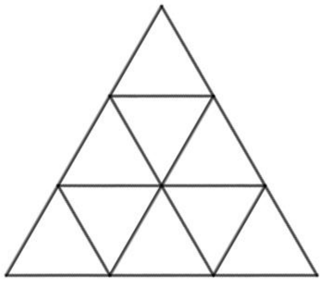
Atklātā matemātikas olimpiāde

5. klase

5.1. Skaitļus no 1 līdz 9 ieraksti 1. att. redzamajos mazajos trijstūros (katrā trijstūrī citu naturālo skaitli) tā, lai blakus trijstūros ierakstītie skaitļi neatšķiras vairāk kā par 3.
Piezīme. Par blakus trijstūriem sauksim trijstūrus, kam ir kopīga mala.

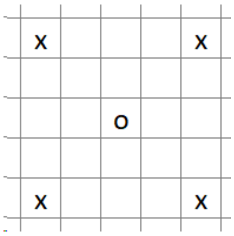


1. att.

5.2. Doti divi skaitļi. Zināms, ka viens no tiem ir tieši septiņas reizes lielāks nekā otrs un katram no tiem ir vismaz divi cipari. Vai var gadīties, ka abu skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari **a)** 3; 4; 6 un 7; **b)** 1; 2 un 3?

5.3. Rūtiņu lapā, kurā katras rūtiņas malas garums ir 1, uzzīmē daudzstūri, kuram gan perimetra, gan laukuma vērtība ir tāda pati kā malu skaits!

5.4. Dots kvadrāts ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas. Vienā gājienā kauliņu var pārlikt tieši 2 rūtiņas uz priekšu pa jebkuru no diagonālēm, kas iziet no tā lauciņa, kurā atrodas kauliņš (skat. 2. att., kur kauliņš apzīmēts ar o un ar x atzīmētas tās rūtiņas, uz kurām to drīkst pārvietot). Vai, veicot vairākus gājienus, kauliņu no kreisās apakšējās rūtiņas var pārvietot uz kreiso augšējo rūtiņu, ja kvadrāta izmēri ir: **a)** 9×9; **b)** 10×10; **c)** 11×11?



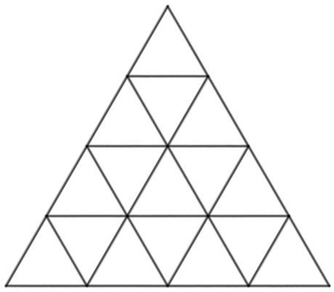
2. att.

5.5. Gunai bija četru veidu konfektes: 8 “Serenādes”, 14 “Lācīši Ķepainīši”, 20 “Vāverītes” un 26 “Sarkanās magones”. Katru no saviem dzimšanas dienas viesiem viņa uzcienāja ar tieši 3 dažādām konfektēm. Kāds ir lielākais iespējamais viesu skaits, kas bija ieradušies uz Gunas dzimšanas dienas svinībām?

Atklātā matemātikas olimpiāde

6. klase

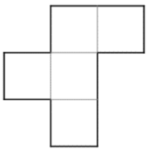
6.1. Skaitļus no 1 līdz 16 ieraksti 1. att. redzamajos mazajos trijstūros (katrā trijstūrī citu naturālo skaitli) tā, lai blakus trijstūros ierakstīties skaitļi neatšķiras vairāk kā par 4.
Piezīme. Par blakus trijstūriem sauksim trijstūrus, kam ir kopīga mala.



1. att.

6.2. Doti divi skaitļi, katram no tiem ir vismaz divi cipari. Zināms, ka pirmais skaitlis ir vienāds ar skaitli, kuru iegūst, otro skaitli pareizinot pašu ar sevi. Vai var gadīties, ka abu skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari **a)** 2; 3; 7 un 8; **b)** 1; 3; 4; 5 un 6?

6.3. No četrām tādām figūrām, kāda dota 2. att., uzzīmē figūru, kurai ir tieši **a)** 2 simetrijas asis, **b)** 4 simetrijas asis!
Piezīme. Figūru, kas dota 2. att., drīkst pagriezt un apmest otrādi. Uzzīmētajai figūrai var būt arī caurumi. Figūrai jābūt saistītai, tas ir, no figūras katras rūtiņas jābūt iespējai aiziet uz jebkuru citu šīs figūras rūtiņu, ejot tikai pa šīs figūras rūtiņām, katru reizi pārejot no attiecīgās rūtiņas uz blakus rūtiņu, ar ko tai ir kopīga mala.



2. att.

6.4. Pie galda sēž zaļie bruņinieki un sarkanie bruņinieki, pavisam kopā 10 bruņinieku. Zaļie bruņinieki vienmēr saka patiesību, sarkanie bruņinieki vienmēr melo. Katrs bruņinieks izteicās:
- pirmais bruņinieks teica: "starp mums nav neviena zaļā bruņinieka";
- otrais bruņinieks teica: "starp mums ir ne vairāk kā viens zaļais bruņinieks";
- trešais teica: "starp mums ir ne vairāk kā divi zaļie bruņinieki";
- ceturtais teica: "starp mums ir ne vairāk kā trīs zaļie bruņinieki",
- un tā tālāk, līdz desmitais bruņinieks teica: "starp mums ir ne vairāk kā deviņi zaļie bruņinieki".

Cik zaļo un cik sarkano bruņinieku sēž pie galda?

6.5. Latvijā, tāpat kā visās eirozonas valstīs, apgrozībā ir 1; 2; 5; 10; 20 un 50 centu monētas. Pieņemsim, ka ir zināma no šīm monētām izveidotā naudas summa S un izmantoto monētu skaits M.
Daudzos gadījumos, zinot S un M vērtības, var noteikt precīzu izmantoto monētu komplektu. Piemēram, ja $S = 7$ un $M = 3$, tad ir izmantota viena piecu un divas viena centa monētas un citu variantu nav.
Kāda ir mazākā M vērtība, kurai var atrast tādu S vērtību, ka, zinot S un M vērtības, izmantoto monētu komplektu viennozīmīgi nav iespējams noteikt?

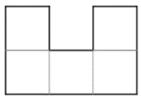
Atklātā matemātikas olimpiāde

7. klase

7.1. Vai rindā kaut kādā secībā var uzrakstīt naturālus skaitļus **a)** no 1 līdz 23; **b)** no 1 līdz 2023 tā, lai blakus skaitļiem nebūtu vienādu ciparu?

7.2. Kāds ir lielākais iespējamais septiņciparu skaitlis, kuram vienlaicīgi izpildās šādi nosacījumi:
- tas dalās ar 12;
- skaitļa pirmais cipars ir tāds pats kā pēdējais cipars;
- skaitļa 2., 4. un 6. cipars ir vienādi un tie ir divas reizes lielāki nekā pirmais cipars;
- skaitļa trešais cipars ir tāds pats kā piektais cipars?

7.3. No četrām tādām figūrām, kāda dota 1. att., uzzīmē figūru, kurai ir tieši **a)** 2 simetrijas asis, **b)** 4 simetrijas asis!
Piezīme. Figūru, kas dota 1. att., drīkst pagriezt. Uzzīmētajai figūrai var būt arī caurumi. Figūrai jābūt saistītai, tas ir, no figūras katras rūtiņas jābūt iespējai aiziet uz jebkuru citu šīs figūras rūtiņu, ejot tikai pa šīs figūras rūtiņām, katru reizi pārejot no attiecīgās rūtiņas uz blakus rūtiņu, ar ko tai ir kopīga mala.



1. att.

7.4. Latvijā, tāpat kā visās eirozonas valstīs, apgrozībā ir 1; 2; 5; 10; 20 un 50 centu monētas. Pieņemsim, ka ir zināma no šīm monētām izveidotā naudas summa S un izmantoto monētu skaits M.
Daudzos gadījumos, zinot S un M vērtības, var viennozīmīgi noteikt izmantoto monētu komplektu. Piemēram, ja $S=7$ un $M=3$, tad ir izmantota viena piecu un divas viena centa monētas un citu variantu nav.
Kāda ir mazākā S vērtība, kurai var atrast tādu M vērtību, ka, zinot S un M vērtības, izmantoto monētu komplektu viennozīmīgi nav iespējams noteikt?

7.5. Uz palodzes sēž vairākas bizbizmārītes, katrai no tām uz muguras ir vai nu divi punktiņi, vai septiņi punktiņi. Tās bizbizmārītes, kurām uz muguras ir septiņi punktiņi, vienmēr saka patiesību, bet tās bizbizmārītes, kurām uz muguras ir divi punktiņi, vienmēr melo. Katra bizbizmārīte izteicās:
- pirmā bizbizmārīte teica: "punktiņu skaits uz muguras mums visām ir vienāds";
- otrā teica: "mums visām kopā uz muguras ir 42 punktiņi";
- trešā teica: "nē, mums visām kopā uz muguras ir 32 punktiņi";
- katra no atlikušajām bizbizmārītēm teica: "no pirmajām trijām bizbizmārītēm tieši viena teica patiesību".

Cik bizbizmārītes sēž uz palodzes?

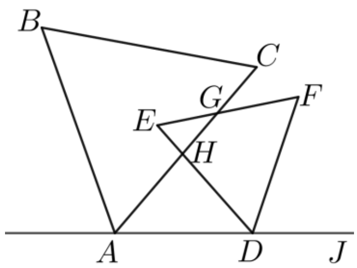
Atklātā matemātikas olimpiāde

8. klase

8.1. Vai burtu vietā var ierakstīt sešus dažādus nenulles ciparus, lai dotā vienādība būtu patiesa un visas daļas būtu nesaīsināmas: $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{E}{F}$?

8.2. Trīsciparu skaitļa x ciparu summa ir 12. Ja šim skaitlim nodzēš pēdējo ciparu, tad atlikušais divciparu skaitlis dalās ar 9. Zināms, ka skaitlis x ir par 99 lielāks nekā trīsciparu skaitlis, ko iegūst, uzrakstot tā ciparus pretējā secībā. Kāds var būt skaitlis x?

8.3. Divi vienādmalu trijstūri novietoti plaknē kā parādīts 1. att. Zināms, ka $\sphericalangle CAD=\alpha$ un $\sphericalangle FDJ=\beta$. Izsaki leņķi CGF ar α un β.



1. att.

8.4. Četru bērnu – Almas, Bruno, Cēzara un Dorotejas – tēvs mēdz bērniem iedot sīknaudu. Tā reiz tēvs saviem bērniem iedeva sīknaudu šādi:

- Almai kādu naudas summu viena centa monētās;
- Bruno mazāko naudas summu divu centu monētās, kas ir lielāka nekā Almai iedotā naudas summa;
- Cēzaram mazāko naudas summu piecu centu monētās, kas ir lielāka nekā Bruno iedotā naudas summa;
- Dorotejai mazāko naudas summu desmit centu monētās, kas ir lielāka nekā Cēzaram iedotā naudas summa.

Kāda ir **a)** lielākā, **b)** mazākā iespējamā starpība starp Dorotejai un Almai iedotajām naudas summām?

8.5. Uz palodzes sēž vairākas bizbizmārītes, katrai no tām uz muguras ir vai nu trīs punktiņi, vai astoņi punktiņi. Tās bizbizmārītes, kurām uz muguras ir astoņi punktiņi, vienmēr saka patiesību, bet tās bizbizmārītes, kurām uz muguras ir trīs punktiņi, vienmēr melo. Katra bizbizmārīte izteicās:

- pirmā bizbizmārīte teica: "punktiņu skaits uz muguras mums visām ir vienāds";
- otrā teica: "mums visām kopā uz muguras ir 38 punktiņi";
- trešā teica: "nē, mums visām kopā uz muguras ir 48 punktiņi";
- katra no atlikušajām bizbizmārītēm teica: "no pirmajām trijām bizbizmārītēm tieši viena teica patiesību".

Cik bizbizmārītes sēž uz palodzes?

Atklātā matemātikas olimpiāde

9. klase

9.1. Uz tāfeles uzrakstīta daļa $\frac{10}{2023}$. Katrā gājienā var izvēlēties patvaļīgu naturālu skaitli un vai nu pieskaitīt to gan daļas skaitītājam, gan saucējam, vai arī to reizināt ar daļas skaitītāju un saucēju. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var iegūt daļu, kuras vērtība ir **a)** $\frac{1}{10}$; **b)** 1?

9.2. Ja divciparu skaitlim $\overline{ab}$ galā pieraksta divciparu skaitli $\overline{cd}$, tad iegūtais četrciparu skaitlis dalās ar 13. Zināms, ka $12a + 9b$ dalās ar 13. Kāds var būt skaitlis $\overline{cd}$?

9.3. Trijstūrī viens leņķis ir par $120°$ lielāks nekā otrs. Pierādīt, ka bisektrise, kas vilkta no trešā leņķa virsotnes, ir divas reizes garāka nekā augstums no tās pašas virsotnes!

9.4. Uz katras no 36 kartītēm uzrakstīts kāds naturāls skaitlis (daži no tiem var būt arī vienādi). Kartītes iespējams sadalīt deviņās grupās pa četrām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas. Kā arī kartītes iespējams sadalīt četrās grupās pa deviņām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas.
Vai vienmēr visas kartītes var sadalīt sešās grupās pa sešām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas?

9.5. Pirmie sešpadsmit naturālie skaitļi patvaļīgā secībā izvietoti pa apli, katriem diviem blakus skaitļiem aprēķināta to starpība (no lielākā skaitļa atņemot mazāko), un pēc tam aprēķināta visu šo 16 starpību summa S. Vai var gadīties, ka: **a)** $S = 100$; **b)** $S = 123$?

Atklātā matemātikas olimpiāde

10. klase

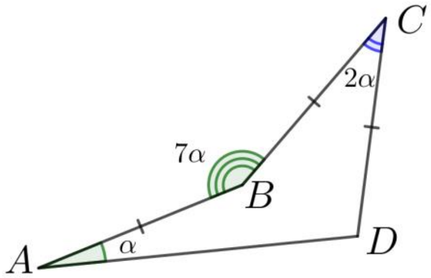
10.1. Pie galda sēž zaļie bruņinieki un sarkanie bruņinieki, pavisam kopā 10 bruņinieku. Zaļie bruņinieki vienmēr saka patiesību, sarkanie bruņinieki vienmēr melo. Katrs bruņinieks izteicās:

- pirmais bruņinieks teica: "starp mums nav neviena zaļā bruņinieka";
- otrais bruņinieks teica: "starp mums ir ne vairāk kā viens zaļais bruņinieks";
- trešais teica: "starp mums ir ne vairāk kā divi zaļie bruņinieki";
- ceturtais teica: "starp mums ir ne vairāk kā trīs zaļie bruņinieki",
- un tā tālāk, līdz desmitais bruņinieks teica: "starp mums ir ne vairāk kā deviņi zaļie bruņinieki".

Cik zaļo un cik sarkano bruņinieku sēž pie galda?

10.2. Pierādīt, ka $9x^2 + 5y^2 - 8xy - 4x + 2 > 0$ visām reālām x un y vērtībām!

10.3. Dots ieliekts četrstūris $ABCD$, kuram $AB = BC = CD$. Zināms, ka $\sphericalangle BAD = \alpha$ un $\sphericalangle BCD = 2\alpha$, bet leņķa ABC lielums četrstūra ārpusē ir 7α (skat. 1. att.). Aprēķināt α vērtību!



1. att.

10.4. Uz katras no 72 kartītēm uzrakstīts kāds naturāls skaitlis (daži no tiem var būt arī vienādi). Kartītes iespējams sadalīt astoņās grupās pa deviņām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas. Kā arī kartītes iespējams sadalīt deviņās grupās pa astoņām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas.

Vai vienmēr:

a) visas kartītes var sadalīt sešās grupās pa 12 kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas;

b) visas kartītes var sadalīt 12 grupās pa sešām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas?

10.5. Uz tāfeles uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 100 (katrs tieši vienu reizi). Maruta vienu no tiem nodzēsa un izrādījās, ka viens no atlikušajiem skaitļiem tagad ir visu atlikušo skaitļu vidējais aritmētiskais. Kāds varēja būt Marutas nodzēstais skaitlis?

Atklātā matemātikas olimpiāde

11. klase

11.1. Mārim bija četru veidu konfektes: 15 "Serenādes", 25 "Lācīši Ķepainīši", 35 "Vāverītes" un 45 "Sarkanās magones". Katru no saviem dzimšanas dienas viesiem viņš uzcienāja ar tieši 3 dažādām konfektēm. Kāds ir lielākais iespējamais viesu skaits, kas bija ieradušies uz Māra dzimšanas dienas svinībām?

11.2. Pierādīt, ka $a^2c + ac^2 - 6abc + 4b^2c + ab^2 \geq 0$ visām pozitīvām reālām a, b un c vērtībām!

11.3. Dota riņķa līnija, uz tās atlikti punkti A, B un D, bet punkts C atlikts tās iekšpusē tā, ka punkti A un D atrodas dažādās pusēs no taisnes BC. Zināms, ka $AB = 2$, $BC = 5$, $CD = 3$, $AB \perp BC$ un $BC \perp CD$. Aprēķināt riņķa, ko ierobežo dotā riņķa līnija, laukumu!

11.4. Uz katras no 72 kartītēm uzrakstīts kāds naturāls skaitlis (daži no tiem var būt arī vienādi). Kartītes iespējams sadalīt astoņās grupās pa deviņām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas. Kā arī kartītes iespējams sadalīt deviņās grupās pa astoņām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas.
Vai vienmēr:

a) visas kartītes var sadalīt sešās grupās pa 12 kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas;

b) visas kartītes var sadalīt 12 grupās pa sešām kartītēm katrā tā, ka visās grupās uz kartītēm uzrakstīto skaitļu summas ir vienādas?

11.5. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $17a^2 - 7b^2 + c^2 = 2023$.

Atklātā matemātikas olimpiāde

12. klase

12.1. Vai burtu vietā var ierakstīt 9 dažādus nenulles ciparus, lai vienādība $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}+\frac{E}{F}+\frac{G}{H}=I$ būtu patiesa?

12.2. Kāda ir izteiksmes $2x^2-8xy+4x+9y^2-14y+9$ mazākā iespējamā vērtība, ja x un y ir reāli skaitļi?

12.3. Taisnstūra $ABCD$ diagonāle BD ir kvadrāta $BDEF$ viena mala. Punkts C atrodas kvadrāta $BDEF$ iekšpusē. Pierādīt, ka $S_{ABD} \leq S_{CEF}$.

12.4. Kvadrātā ar izmēriem 8×8 rūtiņas iekrāsotas astoņas rūtiņas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā ir iekrāsota tieši viena rūtiņa.
a) Pierādīt, ka jebkuram kvadrātam ar šādi iekrāsotām rūtiņām var atrast taisnstūri ar izmēriem 2×4 rūtiņas, kurā nav iekrāsota neviena rūtiņa!
b) Parādīt, ka līdzīgs apgalvojums par taisnstūri ar izmēriem 2×5 rūtiņas nav patiess!

12.5. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis, kuram tieši **a)** 25%; **b)** 26% no visiem tā pozitīvajiem dalītājiem dod atlikumu 1, dalot ar 3?
Piezīme. Skaitļa n dalītājs ir arī 1 un pats skaitlis n.