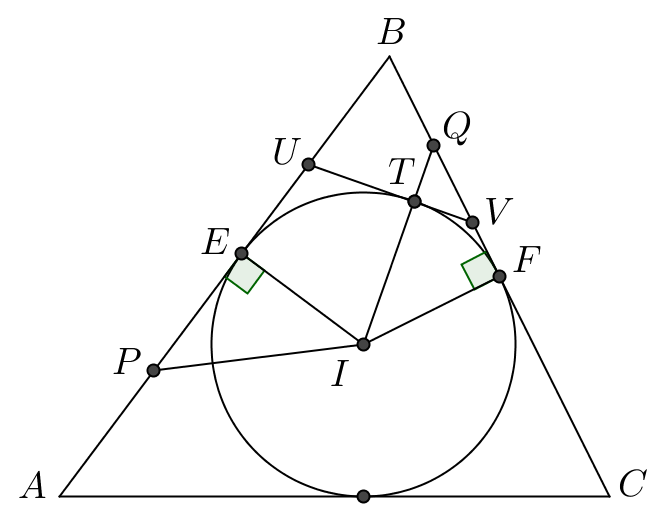
Tā kā pieskares, kas vilktas no viena punkta pret riņķa līniju, ir vienāda garuma, tad

(2)

Saskaitot (1) un (2) iegūstam, ka .

Savukārt, , tāpēc . Tā kā (pieskares no viena punkta),   
tad .

No tā, ka un , izriet .

****

14. att.

**12.3.** Pierādīt, ka vismaz viens no 18 pēc kārtas sekojošiem trīsciparu skaitļiem dalās ar savu ciparu summu!

**Atrisinājums**

No 18 pēc kārtas sekojošiem skaitļiem viens noteikti dalās ar 18. Pierādīsim, ka šis skaitlis ir meklētais.

Tā kā tas ir trīsciparu skaitlis, tad tā ciparu summa var būt 9, 18 vai 27 (jo tai jādalās ar 9). Tā nevar būt 27, jo vienīgais skaitlis, kam ciparu summa ir 27, ir 999, bet tas nedalās ar 18. Tātad tā ciparu summa ir 9 vai 18 un tā kā skaitlis dalās ar 18, tad tas dalās ar savu ciparu summu.

**12.4.** Divas funkcijas tiek definētas šādi: un . Pierādīt, ka jebkurai naturālai vērtībai iespējams atrast tādas naturālas un vērtības, ka .

**Atrisinājums**

Ievērojam, ka .

Ja ir nepāra, tad der vērtības , jo tad

Ja ir pāra, tad der vērtības un , jo tad

*Piezīme*. Uzdevumu vieglāk atrisināt, ja sākumā aplūko funkcijas vērtības dažām vērtībām un atrod tām atbilstošo un vērtību: , , ,   
. Pēc tam var pamanīt, ka nepāra vērtībai un apskatīt funkciju

Pāra vērtībām izpildās , tāpēc var apskatīt funkciju

**12.5.** Aplūko visus tos funkciju grafikus, kuriem ir trīs dažādi krustpunkti ar koordinātu asīm. Katram no tiem caur šiem trim krustpunktiem novelk riņķa līniju. Pierādīt, ka visām šīm riņķa līnijām ir kopīgs punkts!

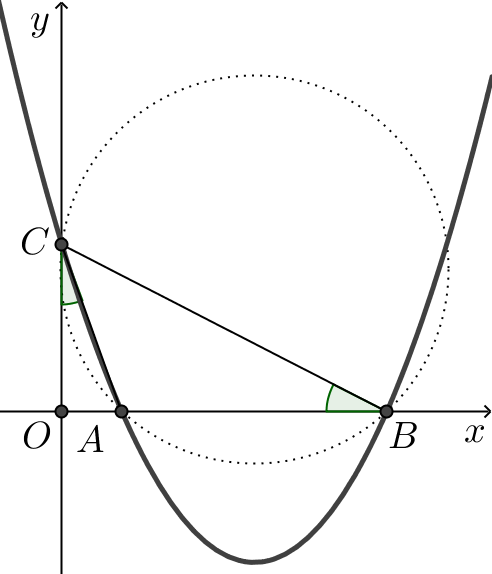
**1. atrisinājums**

Visām riņķa līnijām ir kopīgs punkts . Pierādīsim to.

Kvadrātvienādojuma saknes apzīmējam ar un . Ar un apzīmējam parabolas krustpunktus ar asi, ar – parabolas krustpunktu ar asi: , un . Apskatīsim divus iespējamos gadījumus.

1. Ja riņķa līnijai ar asi ir tikai viens krustpunkts, tas ir, tā pieskaras asij (skat. 15. att.), tad pēc pazīmes , jo – kopīgs un . Tad

Pēc Vjeta teorēmas , tāpēc . Tā kā nesakrīt ar (jo tad parabolai ar asīm būtu tikai divi krustpunkti), tad vienīgā iespēja, ka . Tātad šīs riņķa līnijas iet caur punktu .



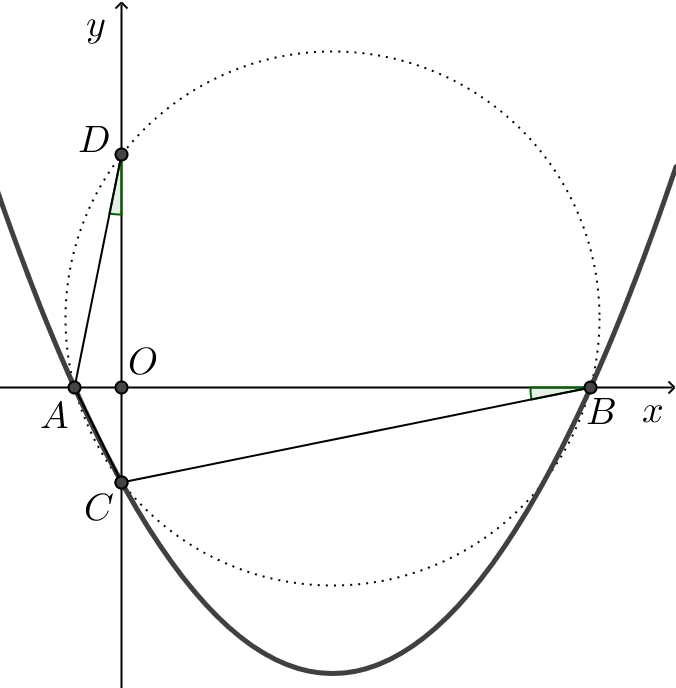
15. att.

1. Ja riņķa līnijai ar asi ir divi krustpunkti, tad otru krustpunktu ar asi apzīmējam ar .

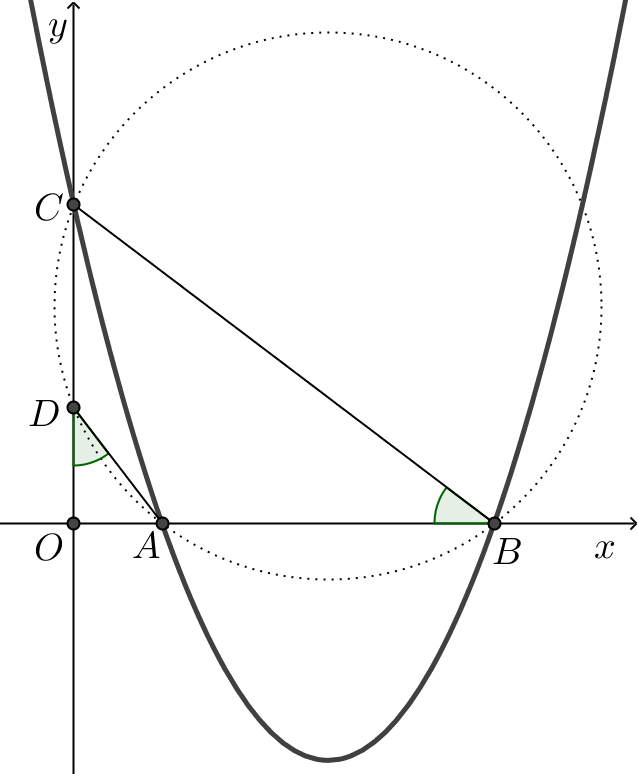
* Ja , tad pēc pazīmes , jo un kā ievilktie leņķi, kas balstās uz viena un tā paša loka (skat. 16. att.). Tāpēc
* Ja , tad pēc pazīmes , jo un pēc blakusleņķu īpašības un īpašības, ka ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir (skat. 17. att.). Tāpēc

Tā kā punkts nevar būt , jo tad iegūst ieliektu četrstūri, kuram nevar apvilkt riņķa līniju, tad šīs riņķa līnijas iet caur punktu .

Līdz ar to visām šādām riņķa līnijām ir kopīgs punkts .



16. att.



17. att.

**2. atrisinājums.** Šo trīs krustpunktu koordinātas ir

Noteiksim, kur atrodas riņķa līnijas, kas iet caur šiem trim punktiem, centrs. Abscisas vērtība ir . Atliek noskaidrot ordinātas vērtību. Izmantojot riņķa līnijas ar centru punktā un rādiusu vienādojumu , iegūstam

Tātad un riņķa līnijas centra koordinātas ir .

Aplūkojam, kāds ir attālums no punkta līdz riņķa līnijas centram:

Tātad caur punktu iet visas minētā veida riņķa līnijas.