

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Drīkst izmantot tikai rakstāmpiederumus un cirkuli.

1. uzdevums Vai eksistē veselu skaitļu virkne a_1, a_2, \dots tāda, ka katram vesalam skaitlim $d \neq 0$ ir tieši 2025 dažādi indekso pāri (i, j) , kuriem $a_i - a_j = d$?

2. uzdevums Dota reālu skaitļu virkne a_1, a_2, \dots , kurai

$$\{a_n\} \lfloor a_{n+1} \rfloor = \lfloor a_n \rfloor \{a_{n+1}\}$$

visiem naturāliem skaitļiem n . Pierādīt, ka eksistē tāds skaitlis $\lambda \in \mathbb{R}$, ka $\{a_m\} \lfloor a_m \rfloor = \lambda$ izpildās bezgalīgam m vērtību skaitam.

Piezīme: Reālam skaitlim x , ar $\lfloor x \rfloor$ apzīmē lielāko veselu skaitli, kas nepārsniedz x , un $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

3. uzdevums Dota funkcija $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, kurai izpildās nevienādība

$$f(x) + f(y) \geq f(x + y)$$

visiem $x, y \in \mathbb{Q}$. Pierādīt, ka eksistē tāds skaitlis $\alpha \in \mathbb{R}$, ka $f(x) \geq \alpha x$ visiem $x \in \mathbb{Q}$.

Piezīme: Ar \mathbb{Q} apzīmē visu racionālo skaitļu kopu.

4. uzdevums Atrast visas funkcijas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurām

$$(f(a - c) + f(b - d))(f(a) + f(b)) = f(ad - bc) + f(f(a) + f(b) - ac - bd)$$

visiem reāliem skaitļiem a, b, c, d .

5. uzdevums Dots naturāls skaitlis n un pozitīvi reāli skaitļi $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ar īpašību, ka

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \frac{x_1^2 + x_n^2}{2}.$$

Pierādīt, ka

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq nx_1x_n.$$

6. uzdevums Draugu kompānija, kas sastāv no $n \geq 3$ cilvēkiem spēlē ķerenes variāciju. Spēles sākumā visi spēlētāji ir brīvi. Kad brīvs spēlētājs A noķer spēlētāju B , viņš iesaldē spēlētāju B un atbrīvo visus spēlētājus, kurus ir iesaldējis B . Divas noķeršanas nevar notikt vienlaikus. Atrast mazāko iespējamo ķērienu skaitu, pēc kura starp jebkuriem 2 spēlētājiem viens noteikti būs atbrīvojis otru.

7. uzdevums Dots naturāls skaitlis n . Kubs ar izmēriem $n \times n \times n$ sastāv no n^3 vienības kubiem. Kopu, kas sastāv no n vienības kubiem un veido $1 \times 1 \times n$ kastīti saucim par *adatu*, un tai ir 3 iespējamās orientācijas. Atrast lielāko naturālu skaitli K tādu, ka ir iespējams izvēlēties $3K$ adatas, K — katrā orientācijā, tā, ka nekādām 2 no tām nav kopīgā vienības kuba.

8. **uzdevums** Nenegatīvu veselu skaitļu virkni a_1, \dots, a_n sauksim par *pašraksturojošu*, ja

$$a_k = |\{i \mid a_i \geq k\}|$$

visiem $k \in \{1, \dots, n\}$, t.i., a_k ir vienāds ar virknes locekļu, kuri ir lielāki vai vienādi ar k , skaitu visiem $k \in \{1, \dots, n\}$.

Katram naturālam skaitlim n noteikt pašraksturojošu virkņu skaitu ar garumu n .

9. **uzdevums** Par *Baltijas poliamondu* sauksim n -stūri, kura malas garumi ir $n, n-1, \dots, 2, 1$ tieši šādā secībā un visi iekšējo leņķu lielumi ir 120° vai 240° . Pierādīt, ka jebkuram Baltijas poliamondam n dalās ar 6.

10. **uzdevums** Saüksim deviņciparu naturālu skaitli par *labu*, ja tā decimālais pieraksts satur visus ciparus no 1 līdz 9. Saüksim skaitli par *lielisku*, ja tas ir labs un katram $k = 1, \dots, 9$ k -tais cipars šī skaitļa decimālajā pierakstā ir vienāds ar cipara k pozīcijas numuru skaitļa decimālajā pierakstā. Piemēram, skaitlis 847296315 ir lielisks, jo:

- pirmais cipars šajā skaitlī ir 8, kas ir vieninieka pozīcija šajā skaitļa decimālajā pierakstā,
- otrais cipars šajā skaitlī ir 4, kas ir divnieka pozīcija šajā skaitļa decimālajā pierakstā,
- trešais cipars šajā skaitlī ir 7, kas ir trijnieka pozīcija šajā skaitļa decimālajā pierakstā utt.

Pierādīt, ka lielisko skaitļu skaits ir pāra.

11. **uzdevums** Dota punktu kopa A_1, \dots, A_n Eiklīda plaknē. Daži no punktiem var sakrist, taču dotajā kopā ir vismaz 2 atšķirīgi punkti. Par *Baltijas ceļu* sauksim maršrutu caur punktu A_1, \dots, A_n permutāciju B_1, \dots, B_n , un Baltijas ceļa garums ir

$$|B_1B_2| + |B_2B_3| + \dots + |B_{n-1}B_n| + |B_nB_1|,$$

kur ar $|PQ|$ apzīmē nogriežņa PQ garumu.

Ar K un L apzīmēsim divu Baltijas ceļu garumus kādai n punktu kopai. Katram naturālam skaitlim n atrast izteiksmes K/L lielāko iespējamo vērtību visu iespējamo n punktu kopu starpā.

12. **uzdevums** Dots šaurleņķu trijstūris ABC , kuram $AB < AC$, un kura ievilktais riņķa līnijas centrs ir I un kura apvilkta riņķa līnija ir ω . Taisne AI krusto malu BC punktā D . Punkts T ir izvēlēts uz ω tā, ka $AT \parallel BC$. Taisne TI atkārtoti krusto ω punktā P un atkārtoti krusto apvilkto riņķa līniju punktā Q . Pierādīt, ka $AI = DQ$.

13. **uzdevums** Dots ievilkts četrstūris $ABCD$, kura malu AB un CD pagarinājumi krustojās punktā E . Punkts P izvēlēts $ABCD$ iekšpusē tā, ka

$$\angle BAP = \angle PCB \quad \text{un} \quad \angle CBP = \angle PDC.$$

Pierādīt, ka $PE \perp BC$.

14. **uzdevums** Dots šaurleņķu trijstūris ABC ar $AB < AC$, kura apvilkta riņķa līnija un ortocentrs ir attiecīgi ω un H . Punkts P atrodas uz loka \widehat{BAC} , ar īpašību, ka $\angle PCB + \angle ACB = 90^\circ$. Punkts R ir atlikts uz taisnes AC tā, ka $BR = CR$. Pierādīt, ka $\angle HPR = \angle ACB$.

15. **uzdevums** Dots dažādmalu šaurleņķu trijstūris ABC . Malas BC vidusperpendikuls krusto taisnes AC un AB attiecīgi punktus A_b un A_c . Analogiski definēsim punktus B_c, B_a, C_a un C_b . Pierādīt, ka trijstūru $ABC, A_bB_cC_a$, un $A_cB_aC_b$ apvilkto riņķa līniju centri atrodas uz vienas taisnes.

16. **uzdevums** Doti naturāli skaitļi a, b, c, n ar īpašību, ka $abc = 10^n - 1$. Ar $S(x)$ apzīmēsim skaitļa x decimāla pieraksta ciparu summu. Pierādīt, ka

$$S(a) + S(b^2) + S(c^4) \geq \sqrt[3]{243n}.$$

17. uzdevums Naturālu skaitli sauksim par *brīnumainu*, ja tā dalītājus var sadalīt divās kopās ar vienādu elementu kopējo summu un elementu skaitu.

Atrast visas iespējamās vērtības brīnumaina skaitļa pozitīvo dalītāju skaitam.

18. uzdevums Atrast visas funkcijas $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kurām $f(2) = 1$ un

$$\text{MKD}(f(a+b), f(b)) \mid \text{MKD}(a+f(b), b)$$

visiem naturāliem skaitļiem a, b .

Piezīme: Ar $\text{MKD}(x, y)$ apzīmē skaitļu x, y mazāko kopīgo dalāmo. Piemēram, $\text{MKD}(15, 21) = 105$.

19. uzdevums Sākumā uz tāfeles ir uzrakstīti 100 naturāli skaitļi. Chuhan spēlē spēli. Vienā gājienā Chuhan izvēlas 2 uz tāfeles uzrakstītus naturālus skaitļus a un b ar īpašību, ka $a \mid b$, nodzēš tos un to vietā uzraksta skaitli b/a . Viņš veic gājienu, līdz tas nav iespējams, un tad spēle beidzas.

Atrast lielāko naturālo skaitli N tādu, ka eksistē tāds spēles sākuma stāvoklis, ka Chuhan var:

- gan pabeigt spēli ar tikai vienu atlikušo skaitli,
- gan pabeigt spēli ar N atlikušiem skaitļiem.

20. uzdevums Atrast visus naturālus skaitļus n , kuriem eksistē skaitļu $1, \dots, n$ permutācija a_1, \dots, a_n ar īpašību, ka skaitļu $a_1, 2a_2, \dots, na_n$ atlikumi pēc moduļa n ir savstarpēji dažādi.