

Baltijas Ceļa atlasēs 2025 atrisinājumi

1. uzdevums Doti pozitīvi reāli skaitļi a , b , c un d , kuriem izpildās $a > c$ un $b < d$. Zināms, ka

$$a + \sqrt{b} \geq c + \sqrt{d} \quad \text{un} \quad \sqrt{a} + b \leq \sqrt{c} + d$$

Pierādīt, ka $a + b + c + d > 1$.

Atrisinājums. Pārrakstīsim dotās nevienādības sekojošā veidā

$$\begin{aligned} a + \sqrt{b} \geq c + \sqrt{d} &\implies a - c > \sqrt{d} - \sqrt{b} \\ \sqrt{a} + b \leq \sqrt{c} + d &\implies d - b > \sqrt{a} - \sqrt{c} \end{aligned}$$

Tā kā $a > c$ un $d > b$, tad abu nevienādību abas puses ir pozitīvas, tāpēc abas nevienādības var sareizināt, lai iegūtu, ka

$$\begin{aligned} (a - c)(d - b) &> (\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{d} - \sqrt{b}) \\ (\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{d} - \sqrt{b})(\sqrt{d} + \sqrt{b}) &> (\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{d} - \sqrt{b}) \\ (\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{d} + \sqrt{b}) &> 1, \end{aligned}$$

kur pēdējā solī mēs izdalījām abas nevienādības puses ar $(\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{d} - \sqrt{b}) > 0$.

Tā kā $a > c$, tad

$$\begin{aligned} a + c &> 2\sqrt{ac} \\ 2(a + c) &> a + c + 2\sqrt{ac} \\ a + c &> \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c})^2}{2} \end{aligned}$$

Analogiski iegūstam, ka $b + d > \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{d})^2}{2}$. Saskaitot abas nevienādības, iegūstam, ka

$$a + b + c + d > \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c})^2 + (\sqrt{b} + \sqrt{d})^2}{2}.$$

No AM - GM nevienādības izriet, ka

$$a + b + c + d > \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c})^2 + (\sqrt{b} + \sqrt{d})^2}{2} \geq (\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{d}) > 1$$

Esam ieguvuši, ka $a + b + c + d > 1$, kas arī bija jāpierāda.

2. uzdevums Dota naturālu skaitļu virkne a_1, a_2, \dots , kurai visiem naturāliem skaitļiem $n \geq 3$ izpildās

$$\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-2} a_n} = 1 - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2}.$$

Pierādīt, ka a_1, a_2, \dots ir Fibanoči skaitļu virkne.

Piezīme. Fibanoči skaitļu virkne ir naturālu skaitļu virkne, kurai izpildās $a_1 = a_2 = 1$ un $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ visiem $n \geq 3$.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka vienīgā virkne, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir Fibonači skaitļu virkne ($F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$), kur F_n ir Fibonači virknes n – tais elements.

Apgalvojums. Visiem naturāliem skaitļiem n izpildās $a_{n+1} = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2)}{a_n^2 a_{n-1}}$.

Pierādījums. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-2} a_n} &= 1 - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2} \\ \frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-2} a_n} + \frac{1}{a_{n-1} a_{n+1}} &= 1 - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2} \end{aligned}$$

Atņemot abas vienādības savā starpā, iegūstam, ka

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{n-1} a_{n+1}} &= \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2} - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \frac{a_n^2}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2)} \\ a_{n+1} &= \frac{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2)}{a_n^2 a_{n-1}}, \end{aligned}$$

kas arī bija jāpierāda.

Lemma 2. Fibonači skaitļiem izpildās vienādība $\sum_{i=1}^k F_i^2 = F_k F_{k+1}$.

Pierādījums. Pierādīsim šo faktu, izmantojot matemātiskās indukcijas principu.

Bāze. $k = 1, F_1^2 = 1 = 1 \cdot 1 = F_1 F_2$.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam $k = m$ izpildās, ka $\sum_{i=1}^m F_i^2 = F_m F_{m+1}$.

Induktīvā parēja. Pierādīsim to priekš $k = m + 1$, izmantojot induktīvo pieņēmumu:

$$\sum_{i=1}^{m+1} F_i^2 = \sum_{i=1}^m F_i^2 + F_{m+1}^2 = F_m F_{m+1} + F_{m+1}^2 = F_{m+1}(F_m + F_{m+1}) = F_{m+1} F_{m+2},$$

kas arī bija jāpierāda.

Tagad varam pierādīt, ka vienīgā virkne, kas apmierina uzdevuma nosacījumus ir Fibanoči skaitļu virkne.

Bāze. $n = 3$: No uzdevuma nosacījumiem, izriet, ka

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_3} &= 1 - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \\ \frac{1}{a_1 a_3} &= \frac{a_1^2 + a_2^2 - 1}{a_1^2 + a_2^2} \\ a_1 a_3 &= \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 + a_2^2 - 1} = 1 + \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 - 1} \end{aligned}$$

Tā kā $a_1 a_3$ ir naturāls skaitlis, tad secinām, ka $\frac{1}{a_1^2 + a_2^2 - 1}$ arī ir naturāls skaitlis. Tas ir iespējams tad un tikai tad, ja $a_1^2 + a_2^2 - 1 = 1$, kas nozīmē, ka $a_1 = a_2 = 1 = F_1 = F_2$, kā arī to, ka $a_3 = 2 = F_3$.

Indukcijas pieņēmums. Visiem $i \leq n$ izpildās $a_i = F_i$.

Induktīvā parēja. Pierādīsim to priekš $i = n + 1$. $i = n + 1$. No lemmas mēs zinām, ka

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i^2 &= \sum_{i=1}^m F_i^2 = F_n F_{n+1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} F_i^2 = F_{n-1} F_n \end{aligned}$$

No apgalvojuma izriet, ka

$$a_{n+1} = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2)}{a_n^2 a_{n-1}} = \frac{F_n F_{n+1} F_{n-1} F_n}{F_n^2 F_{n-1}} = F_{n+1},$$

kas arī bija jāpierāda.

3. uzdevums Zināms, ka pozitīvai reālu skaitļu virknei x_1, x_2, \dots visiem naturāliem skaitļiem $n \geq 1$ izpildās

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n + \frac{1}{4}} + \sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}}$$

Pierādīt, ka

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_{2025}} < \frac{1}{\sqrt{x_1}}$$

Atrisinājums. Vispirms pārrakstīsim doto sakarību kā

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \sqrt{x_n + \frac{1}{4}} + \sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}} \\ x_{n+1} - \sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}} &= x_n + \sqrt{x_n + \frac{1}{4}} \\ x_{n+1} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} &= x_n + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \\ \left(\sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2 &= \left(\sqrt{x_n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Tā kā virknes locekļi ir pozitīvi skaitļi, tad $\sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = 0$. Līdz ar to secinām, ka

$$\sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{x_n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \implies \sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}} = \sqrt{x_n + \frac{1}{4}} + 1.$$

Ievērosim, ka

$$\sqrt{x_n + \frac{1}{4}} = \sqrt{x_{n-1} + \frac{1}{4}} + 1 = \sqrt{x_{n-2} + \frac{1}{4}} + 2 = \dots = \sqrt{x_1 + \frac{1}{4}} + n - 1$$

katram naturālam skaitlim n . Kāpinot iegūtās sakarības abas puses kvadrātā, iegūstam, ka

$$\begin{aligned} x_n + \frac{1}{4} &= x_1 + \frac{1}{4} + 2(n-1)\sqrt{x_1 + \frac{1}{4}} + (n-1)^2 \\ x_n &= x_1 + 2(n-1)\sqrt{x_1 + \frac{1}{4}} + (n-1)^2 > x_1 + 2(n-1)\sqrt{x_1} + (n-1)^2 = (\sqrt{x_1} + n - 1)^2 \\ x_n &> (\sqrt{x_1} + n - 1)^2 > (\sqrt{x_1} + n - 1)(\sqrt{x_1} + n - 2) \\ \frac{1}{x_n} &< \frac{1}{(\sqrt{x_1} + n - 1)(\sqrt{x_1} + n - 2)}. \end{aligned}$$

Saskaitot iegūto nevienādību katram $n = 2, 3, \dots, 2025$, iegūstam teleskopisku summu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_{2025}} &< \frac{1}{\sqrt{x_1}(\sqrt{x_1} + 1)} + \frac{1}{(\sqrt{x_1} + 1)(\sqrt{x_1} + 2)} + \dots + \frac{1}{(\sqrt{x_1} + 2023)(\sqrt{x_1} + 2024)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_1} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x_1} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x_1} + 2} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x_1} + 2023} - \frac{1}{\sqrt{x_1} + 2024} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_1} + 2024} \\ &< \frac{1}{\sqrt{x_1}}, \end{aligned}$$

kas bija jāpierāda.

4. uzdevums Atrast visus reālos skaitļus a , kuriem eksistē funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kas definēta reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurai visiem reāliem skaitļiem x, y izpildās

$$x + af(y) \leq y + f(f(x))$$

Atrisinājums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālnevienādību. Aplūkosim visus iespējamus gadījumus.

1. gadījums: $a > 0$. No $P(0, y)$ un $P(y, 0)$ izriet attiecīgi, ka

$$\begin{aligned} af(y) &\leq y + f(f(0)) \\ y + af(0) &\leq f(f(y)) \end{aligned}$$

Aizvietojojot pirmajā nevienādībā y ar $f(y)$, iegūstam, ka

$$af(f(y)) \leq f(y) + f(f(0))$$

Reizinot nevienādību, ko mēs ieguvām no $P(y, 0)$, ar a , iegūstam, ka

$$\begin{aligned} ay + a^2 f(0) &\leq af(f(y)) \leq f(y) + f(f(0)) \\ a^2 y + a^3 f(0) &\leq af(y) + af(f(0)) \end{aligned}$$

Izmantojot $P(0, y)$, mēs varam iegūt, ka

$$a^2 y + a^3 f(0) \leq af(y) + af(f(0)) \leq y + f(f(0)) + af(f(0))$$

Tādā gadījumā

$$a^2 y + a^3 f(0) \leq y + (a + 1)f(f(0))$$

Ja $a > 1$, tad

$$(a^2 - 1)y + a^3 f(0) \leq (a + 1)f(f(0))$$

Bet pie pietiekami lieliem y kreisā puse kļūst lielāka par labo, iegūstam pretrunu. Ja $a < 1$, tad

$$a^3 f(0) \leq y(1 - a^2) + (a + 1)f(f(0))$$

Pie $y \rightarrow -\infty$ labā puse kļūst mazāka par kreiso – iegūstam pretrunu. Pie $a = 1$, acīmredzami, ka der funkcija $f(x) = x$.

2. gadījums: $a = 0$. Iegūstam, ka

$$x \leq y + f(f(x)),$$

kur pie $y \rightarrow -\infty$ labā puse kļūst mazāka par labo, tātad $a = 0$ neder.

3. gadījums. $-1 < a < 0$. Aplūkojam funkciju $f(x) = |\frac{x}{a}|$. Pierādīsim, ka tā apmierina uzdevuma nosacījumus. Vispirms pierādīsim, ka visiem reāliem skaitļiem y izpildās, ka $af(y) \leq y$, kas ir tas pats, kas pierādīt, ka $a|\frac{y}{a}| \leq y$. Ievērosim, ka kreisā puse ir nepozitīva, tātad, ja $y \geq 0$, tad nevienādība acīmredzami izpildās. Savukārt, ja $y < 0$, tad $\frac{y}{a} > 0 \implies |\frac{y}{a}| = \frac{y}{a}$. Tātad $a(\frac{y}{a}) = y$, no kā secinām, ka $y < 0$ un attiecīgi visiem y izpildās nevienādība. Tālāk pierādīsim, ka $x \leq f(f(x))$ visiem reāliem skaitļiem x . Ievērosim, ka mums pietiek pierādīt, ka $x \leq ||\frac{x}{a}|/a|$. Tā kā labā puse būs nenegatīva, tāpēc pie $x \leq 0$ nevienādība acīmredzami izpildās. Savukārt, ja $x > 0$, tad

$$||\frac{x}{a}|/a| = | -(\frac{x}{a})/a| = | -\frac{x}{a^2}| = \frac{x}{a^2}$$

Tas nozīmē, ka mums pietiek pierādīt, ka

$$x \leq \left| \frac{x}{a} \right| / |a| = \frac{x}{a^2} \implies \frac{x(a^2 - 1)}{a^2} < 0$$

Tā kā pēc pieņēmuma $x > 0$ un $-1 < a < 0$, tad pēdējā nevienādība ir acīmredzami patiesa. Saskaitot nevienādības $af(y) \leq y$ un $x \leq f(f(x))$ iegūstam, ka $x + af(y) \leq y + f(f(x))$. Secinām, ka $-1 < a < 0$ apmierina uzdevuma nosacījumus.

4. gadījums: $a \leq -1$. Aplūkojam funkciju $f(x) = |x|$. Mums acīmredzami izpildās $x \leq f(f(x)) = ||x|| = |x|$. Atliek pierādīt, ka

$$af(y) \leq y \implies a|y| \leq y$$

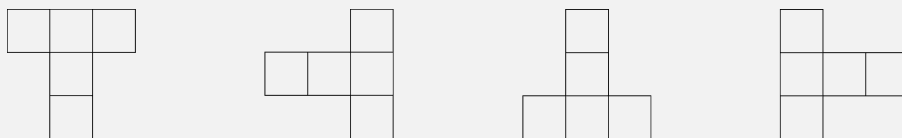
Pie $y \geq 0$ pēdējā nevienādība acīmredzami izpildās izpildās, jo kreisā puse ir nepozitīva. Savukārt, ja $y < 0$, tad

$$a|y| \leq y \implies -ay \leq y \implies 0 \leq y(a + 1)$$

Tā kā $a + 1 < 0$ un $y < 0$, tad pēdējā nevienādība ir patiesa. Secinām, ka pie visiem y izpildās nevienādība. Saskaitot pierādītās nevienādības, secinām, ka $a \leq -1$ der.

Apvienojot iegūtās atbildes, secinām, ka der $a = 1$ un $a < 0$.

5. uzdevums Dots $n \times n$ rūtiņu laukums, kur $n \geq 3$, un katra rūtiņa var būt iekrāsota melna vai balta. Katrā gājienā mēs varam samainīt uz pretējo krāsu piecas rūtiņas, kas veido vienu no šādām *pentomino* figūrām:



Sākumā, visas rūtiņas ir Baltas. Noteikt, kuriem n ir iespējams (ar šādiem gājieniem) nokrāsot visas rūtiņas melnas.

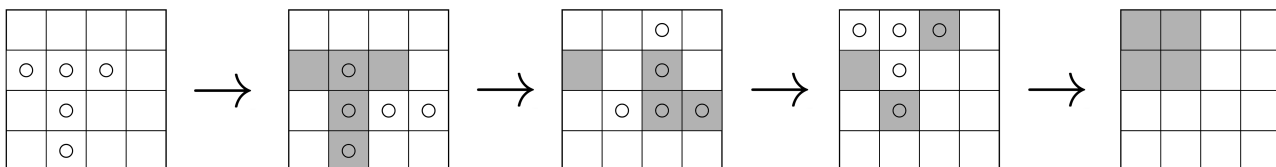
Atrisinājums. Prasīto ir iespējams panākt, kad n dalās ar 2 vai 3, izņemot $n = 3$.

Vispirms pierādīsim, ka $n = 3$ neder. Aplūkojam rūtiņas A, B un M zīmējumā.

	B	
A	M	

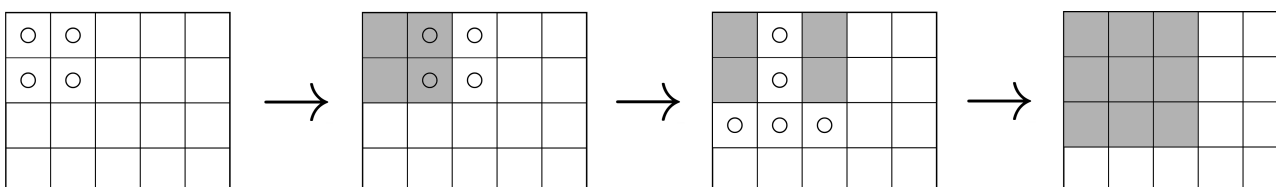
Katrs pentomino satur rūtiņu M un vienu no rūtiņām A vai B . Tā kā gan A , gan B vajag izvēlēties nepāra skaitu reizi, lai šīs abas rūtiņas būtu melnas, tad M tiks izvēlēts nepāra + nepāra = pāra skaitu reizi. Tātad rūtiņa M būs balta, kas nozīmē, ka visas rūtiņas nevar vienlaicīgi būt melnas.

Tagad pieņemsim, ka $n \geq 4$. Ja n dalās ar 2, tad mēs varam pielietot sekojošu algoritmu



Tā kā n dalās ar 2, tad rūtiņu laukumu var sadalīt 2×2 kvadrātos, kuru kopējais skaits būs $(\frac{1}{2}n)^2$. Tā kā $n \geq 4$, mēs varam atrast 4×4 kvadrātu ap katru 2×2 kvadrātu, kur pielietot iepriekš parādīto algoritmu, kas nozīmē, ka mēs varēsim panākt, ka visas rūtiņas būs melnas.

Ja n dalās ar 3 un $n \neq 3$, tad $n \geq 6$. Šajā gadījumā mēs varam pielietot sekojošu algoritmu



Tā kā n dalās ar 3, tad rūtiņu laukumu var sadalīt 3×3 kvadrātos, kuru kopējais skaits būs $(\frac{1}{3}n)^2$. Ievērosim, ka tā kā $n \geq 6$, tad mēs varam atrast 4×5 laukumu ap katru 3×3 kvadrātu, kur pielietot algoritmu, kas nozīmē, ka mēs varēsim panākt, ka visas rūtiņas ir melnas.

Tagad pieņemsim, ka n nedalās ar 2 un n nedalās ar 3. Tādā gadījumā mēs nosaucam visas rūtiņas 1., 4., 7., ... kolonnās kā A , 2., 5., 8., ... rindās kā B un 3., 6., 9., ... rindās kā C .

Katrs pentomino vienmēr sastāv no 3 viena burta rūtiņām un pa 1 rūtiņai no pārējiem diviem burtiem. Tātad, ja a, b un c ir melno rūtiņu skaits starp attiecīgi A, B un C rūtiņām, tad pēc katra gājiena a, b un c izmainās par nepāra skaitli. No tā secinām, ka skaitļu a, b un c paritāte vienmēr būs vienāda.

Pieņemsim, ka mēs nonākam situācijā, kur visas rūtiņas ir izkrāsotas melnas. Ievērosim, ka, tā kā n nedalās ar 3, tad A rūtiņu skaits ir par n lielāks nekā C rūtiņu skaits, tātad $a = c + n$ jeb $a - c = n$. Mēs parādījām, ka a un c ir vienāda paritāte, tātad $a - c$ būs pāra skaitlis, taču n nedalās ar 2 pēc pieņēmuma – pretruna.

6.uzdevums Dota punktu kopa Dekarta koordinātu plaknē $M = \{(x, y) \mid x + y \leq 2025, x, y \in \mathbb{N}\}$. Zināms, ka katrs punkts tiek krāsots vienā no trīs krāsām. Pierādīt, ka eksistē vienādsānu taisnleņķa trijstūris, kurams visas virsotnes ir vienā krāsā un kura, divas malas ir paralēlas x un y asīm un hipotenūza paralēla taisnei $x + y = 2025$.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka tāds trijstūris neeksistē.

Apskatīsim punktus, kas atrodas uz taisnes $x + y = 2025$. Pēc Dirihlē principa vismaz $\lceil \frac{2024}{3} \rceil = 675$ punkti ir vienādi krāsoti. Nosauksim šo krāsu par *pirmo* krāsu un apzīmēsim pirmos 675 *pirmās* krāsas punktus uz $x + y = 2025$ kā A_1, A_2, \dots, A_{675} pēc augošās abscisas.

Apgalvojums. Eksistē vismaz 131 dažādas i vērtības, kur $i \in \{1, 2, \dots, 674\}$, ka $A_i A_{i+1} = c$, kur c ir kaut kāda konstante.

Pierādījums. Ievērosim, ka $A_1 A_{675} \leq 2023\sqrt{2}$. Pieņemot pretējo, ka neeksistē vismaz 131 tādas i vērtības, tad

$$\begin{aligned} A_1 A_{675} &= A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_{674} A_{675} \geq \\ &\geq 130\sqrt{2} + 130 \cdot 2\sqrt{2} + 130 \cdot 3\sqrt{2} + 130 \cdot 4\sqrt{2} + 130 \cdot 5\sqrt{2} + 24 \cdot 6\sqrt{2} = \\ &= 2094\sqrt{2} > 2023\sqrt{2}, \end{aligned}$$

kas ir pretruna. Līdz ar to apgalvojums ir pierādīts.

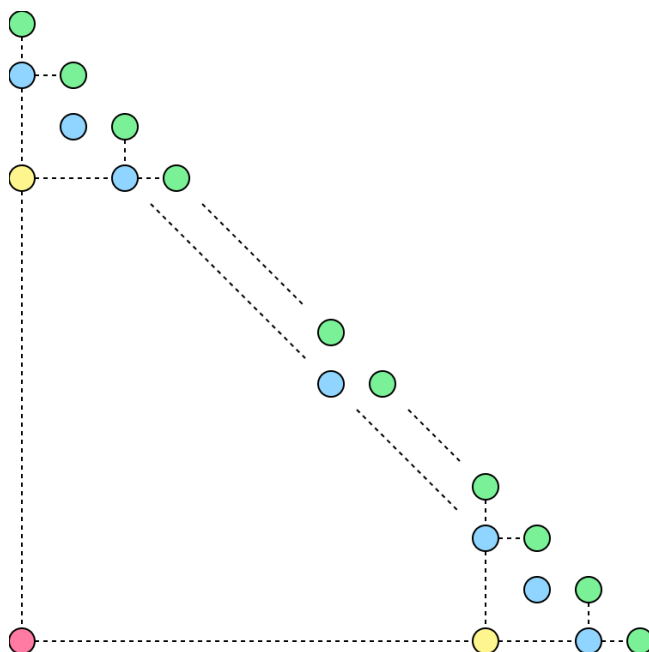


Figure 1: Zaļie punkti - A_i , zilie - C_i , dzeltenie - D_1 un D_2 , sarkanais - punkts E

Tālāk apskatīsim punktus B_1, B_2, \dots, B_{131} pēc augošās abscisas, katrs no kuriem veido taisnleņķa trijstūri ar $A_i A_{i+1}$ kādai i vērtībai. Viegli redzēt, ka visi B_j atrodas uz vienas taisnes, kas ir paralēla taisnei $x + y = 0$. Pēc mūsu pieņēmuma neviens no B_j nav krāsots ar *pirmo* krāsu. Taču pēc Dirihlē principa vismaz $\lceil \frac{131}{2} \rceil = 66$ no tiem ir vienādi krāsoti. Nosauksim šo krāsu par *otro* krāsu un apzīmēsim pirmos 66 *otrās* krāsas punktus uz taisnēm, kas ir paralēlas taisnei $x + y = 0$, kā C_1, C_2, \dots, C_{66} pēc augošās abscisas.

Apgalvojums. Eksistē $n \neq m$, ka $C_n C_{n+1} = C_m C_{m+1}$.

Pierādījums. Novērojam, ka $C_1 C_{66} \leq B_1 B_{131} \leq 2022\sqrt{2}$. Pieņemsim pretējo, tad mums ir

$$\begin{aligned} C_1 C_{66} &= C_1 C_2 + C_2 C_3 + \cdots + C_{65} C_{66} \geq \\ &\geq \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \cdots + 65\sqrt{2} = 2145\sqrt{2} > \\ &> 2022\sqrt{2}, \end{aligned}$$

kas ir pretruna. Līdz ar to apgalvojums ir pierādīts.

Apskatīsim punktus D_1 un D_2 , kuri attiecīgi ar $C_n C_{n+1}$ un $C_m C_{m+1}$ veido taisnleņķa trijstūri. Redzam, ka punkti D_1, D_2 atrodas uz $x + y = p$ kaut kādai p vērtībai. Novērojam, ka pēc mūsu pieņēmuma abi punkti nevar būt krāsoti ar *pirmo* vai *otro* krāsu, jo savādāk tie veidotu vienkrāsainu vienādsānu taisnleņķa trijstūri ar kādiem no C vai A punktiem. Nosauksim punktu D_1, D_2 krāsu par *trešo* krāsu un apskatām punktu E , kurš ar $D_1 D_2$ veido vienādsānu taisnleņķa trijstūri, $\angle D_1 E D_2 = 90^\circ$ un atrodas zem $x + y = p$. Redzam, ka vienalga vai punkts E ir krāsots ar *pirmo*, *otro* vai *trešo* krāsu, tas veidos vienkrāsainu vienādsānu taisnleņķa trijstūri ar kādiem no A, C vai D punktiem. Līdz ar to pieņēmums, ka tāds trijstūris neeksistē, ir aplams, un uzdevums ir pierādīts.

7.uzdevums Dots naturāls skaitlis n . Baltijas jūrā atrodas n salas, kuras savieno $n - 1$ tilti tā, ka no katras salas var nokļūt jebkurā citā salā. Kādā pēcpusdienā uz vienas salas izceļas ugunsgrēks. Katru rītu uguns izplatās uz visām blakus salām (salām, kas savienotas ar tiltu ar jau degošo salu). Lai ierobežotu ugunsgrēku, katru vakaru tiek uzspridzināts viens tilts, kamēr ugunīm ir vēl iespēja izplatīties tālāk. Apzīmēsim ar X minimālo tiltu skaitu, kas jāuzspridzina, lai ugunsgrēku pilnībā ierobežotu (t.i., lai nebūtu neviena tilta, kas savieno degošu un nedegošu salu). Atrast lielāko iespējamo X vērtību starp visām iespējamiem salu un tiltu izkārtojumiem.

Atrisinājums. Atbilde: $\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$.

Sākumā pierādīsim, ka lielākā iespējama X vērtība ir vismaz $\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$.

Apzīmēsim $k = \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$. Sanāk, ka $k^2 + 1 \leq n \leq (k+1)^2$. Vispirms aplūkosim gadījumu, kad $n = k^2 + 1$. Izvietojam k^2 salas kā $k \times k$ režģi, un katrā rindā horizontāli savienojam kaimiņus. Katru salu no pirmās kolonnas savienojam ar atlikušo salu (mezglu), un apskatīsim gadījumu, kad ugunsgrēks sāksies mezglā.

Ievērojam, ka pēc $\ell < k$ naktīm ir vismaz $k - \ell > 0$ rindas, kurās līdz šim nav uzspridzināts neviens tilts. Nākamajā rītā katrā no šīm rindām izdegs ℓ -tā sala, un joprojām paliks tilts uz $(\ell + 1)$ -to salu šajā rindā, ko būs jāuzspridzina. Tā kā vienā naktī drīkst uzspridzināt tikai vienu tiltu un vienā sprādzienā var atslēgt tikai vienu rindu, kopā nepieciešami vismaz k spridzinājumi.

Bet ja $k^2 + 1 < n \leq (k+1)^2$, paņemam iepriekšējo konfigurāciju uz $k^2 + 1$ salām un atlikušo $n - (k^2 + 1) \leq 2k + 1$ salu savienojam ar mezgla salu. Argumentam par rindām nekas nemainās, tātad arī šeit $X \geq k = \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$.

Tagad parādīsim, ka jebkurai konfigurācijai ar n salām $X \leq \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$. Izmantosim šādu stratēģiju: katru nakti spridzinām tiltu, kura pārraušana atdala no uguns visvairāk salu. Pēc katras nakts sapludinām visas degošās salas vienā “virsotnē” un “aizmirstam” salas, kas ir pilnībā nogrieztas no uguns. Tādējādi iegūstam jaunu konfigurāciju ar mazāku salu skaitu un jaunu uguns sākumpunktu. Pierādījumu veiksime pēc indukcijas pa $k = \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$.

Bāze. Ja $k = 0$, tad $n = 1$ un tiltu nav – spridzinājumi nav vajadzīgi.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka visām konfigurācijām ar ne vairāk kā k^2 salām pietiek ar $k - 1$ spridzinājumiem.

Induktīvā parēja. Apskatām patvaļīgu konfigurāciju ar $n \leq (k+1)^2$ salām. Salas ar tiltiem veido saistītu grafu ar n virsotnēm un $n - 1$ malām, tātad tas ir koks. Sakni liekam tajā virsotnē, kas šobrīd deg. Pieņemsim, ka šīs saknes pakāpe ir d . Pēc Dirihlē principa vismaz vienā no zariem ir vismaz $\frac{n-1}{d}$ salas. Izvēloties naktī spridzināt tieši šo malu (pēc mūsu stratēģijas tieši tā arī notiek), mēs atdalām vismaz $\frac{n-1}{d}$ salas. Nākamajā rītā uguns izplatās pa atlikušajām $d - 1$ tiltiem uz vēl $d - 1$ salām. Tātad no rītā paliek ne vairāk kā

$$n - \frac{n-1}{d} - (d-1) = n + 1 - \frac{n-1}{d} - d \leq n + 1 - 2\sqrt{n-1} = (\sqrt{n-1} - 1)^2 + 1 < k^2 + 1$$

salas, kur mēs izmantojām $\frac{n-1}{d} + d \geq 2\sqrt{n-1}$ un $\sqrt{n-1} < k + 1$, jo $n \leq (k+1)^2$. Tātad pēc pirmā spridzinājuma paliek konfigurācija ar ne vairāk kā k^2 salām, kurai pēc indukcijas pieņēmuma pietiek ar vēl $k - 1$ spridzinājumiem, kas nozīmē, ka kopā pietiek ar $1 + (k - 1) = k$ spridzinājumiem, kas pierāda prasīto.

8.uzdevums Aspazija, K. Barons un A. Čaks spēlē spēli. Spēles sākumā katram no viņiem ir kaudze ar 2024 grāmatām. Aspazija veic pirmo gājieni, K. Barons — otro, A. Čaks — trešo, un viņi turpina veikt gājienu tajā pašā secībā. Katru gājieni spēlētājs izvēlas pozitīvu veselu skaitli n , kas ir lielāks par jebkuru kāda cita spēlētāja iepriekš izvēlētu skaitli, paņem $2n$ grāmatas no savas kaudzes un sadala tās vienlīdzīgi pārējiem diviem spēlētājiem. Ja spēlētājs nevar veikt gājieni, spēle beidzas, un tas spēlētājs zaudē spēli. Noteikt visus spēlētājus, kuriem ir tāda stratēģija, ka, neatkarīgi no tā, kā spēlē pārējie divi, viņi nezaudēs spēli.

Atrisinājums. Apzīmēsim spēlētājus ar A (Aspazija), B (K. Barons), C (A. Čaks) un viņu grāmatu skaitus ar attiecīgi a , b , c . Spēles sākumā $a = b = c = 2024$. Katrs gājieni prasa izvēlēties n , kas ir lielāks par visu iepriekšējo pretinieku izvēlētajām n vērtībām, un tad $a \rightarrow a - 2n$, $b \rightarrow b + n$, $c \rightarrow c + n$, pieņemot, ka šis ir spēlētāja A gājieni (analogiski, ja ir cita spēlētāja gājieni). Spēlētājs A nevar veikt gājieni, ja $a < 2n$ (analogiski citiem spēlētājiem).

Pierādīsim, ka tikai C var garantēt, ka nezaudēs spēli neatkarīgi no tā, kā spēlē pārējie divi spēlētāji.

C izdzīvošana. Spēlētājs C spēlēs pēc sekojošas stratēģijas – katrā savā gājienā izvēlēsies mazāko iespējamo n , kas tajā brīdī ir iespējams. Pierādīsim ar matemātisko indukciju sekojošu apgalvojumu: pēc $3k$ gājieniem (katrs veicis k gājienu) $b = c + 3k$ un spēlētājs C nav zaudējis.

Bāze ($k = 0$): Acīmredzami, ka $b = c = 2024$.

Induktīvais pieņēmums: $b = c + 3k$ un spēlētājs C nav zaudējis.

Induktīvā pāreja: Spēlētājs A izvēlas $d \geq 3k + 1$ (tā kā iepriekšējā gājienā C izvēlējās $n \geq 3k$). Spēlētājs B izvēlas $d + e$ ($e \geq 1$), tad spēlētājs C izvēlas $d + e + 1$. Grāmatu izmaiņas:

Gājieni	A	B	C
$3k$	a	b	$b - 3k$
$3k + 1$ (d)	$a - 2d$	$b + d$	$b - 3k + d$
$3k + 2$ ($d + e$)	$a - d + e$	$b - d - 2e$	$b - 3k + 2d + e$
$3k + 3$ ($d + e + 1$)	$a + 2e + 1$	$b - e + 1$	$b - 3k - e - 2$

Pēc $3(k + 1)$ gājiena redzam, ka $b' = b - e + 1$, $c' = b - 3k - e - 2$, tātad $b' = c' + 3(k + 1)$. Ja $c' < 0$, tad $b < 3k + e + 2$. Taču, ja spēlētājs B nav zaudējis, tad $b \geq d + 2e \geq 3k + 1 + 2e$, tātad $b \geq 3k + 2e + 1 \geq 3k + e + 2 > b$, jo $e \geq 1$ — pretruna. Tātad spēlētājs C izdzīvo, kas arī bija jāpierāda.

B zaudēšana. Spēlētājs A sāk savā pirmā gājienā ar $n = 1$ un spēlētāji A un C spēlē pēc stratēģijas, kur izvēlās mazāko iespējamo n pēc sava pretinieka gājiena. Pierādīsim ar matemātisko indukciju sekojošu apgalvojumu visiem $0 \leq k \leq 673$: pēc $3k + 1$ gājieniem $a = 2022 - 3k$, $b = 2025 + 3k$, $c = 2025$ un spēlētāji A un C nav zaudējuši.

Bāze ($k = 0$): Pēc 1. gājiena spēlētāju grāmatu skaits ir attiecīgi $a = 2022$, $b = 2025$, $c = 2025$.

Induktīvais pieņēmums: Pēc $3k + 1$ gājieniem, kur $0 \leq k \leq 674$, izpildās $a = 2022 - 3k$, $b = 2025 + 3k$, $c = 2025$ un spēlētāji A un C nav zaudējuši.

Induktīvā pāreja: Pieņemsim, ka spēlētājs B izvēlas $f \geq 3k + 2$ kā savu n vērtību. Tad spēlējās C izvēlas $f + 1$, savukārt spēlētājs A izvēlas $f + 2$ kā savu n vērtību. Grāmatu izmaiņas:

Gājieni	A	B	C
$3k + 1$	$2022 - 3k$	$2025 + 3k$	2025
$3k + 2$ (f)	$2022 - 3k + f$	$2025 + 3k - 2f$	$2025 + f$
$3k + 3$ ($f + 1$)	$2022 - 3k + 2f + 1$	$2025 + 3k - f + 1$	$2025 - f - 2$
$3k + 4$ ($f + 2$)	$2022 - 3k - 3$	$2025 + 3k + 3$	2025

Pierādīsim, ka spēlētāji A un C nezaudēs visiem $k \leq 673$. Pierādīsim to no pretējā. Ja kāds no spēlētājiem A vai C zaudētu attiecīgi $3k + 3$ vai $3k + 4$ gājienā, tad spēlētājs B nav zaudējis pirms viņiem, kas nozīmē, ka $2025 + 3k \geq 2f$. Tā kā $f \geq 3k + 2$, tad

$$2025 + 3k \geq 2f \geq f + 3k + 2 \implies 2025 \geq f + 2 \implies 2023 \geq f.$$

Līdz ar to, $2025 - f - 2 \geq 0$, kas nozīmē, ka C nezaudē. Kā arī A nezaudē, jo $2022 - 3k - 3 \geq 2022 - 3 \cdot 673 - 3 = 0$ – pretruna. Tādējādi, ja B kādā brīdī nezaudēs, tad spēlē turpinās līdz $k = 674$: pēc 2023 gājieniem $b = 2025 + 3 \cdot 694 = 4047 < 4048 = 2 \cdot 2024$. taču mazākais skaitlis, ko viņš var izvēlēties ir 2024, kas nozīmē, ka B nevar izdarīt gājienu 2024 un zaudē.

A zaudēšana. B un C spiesti minimāli, bet pielāgo beigās. Induktīvi: pēc $3k$ gājieniem ($k \leq 673$) $a = 2024 + 3k$, $b = 2024$, $c = 2024 - 3k$. Bāze acīmredzama. A izvēlas $g \geq 3k + 1$. $B - g + 1$, $C - g + 2$. Izmaiņas:

Gājieni	A	B	C
$3k$	$2024 + 3k$	2024	$2024 - 3k$
$3k + 1$ (g)	$2024 + 3k - 2g$	$2024 + g$	$2024 - 3k + g$
$3k + 2$ ($g + 1$)	$2024 + 3k - g + 1$	$2024 - g - 2$	$2024 - 3k + 2g + 1$
$3k + 3$ ($g + 2$)	$2024 + 3k + 3$	2024	$2024 - 3k - 3$

Pierādīsim, ka ja A nezaudē, tad arī B un C nezaudē. Vispirms pamanīsim, ka C nezaudēs, jo $2024 - 3k - 3 \geq 0$, jo $k \leq 673$. Tagad ja $g = 3k + 1$, tad B nezaudē, jo $2024 - g - 2 = 2021 - 3k \geq 0$, jo $k \leq 673$. Taču ja $g \geq 3k + 2$ un A nezaudē, tas ir, $2024 + 3k - 2g \geq 0$, tad B nezaudē, jo $2024 - g - 2 \geq 2024 + 3k - 2g \geq 0$.

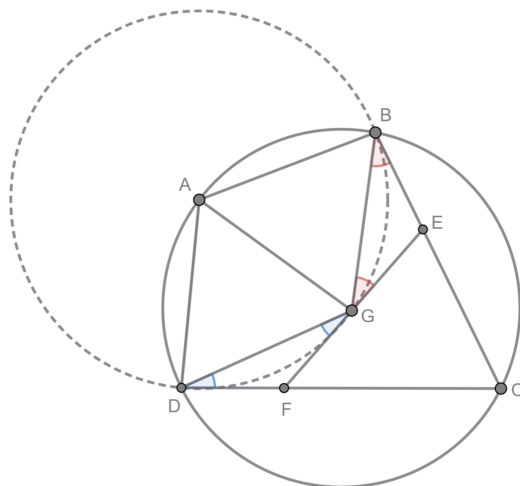
Tādējādi, ja A kādā brīdī nezaudēs, tad spēlē turpinās līdz $k = 673$: pēc 2019 gājieniem $a = 4043$, $b = 2024$, $c = 5$. Pēc spēlēs nosacījumiem A tagad drīkst izvēlēties 2020 vai 2021. Apskatīsim abus gadījumus:

Gājieni	A	B	C	Gājieni	A	B	C
2019	4043	2024	5	2019	4043	2024	5
2020 (2020)	3	4044	2025	2020 (2021)	1	4045	2026
2021 (2021)	2024	2	4046	2021 (2022)	2023	1	4048
2022 (2023)	4047	2025	0	2022 (2024)	4047	2025	0

Redzam, ka lai A izdarītu 2023. gājienu, viņam ir jāizvēlas skaitlis, kas nav lielāks par 2023, bet abos gadījumos viņam tādas iespējas nav, kas nozīmē, ka viņš zaudē.

9.uzdevums Dots riņķa līnijā ievilkts četrstūris $ABCD$, kuram izpildās $AB = AD$. Punkti E un F atrodas uz malām BC un CD tā, ka $BE + DF = EF$. Pierādīt, ka $\angle BAD = 2\angle EAF$.

Atrisinājums.



Definēsim punktu G uz EF , kuram izpildās, ka $DF = FG$. Ievērosim, ka tādā gadījumā

$$EB = EF - DF = EF - FG = GE$$

Apzīmēsim $\angle FDG = \alpha$ un $\angle EBG = \beta$. Ievērosim, ka $\angle FDG = \angle FGD = \alpha$, jo $DF = FG$, un analogiski $\angle EBG = \angle EGB = \beta$. No četrstūra $ADGB$ leņķu summas seko, ka

$$\begin{aligned} \angle DAB + \angle DGB + \angle ABG + \angle ADG &= 360^\circ, \\ \angle DAB + (180^\circ - \alpha - \beta) + (\angle ABC - \beta) + (\angle ADC - \alpha) &= 360^\circ, \\ \angle DAB &= 180^\circ - (\angle ABC + \angle ADC) + 2\alpha + 2\beta = 2\alpha + 2\beta, \end{aligned}$$

kur pēdējā sakarībā mēs izmantojam to, ka $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, jo ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju. Tā kā $\angle DGB = 180^\circ - \alpha - \beta$, tad

$$\angle DAB = 360^\circ - 2\angle DGB.$$

Tā kā $AD = AB$ un $360^\circ - \angle DAB = 2\angle DGB$, tad punkts A ir trijstūra DGB apvilktās riņķa līnijas, līdz ar to $AB = AG = AD$. Tas nozīmē, ka $\triangle ADF = \triangle AGF$ un $\triangle AGE = \triangle ABE$ pēc pazīmēs mmm . Secinām, ka $\angle DAF = \angle FAG$ un $\angle GAE = \angle BAE$, no kurienes izriet, ka $\angle BAD = 2\angle FAG + 2\angle EAG = 2\angle EAF$, kas arī bija jāpierāda.

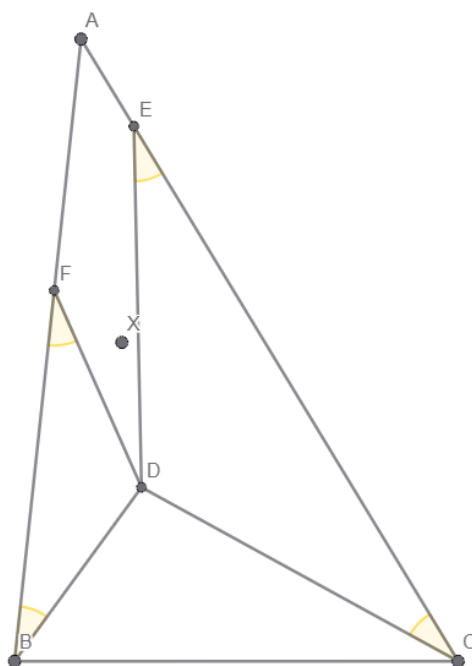
10. uzdevums Dots dažādmalu trijstūris ABC . Punkts D ir izvēlēts tā iekšpusē tā, ka $\angle DBA = \angle DCA$. Punkti E un F atrodas uz malām AC un AB ar īpašību, ka $DE = DC$ un $DB = DF$. Vai ir iespējams, ka taisnes AD , BE , CF krustojas vienā punktā?

Atrisinājums. Ievērosim, ka

$$DE = DC \implies \angle DEC = \angle DCE = \angle DCA$$

$$DB = DF \implies \angle DFB = \angle DBF = \angle DBA$$

No dotā izriet, ka $\angle DBA = \angle DCA$, tāpēc secinām, ka $\angle DEC = \angle DCE = \angle DBF = \angle DFB$. Tā kā $\angle DBF = \angle DEC$, tad četrstūris $ABDE$ ir ievilkts. Analogiski arī četrstūris $ACDF$ ir ievilkts.



Tālāk pieņemsim, ka taisnes AD , BE , CF ir iespējams krustoties vienā punktā. Nosauksim šo punktu par X . No punkta pakāpes izriet, ka

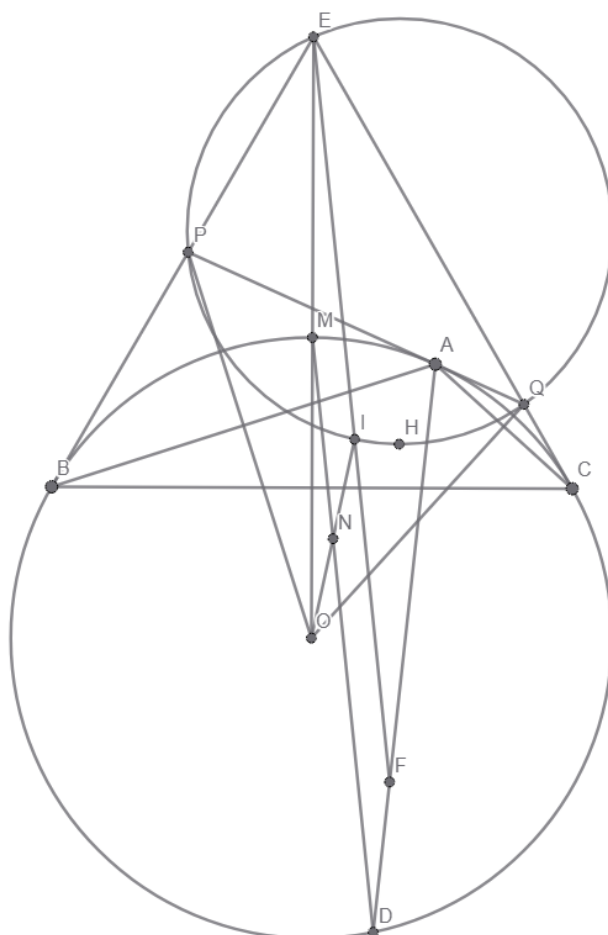
$$BX \cdot XE = AX \cdot XD$$

$$CX \cdot XF = AX \cdot XD$$

Līdz ar to $BX \cdot XE = CX \cdot XF$, kas savukārt nozīmē, ka punkti B, C, E, F atrodas uz vienas riņķa līnijas. Atcerēsimies, ka punkts D ir nogriežņa BF un CE vidusperpendikula krustpunkts, kas nozīmē, ka punkts D ir ap četrstūra $BCEF$ apvilktās riņķa līnijas centrs, tātad mums ir $DB = DC = DE = DF$.

Tā kā trijstūris BDC ir vienādsānu, tad mums ir $\angle DBC = \angle DCB$. Turklāt pēc dotā $\angle DBA = \angle DCA$, līdz ar to $\angle ABC = \angle ACB$, jeb trijstūris ABC ir vienādsānu. Taču pēc dotā trijstūris ABC ir dažādmalu, tāpēc mūsu pieņēmums ir aplams, un taisnes AD , BE , CF nevar krustoties vienā punktā.

11.uzdevums Dots trijstūris ABC , kuram $\angle BAC = 120^\circ$. Punkts O ir tā apvilktās riņķa līnijas centrs. Pieskare, kas trijstūra ABC apvilktajai riņķa līnijai novilkta punktā A , krusto pieskares, kas tai novilkta punktos B un C , attiecīgi punktos P un Q . Punkti H un I ir attiecīgi trijstūra $\triangle OPQ$ augstumu krustpunkts un ievilktais riņķa līnijas centrs. Punkti M un N ir attiecīgi loka BAC un nogriežņa OI viduspunkti. Taisne MN krusto trijstūra ABC apvilktā riņķa līniju punktā D . Pierādīt, ka taisne AD ir perpendikulāra taisnei HI .



Atrisinājums. Definēsim taisņu BP un CQ krustpunktu E . Tā kā $BE = CE$, $BM = CM$ un $OB = OC$, tad secinām, ka punkti O, M, E atrodas nogriežņa BC vidusperpendikula, jeb tie atrodas uz vienas taisnes. Tā kā pēc dotā $\angle BAC = 120^\circ$, tad

$$\angle BOC = 2 \cdot (180^\circ - \angle BAC) = 120^\circ$$

$$\angle BEC = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \angle BOC = 60^\circ$$

$$\angle POQ = \angle POA + \angle QOA = \frac{1}{2} \angle AOB + \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \angle BOC = 60^\circ$$

No sākuma pierādīsim, ka $EI \parallel MN$. Novērojam, ka trijstūrī EBO mums ir $\angle EBO = 90^\circ$, $\angle BEO = 30^\circ$, līdz ar to

$$EO = 2BO = 2MO \implies EM = MO$$

Tā kā punkts M ir nogriežņa EO viduspunkts, un punkts N ir nogriežņa OI viduspunkts, tad secinām, ka $EI \parallel MN$, jo MN ir trijstūra EIO viduslīnija.

Pagarinām EI līdz F , kas atrodas uz taisnes AD . Novērojam, ka, lai pierādītu, ka $AD \perp IH$, mums pietiek pierādīt, ka $\angle HIF + \angle AFE = 90^\circ$. Tā kā $EI \parallel MN$, tad $\angle ADM = \angle AFE$, tāpēc mums pietiek pierādīt, ka

$$\angle HIF + \angle ADM = 90^\circ \implies 180^\circ - \angle HIE + \angle ADM = 90^\circ \implies \angle HIE - \angle ADM = 90^\circ$$

Tagad parādīsim, ka punkti E, P, I, H, Q atrodas uz vienas riņķa līnijas. Novērojam, ka $\angle PIQ = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle POQ = 120^\circ$, un $\angle PHQ = 180^\circ - \angle POQ = 120^\circ$, un atcerēsimies, ka $\angle PEQ = \angle BEC = 60^\circ$, tad secinām, ka punkti E, P, I, H, Q atrodas uz vienas riņķa līnijas, jo no iegūtajām leņķu sakarībām izriet, ka ap četrstūri $PIHQ$ un $PEQI$ var apvilkt riņķa līnijas.

Līdz ar to $\angle HIE = \angle HPE$. Turklāt mums ir $HP \perp QO$, $PE \perp OB$, tad

$$\angle HIE = \angle HPE = \angle BOQ = \angle BOC - \angle COQ = 120^\circ - \angle COQ$$

un

$$\angle ADM = \frac{1}{2}\angle AOM = \frac{1}{2}(\angle COM - \angle AOC) = 30^\circ - \angle COQ$$

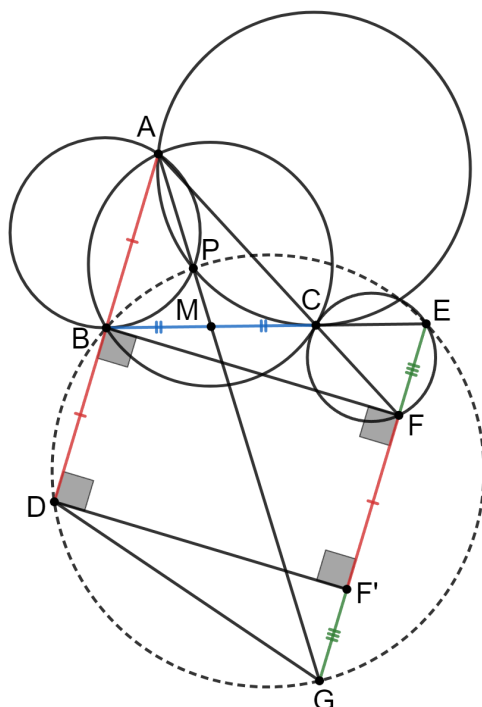
Tātad

$$\angle HIE - \angle ADM = 120^\circ - \angle COQ - 30^\circ + \angle COQ = 90^\circ$$

un uzdevums ir pierādīts.

12.uzdevums Dots trijstūris ABC . Uz mediānas, kas vilkta no virsotnes A ir izvēlēts punkts P ar īpašību, ka $\angle BPC = 180^\circ - \angle BAC$. Uz taisnes AB ir izvēlēts punkts $D \neq A$ tā, ka $AB = BD$, savukārt uz taisnes AC ir izvēlēts punkts F tā, ka $\angle ABF = 90^\circ$. Trijstūra DBP apvilkta riņķa līnija krusto taisni BC punktā $E \neq B$. Pierādīt, ka trijstūru CEF un ABC apvilktais riņķa līnijas pieskaras viena otrai.

Uzdevuma autors: Alfrēds Saročinskis, Kims Georgs Pavlovs



Atrisinājums (Alfrēds). Vispirms pierādīsim sekojošo apgalvojumu.

Apgalvojums. Trijstūru ABP un APC apvilktais riņķa līnijas pieskaras taisnei BC .

Pierādījums. Ar P' apzīmēsim riņķa līnijas, kas iet caur punktiem A, B un pieskaras taisnei BC , krustpunktu ar riņķa līniju, kas iet caur punktiem A, C un pieskaras taisnei BC . Pamanīsim, ka $\angle BAP' = \angle P'BC$ un $\angle P'AC = \angle BCP'$. No tā izriet, ka

$$\angle BPC = 180^\circ - \angle P'BC - \angle BCP' = 180^\circ - \angle BAP' - \angle P'AC = 180^\circ - \angle BAC$$

Apzīmēsim $AP' \cap BC = M$. Tad no punkta M pakāpes izriet

$$BM^2 = MP \cdot MA = MC^2$$

Tas nozīmē, ka AP' ir A - mediāna un ka $\angle BPC' = 180^\circ - \angle BAC$, kas nozīmē, ka $P' = P$, kas pierāda apgalvojumu.

Ar E' apzīmēsim taisnes, kas iet caur F paralēli taisnei AB , krustpunktu ar taisni BC . Ar G apzīmēsim taisni $E'F$ un AP krustpunktu. Pamanīsim, ka tā kā ABP pieskaras BC , tad $\angle PBC = \angle BAP = \angle PGE'$, līdz ar to $BPE'G$ ir ievilkts.

Apgalvojums. Četrstūris $BDGE'$ ir vienādsānu trapece, un līdz ar to ievilkts.

Pierādījums. Ievērosim, ka, ja $DB = GE - 2EF$, tad, ja punktu F' definējam uz GE tā, ka $DBFF'$ ir taisnstūris, ir skaidrs, ka $F'G = FE'$, un līdz ar to pēc simetrijas iegūstam

$DG = BE'$, kas ir pietiekami, lai secinātu, ka $BDGE'$ ir vienādsānu trapece. Ievērosim, ka pēc Talesa teorēmas mums ir, ka

$$\frac{EF}{AB} = \frac{EC}{BC} \quad \text{un} \quad \frac{EG}{AB} = \frac{EM}{BM}$$

Doto sakarību mēs varam pārrakstīt kā

$$\frac{EF}{AB} = \frac{EC}{BC} \implies \frac{2EF}{AB} = \frac{EC}{CM} \implies \frac{AB + 2EF}{AB} = \frac{EM}{CM} = \frac{EM}{BM}$$

Secinām, ka

$$\frac{AB + 2EF}{AB} = \frac{EG}{AB} \implies AB + 2EF = GE = DB + 2EF,$$

kas pierāda apgalvojumu.

Tagad redzam, ka patiesībā $E = E'$, jo piecstūris $DBPE'G$ ir ievilkts. Tātad, tā kā $EF \parallel AB$, tad pēc homotētijas seko, ka trijstūru CEF un ABC apvilktās riņķa līnijas pieskaras.

13.uzdevums Uz tāfeles uzrakstīti 11 dažādi naturāli četr ciparu skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties dažus (varbūt visus), kuru vidējais aritmētiskais nav vesels skaitlis.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka katras uzrakstīto skaitļu apakškopas vidējais aritmētiskais ir vesels skaitlis.

Apgalvojums. Katriem diviem uz tāfeles uzrakstītiem skaitļiem a un b izpildās, ka $a \equiv b \pmod{k}$ visiem $k \leq 9$.

Pierādījums. Aplūkosim skaitļus a un b un vēl $k - 1$ skaitļus, kas nav vienādi ar a un b (tādus var atrast, jo $k \leq 9$), kuru summu apzīmēsim ar S . Tā kā jebkuras apakškopas vidējais aritmētiskais ir vesels skaitlis, tad $k \mid S + a$ un $k \mid S + b$. Secinām, ka

$$-S \equiv a \equiv b \pmod{k},$$

kas arī bija jāpierāda.

Pieņemsim, ka uz tāfeles uzrakstītie skaitļi x_1, \dots, x_{11} no apgalvojuma izriet, ka eksistē tādi atlikumi c_5, c_7, c_8, c_9 ar īpašību, ka

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_{11} \equiv c_5 \pmod{5}$$

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_{11} \equiv c_7 \pmod{7}$$

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_{11} \equiv c_8 \pmod{8}$$

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_{11} \equiv c_9 \pmod{9}$$

Tā kā skaitļi 5, 7, 8, 9 ir pa pāriem savstarpējiem pirmskaitļi, tad no Ķīniešu atlikum teorēmas izriet, ka eksistē tāds atlikums c , ka

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_{11} \equiv c \pmod{5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}$$

Ievērosim, ka $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520$. Tā kā mums ir 11 dažādi naturāli skaitļi, kas visi dod vienādu atlikumu dalot ar 2520, tad vismaz viens no skaitļiem ir lielāks vai vienāds ar $2520 \cdot 11 > 10^4$, kas nozīmē, ka šim skaitlim ir vairāk nekā 4 cipari – pretruna.

14.uzdevums Atrast visus pirmskaitļu pārus (p, q) ar īpašību, ka skaitļi $\frac{p^2-4}{q}$ un $\frac{p^3-p-4}{q}$ abi ir veselu skaitļu kvadrāti.

Uzdevuma autors: Kims Georgs Pavlovs, Alfrēds Saročinskis

Atrisinājums. Ievērosim, ka $q \mid p^2 - 4 = (p - 2)(p + 2)$. Tas nozīmē, ka $q \mid p - 2$ vai $q \mid p + 2$. Aplūkosim katru gadījumu atsevišķi:

- Ja $q \mid p - 2$, tad $p \equiv 2 \pmod{q}$. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $p^3 - p - 4 \equiv 0 \pmod{q}$, taču, izmantojot to, ka $p \equiv 2 \pmod{q}$, iegūstam, ka

$$0 \equiv p^3 - p - 4 \equiv 2^3 - 2 - 4 \equiv 2 \pmod{q}$$

Tas nozīmē, ka $q \mid 2 \implies q = 2$. Secinām, ka $p^2 - 4$ dalās ar 2, kas ir iespējams tad un tikai tad, ja p ir pāra skaitlis jeb $p = 2$. Viegli pārbaudīt, ka pirmskaitļu pāris $(2, 2)$ patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

- Ja $q \mid p + 2$, tad $p \equiv -2 \pmod{q}$. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $p^3 - p - 4 \equiv 0 \pmod{q}$, taču, izmantojot to, ka $p \equiv -2 \pmod{q}$, iegūstam, ka

$$0 \equiv p^3 - p - 4 \equiv (-2)^3 + 2 - 4 \equiv -10 \pmod{q}$$

Tas nozīmē, ka $q \mid 10 \implies q = 2$ vai $q = 5$. Gadījumu $q = 2$ jau apskatījām iepriekš, tāpēc pievērsīsimies gadījumam, kad $q = 5$.

Ievērosim, ka $(p - 2)(p + 2) = p^2 - 4 = 5x^2$, kur x ir vesels skaitlis. Atcerēsimies, ka esam gadījumā, kad $5 \mid p + 2$.

Ja $p \neq 2$, tad $\gcd(p - 2, p + 2) = \gcd(p - 2, p + 2 - (p - 2)) = \gcd(p - 2, 4)$ un tā kā $p - 2$ ir nepāra skaitlis, tad secinām, ka $\gcd(p - 2, p + 2) = 1$. Līdz ar to $p + 2 = 5a^2$ un $p - 2 = b^2$ kaut kādiem naturāliem skaitļiem a un b . Pierādīsim, ka tas ir iespējams tad un tikai tad, ja $p = 3$ Ievērosim, ka $a^2 \equiv \{0, 1\} \pmod{3}$, tāpēc $p + 2 = 5a^2 \equiv \{0, 2\} \pmod{3}$, līdz ar to $p = 5a^2 - 2 \equiv \{0, 1\} \pmod{3}$. No otras puses $p = b^2 + 2 \equiv \{0, 2\} \pmod{3}$. Secinām, ka $p \equiv 0 \pmod{3}$ jeb $p = 3$. Viegli pārbaudīt, ka pirmskaitļu $(3, 5)$ patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

15. uzdevums Dota naturālo skaitļu virkne a_1, a_2, \dots , kurai visiem naturāliem skaitļiem n izpildās

$$a_{n+1} = (n+1)(a_n - n + 1)$$

Ja a) $a_1 = 64$ b) $a_1 = 65$ noteikt lielāko naturālo skaitli k ar īpašību, ka $\gcd(a_i, a_{i+1}) = k$ kaut kādam naturālam skaitlim $i \geq 2$.

Atrisinājums. Ieviesīsim virkni $b_i = a_i - i$. Ievērosim, ka

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (n+1)(a_n - n + 1) \\ a_{n+1} &= (n+1)(a_n - n) + (n+1) \\ a_{n+1} - (n+1) &= (n+1)(a_n - n) \\ b_{n+1} &= (n+1)b_n \end{aligned}$$

Induktīvi iegūstam, ka

$$b_{n+1} = (n+1)b_n = (n+1) \cdot n \cdot b_{n-1} = \dots = (n+1)! b_1$$

Tas nozīmē, ka

$$\begin{aligned} a_{n+1} - (n+1) &= b_{n+1} = (n+1)! b_1 = (n+1)!(a_1 - 1) \\ a_{n+1} &= (n+1)!(a_1 - 1) + (n+1) \end{aligned}$$

Apzīmējot $a_1 - 1 = c$, secinām, ka $a_n = n!c + n$ visiem naturāliem skaitļiem n . Ja $a_1 = 1$, tad acīmredzami, ka $k = 1$, jo $\text{LKD}(a_n, a_{n+1}) = (n, n+1) = 1$ visiem naturāliem skaitļiem n . Tāpēc ieņemsim, ka $a_1 \geq 2$ un attiecīgi $c \geq 1$. Apzīmēsim $k = \text{LKD}(a_{n+1}, a_n) = \text{LKD}((n+1)!c + (n+1), n!c + n)$. Ievērosim, ka tā kā $k \mid n!c + n$ un $k \mid (n+1)!c + (n+1)$, tad

$$k \mid (n+1)(n!c + n) - ((n+1)!c + (n+1)) = n^2 - 1$$

Ievērosim, ka $n!c + n \equiv 1 \pmod{n-1}$, tātad $\text{LKD}(n-1, n!c + n) = 1$. No $k \mid (n-1)(n+1)$ un $k \mid n!c + n$ iegūstam

$$k \mid \text{LKD}((n-1)(n+1), n!c + n) = \text{LKD}(n+1, n!c + n)$$

1. gadījums: $n+1$ ir salikts skaitlis. Ja $n+1 = 4$, tad

$$\text{LKD}(n+1, n!c + n) = \text{LKD}(4, 6c + 3) = 1 \Rightarrow k = 1$$

Citādāk varam pieņemt, ka $n+1 = ab$, kur $a \geq 3$, $b \geq 2$, $a \geq b$. Iegaumēsim, ka $a \leq n$. Tad $n+1 \mid n!$, jo, ja $a \neq b$, tad $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot b \cdot \dots \cdot a \cdot \dots \cdot n$, bet, ja $a = b$, var uzrakstīt $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot a \cdot \dots \cdot 2a \cdot \dots \cdot n$, jo

$$\begin{aligned} 2a &\leq n \\ 2a &\leq ab - 1 = a^2 - 1 \end{aligned}$$

kas ir patiess pie $a \geq 3$. Tātad

$$n!c + n \equiv -1 \pmod{n+1},$$

no kā seko $\text{LKD}(n+1, n!c + n) = 1$ un $k = 1$.

2. gadījums: $n+1 = p$, kur p ir pirmskaitlis. Pēc Vilsona teorēmas

$$n!c + n = (p-1)!c + (p-1) \equiv -c - 1 \equiv c + 1 \pmod{p}$$

Tātad

$$\text{LKD}(p, (p-1)!c + (p-1)) = \text{LKD}(p, c+1) = \text{LKD}(p, a_1),$$

no kā secinām, ka $k \in \{1, p\}$ un $k = p$ tieši tad, kad $p \mid a_1$. Secinām, ka k nevar būt lielāks par lielāko a_1 pirmreizinātāju.

Ja a_1 ir divnieka pakāpe, tad pēc iepriekšējā apgalvojuma $k \in \{1, 2\}$, taču $n!$ ir pāra pie $n \geq 2$, tāpēc a_i un a_{i+1} būs dažādas paritātes pie $i \geq 2$, tātad šajā gadījumā $k = 1$.

Parādīsim, ka, ja a_1 dalās ar kādu nepāra pirmskaitli, var iegūt arī $k = p$, kur p ir lielākais a_1 pirmreizinātājs (acīmredzami $p \geq 3$). Ja $p \mid a_1$, tad, atkal izmantojot Vilsona teorēmu,

$$a_{p-1} = (p-1)!(a_1-1) + (p-1) \equiv -(a_1-1) - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

kā arī $p \mid a_p$, jo $a_p = p!c + p$. Tātad $p \mid \text{LKD}(a_p, a_{p-1})$ un mēs varam sasniegt $k = p$.

Secinām, ka pie $a_1 = 2^m$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ lielākā iespējamā k vērtība ir 1, pie pārējām a_1 vērtībām lielākā iespējamā k vērtība ir a_1 lielākais pirmreizinātājs.

16.uzdevums Ar \mathbb{N} apzīmēsim naturālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kas definētas naturāliem skaitļiem, pieņem naturālas vērtības un kurām $f(2) \neq 1$ un visiem pirmskaitļiem p un naturāliem skaitļiem a izpildās

$$a^{f(p)} + f(p-1)! \cdot f(a) \quad \text{dalās ar} \quad f(p)$$

Uzdevuma autors: Kims Georgs Pavlovs, Ilmārs Štolcers

Atrisinājums. Ar $P(p; a)$ apzīmēsim doto sakarību. Atrisinājums sastāvēs no vairākiem soļiem.

Apgalvojums 1: $f(1) = 1$ un $f(2) = 2$.

Pierādījums: No $P(2; 2)$ izriet, ka $f(2) \mid 2^{f(2)} + f(1)! \cdot f(2)$, kas nozīmē, ka $f(2) \mid 2^{f(2)}$ jeb $f(2)$ ir skaitļa 2 naturāla pakāpe. Savukārt, no $P(2; 1)$ izriet, ka

$$2 \mid f(2) \mid 1 + f(1)! \cdot f(1)$$

Ja $f(1) \geq 2$, tad $1 + f(1)! \cdot f(1)$ ir nepāra skaitlis, kas ir pretrunā ar iegūto dalāmību. Līdz ar to $f(1) = 1$. Ievērosim arī, ka $f(2) \mid 1 + f(1)! \cdot f(1) = 2$, kas nozīmē, ka $f(2) = 2$, kas arī bija jāpierāda.

Apgalvojums 2: $f(p) = 1$ vai $f(p) = p$ katram nepāra pirmskaitlim p .

Pierādījums: No $P(p; p)$ izriet, ka $f(p) \mid p^{f(p)} + f(p-1)! \cdot f(p)$, kas nozīmē, ka $f(p) \mid p^{f(p)}$ jeb $f(p)$ ir skaitļa p nenegatīva pakāpe. Pieņemsim, ka $f(p) = p^k$, kur $k \geq 2$. No $P(p; 1)$ izriet, ka

$$f(p-1)! \equiv -1 \pmod{p^k}$$

Savukārt no $P(p; p-1)$ iegūstam, ka

$$p^k \mid (p-1)^{p^k} + f(p-1)! \cdot f(p-1)$$

No LTE lemmas izriet, ka

$$\nu_p((p-1)^{p^k} + 1) = \nu_p(p-1+1) + \nu_p(p^k) = k+1$$

Tas nozīmē, ka $p^k \mid (p-1)^{p^k} + 1$, so $(p-1)^{p^k} \equiv -1 \pmod{p^k}$. Secinām, ka

$$f(p-1)! \cdot f(p-1) \equiv 1 \pmod{p^k} \implies f(p-1) \equiv -1 \pmod{p^k}$$

Tādā gadījumā $f(p-1) \geq p^k - 1 \implies p \mid f(p-1)!$, jo $f(p-1) \geq p$, bet tādā gadījumā $f(p-1)! \equiv -1 \pmod{p^k}$ ir aplams apgalvojums. Tas nozīmē, ka $k \leq 1$, līdz ar to $f(p) = 1$ vai $f(p) = p$, kas arī bija jāpierāda.

Ievērosim, ka no iepriekš iegūtajiem rezultātiem izriet, ka $f(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ visiem pirmskaitļiem p , kuriem izpildās $f(p) = p$. Izmantojot Mazo Fermā teorēmu $P(p, a)$ priekš šiem pirmskaitļiem var pārrakstīt kā

$$p \mid a - f(a)$$

Ar S apzīmēsim nepāra pirmskaitļu kopu p , kuriem izpildās $f(p) = p$. Tagad aplūkosim visus iespējamus gadījumus, kā var izskatīties kopa S .

Ja S ir bezgalīga, tad fiksētam naturālam skaitlim a var atrast pietiekami lielu pirmskaitli

p ar īpašību, ka $|a - f(a)| < p$. Tad $p \mid a - f(a)$ var izpildīties tad un tikai tad, ja $f(a) = a$. Secinām, ka visiem naturāliem skaitļiem n izpildās, ka $f(n) = n$. Viegli pārbaudīt, ka šī funkcija der, jo $f(p-1)! = (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ no Vilsona teorēmas un $p \mid a^p - a$ no Mazās Fermā teorēmas.

Ja S ir tukša kopa, tad visiem pirmskaitļiem p izpildās, ka $f(p) = 1$. Acīmredzami, ka nepāra pirmskaitļiem $P(p, a)$ izpildīsies. Tas nozīmē, ka mums ir svarīgi tikai, vai izpildās $P(2, a)$. Ievērosim, ka no $P(2; a)$ izriet, ka $2 \mid a^2 + f(a)$. Līdz ar to jebkura funkcijai, kurai izpildās, ka $f(a) \equiv -a \pmod{2}$ apmierina uzdevuma nosacījumus.

Ja S ir galīga kopa, tad eksistē vismaz viens nepāra pirmskaitlis p , kuram $f(p) = p$ un visiem pietiekami lieliem pirmskaitļiem q izpildās $f(q) = 1$. Pieņemsim, ka eksistē pirmskaitlis $r < p$, kuram $f(r) = 1$. Tad no $P(p; r)$ izriet, ka $p \mid r - 1$, kas nav iespējams, jo $r < p$. Ar Q apzīmēsim visu nepāra pirmskaitļu reizinājumu, kas ir kopā S un pieņemsim, ka p ir lielākas pirmskaitlis kopā S . Aplūkosim skaitli $Q + 2$. Acīmredzami, ka katram skaitļa $Q + 2$ pirmreizinātājam q izpildās $f(q) = 1$ un $p < q$. Tas nozīmē, ka

$$p \mid q - f(q) = q - 1 \implies q \equiv 1 \pmod{p}$$

Atkārtojot šo argumentu katram $Q + 2$ pirmreizinātājam iegūstam, ka $Q + 2 \equiv 1 \pmod{p}$, taču $Q + 2 \equiv 2 \pmod{p}$ – pretruna.