Atlases sacensības komandu olimpiādei ”Baltijas ceļš”

2025. gada 20. septembris, Rīga

1. diena (2)

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Atļauts izmantot tikai rakstāmpiederumus, lineālu un cirkuli.

1. Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c un d, kuriem izpildās $a > c$ un $b < d$. Zināms, ka

$$a + \sqrt{b} \geq c + \sqrt{d} \qquad \text{un} \qquad \sqrt{a} + b \leq \sqrt{c} + d$$

Pierādīt, ka $a + b + c + d > 1$.

2. Dota naturālu skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots$, kurai visiem naturāliem skaitļiem $n \geq 3$ izpildās

$$\frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-2} a_n} = 1 - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2}.$$

Pierādīt, ka $a_1, a_2, \ldots$ ir Fibanoči skaitļu virkne.

Piezīme. Fibanoči skaitļu virkne ir naturālu skaitļu virkne, kurai izpildās $a_1 = a_2 = 1$ un $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ visiem $n \geq 3$.

3. Zināms, ka pozitīvai reālu skaitļu virknei $x_1, x_2, \ldots$ visiem naturāliem skaitļiem $n \geq 1$ izpildās

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n + \frac{1}{4}} + \sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{4}}$$

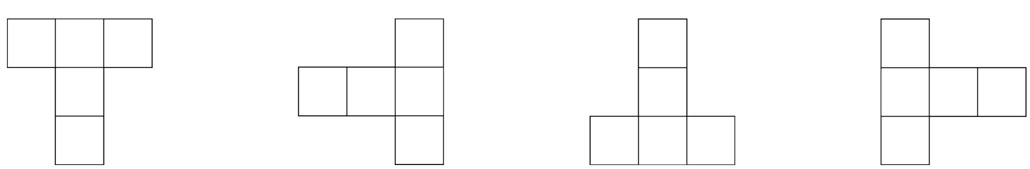
Pierādīt, ka

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{2025}} < \frac{1}{\sqrt{x_1}}$$

4. Atrast visus reālos skaitļus a, kuriem eksistē funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas definēta reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kurai visiem reāliem skaitļiem x, y izpildās

$$x + af(y) \leq y + f(f(x))$$

5. Dots $n \times n$ rūtiņu laukums, kur $n \geq 3$, un katra rūtiņa var būt iekrāsota melna vai balta. Katrā gājienā mēs varam samainīt uz pretējo krāsu piecas rūtiņas, kas veido vienu no šādām *pentomino* figūrām:



Sākumā, visas rūtiņas ir baltas. Noteikt, kuriem n ir iespējams (ar šādiem gājieniem) nokrāsot visas rūtiņas melnas.

6. Dota punktu kopa Dekarta koordinātu plaknē $M = \{(x, y) \mid x + y \leq 2025, x, y \in \mathbb{N}\}$. Zināms, ka katrs punkts tiek krāsots vienā no trīs krāsām. Pierādīt, ka eksistē vienādsānu taisnleņķa trijstūris, kuram visas virsotnes ir vienā krāsā un kura, divas malas ir paralēlas x un y asīm un hipotenūza paralēla taisnei $x + y = 2025$.

7. Dots naturāls skaitlis n. Baltijas jūrā atrodas n salas, kuras savieno $n-1$ tilti tā, ka no katras salas var nokļūt jebkurā citā salā. Kādā pēcpusdienā uz vienas salas izceļas ugunsgrēks. Katru rītu uguns izplatās uz visām blakus salām (salām, kas savienotas ar tiltu ar jau degošo salu). Lai ierobežotu ugunsgrēku, katru vakaru tiek uzspridzināts viens tilts, kamēr ugunīm ir vēl iespēja izplatīties tālāk. Apzīmēsim ar X minimālo tiltu skaitu, kas jāuzspridzina, lai ugunsgrēku pilnībā ierobežotu (t.i., lai nebūtu neviena tilta, kas savieno degošu un nedegošu salu). Atrast lielāko iespējamo X vērtību starp visām iespējamiem salu un tiltu izkārtojumiem.

Piezīme: Pirmā tilta spridzināšana notiek tās pašas dienas vakarā, kurā izcēlās ugunsgrēks.

8. Aspazija, K. Barons un A. Čaks spēlē spēli. Spēles sākumā katram no viņiem ir kaudze ar 2024 grāmatām. Aspazija veic pirmo gājienu, K. Barons — otro, A. Čaks — trešo, un viņi turpina veikt gājienus tajā pašā secībā. Katru gājienu spēlētājs izvēlas pozitīvu veselu skaitli n, kas ir lielāks par jebkuru kāda cita spēlētāja iepriekš izvēlētu skaitli, paņem $2n$ grāmatas no savas kaudzes un sadala tās vienlīdzīgi pārējiem diviem spēlētājiem. Ja spēlētājs nevar veikt gājienu, spēle beidzas, un tas spēlētājs zaudē spēli. Noteikt visus spēlētājus, kuriem ir tāda stratēģija , ka, neatkarīgi no tā, kā spēlē pārējie divi, viņi nezaudēs spēli.