Atlases sacensības komandu olimpiādei "Baltijas ceļš"

2025. gada 21. septembris, Rīga

2. diena (2)

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Atļauts izmantot tikai rakstāmpiederumus, lineālu un cirkuli.

9. Dots riņķa līnijā ievilkts četrstūris $ABCD$, kuram izpildās $AB = AD$. Punkti E un F atrodas uz malām BC un CD tā, ka $BE + DF = EF$. Pierādīt, ka $\angle BAD = 2\angle EAF$.

10. Dots dažādmalu trijstūris ABC. Punkts D ir izvēlēts tā iekšpusē tā, ka $\angle DBA = \angle DCA$. Punkti E un F atrodas uz malām AC un AB ar īpašību, ka $DE = DC$ un $DB = DF$. Vai ir iespējams, ka taisnes AD, BE, CF krustojas vienā punktā?

11. Dots trijstūris ABC, kuram $\angle BAC = 120°$. Punkts O ir tā apvilktās riņķa līnijas centrs. Pieskare, kas trijstūra ABC apvilktajai riņķa līnijai novilkta punktā A, krusto pieskares, kas tai novilktas punktos B un C, attiecīgi punktos P un Q. Punkti H un I ir attiecīgi trijstūra $\triangle OPQ$ augstumu krustpunkts un ievilktās riņķa līnijas centrs. Punkti M un N ir attiecīgi loka BAC un nogriežņa OI viduspunkti . Taisne MN krusto trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju punktā D. Pierādīt, ka taisne AD ir perpendikulāra taisnei HI.

12. Dots trijstūris ABC. Uz mediānas, kas vilkta no virsotnes A, ir izvēlēts punkts P ar īpašību, ka $\angle BPC = 180° - \angle BAC$. Uz taisnes AB ir izvēlēts punkts $D \neq A$ tā, ka $AB = BD$, savukārt uz taisnes AC ir izvēlēts punkts F tā, ka $\angle ABF = 90°$. Trijstūra DBP apvilktā riņķa līnija krusto taisni BC punktā $E \neq B$. Pierādīt, ka trijstūru CEF un ABC apvilktās riņķa līnijas pieskaras viena otrai.

13. Uz tāfeles uzrakstīti 11 dažādi naturāli četrciparu skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties dažus (varbūt visus), kuru vidējais aritmētiskais nav vesels skaitlis.

14. Atrast visus pirmskaitļu pārus (p, q) ar īpašību, ka skaitļi $\frac{p^2-4}{q}$ un $\frac{p^3-p-4}{q}$ abi ir veselu skaitļu kvadrāti.

15. Dota naturālo skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots$, kurai visiem naturāliem skaitļiem n izpildās

$$a_{n+1} = (n+1)\,(a_n - n + 1)$$

Ja a) $a_1 = 64$ b) $a_1 = 65$ noteikt lielāko naturālo skaitli k ar īpašību, ka $\gcd(a_i, a_{i+1}) = k$ kaut kādam naturālam skaitlim $i \geq 2$.

16. Ar $\mathbb{N}$ apzīmēsim naturālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kas definētas naturāliem skaitļiem, pieņem naturālas vērtības un, kurām $f(2) \neq 1$ un visiem pirmskaitļiem p un naturāliem skaitļiem a izpildās

$$a^{f(p)} + f(p-1)! \cdot f(a) \quad \text{dalās ar} \quad f(p)$$