Piektdiena, 2015. gada 10. jūlijs

1. uzdevums. Sauksim galīgu plaknes punktu kopu $\mathcal{S}$ par *līdzsvarotu*, ja katriem diviem dažādiem kopas $\mathcal{S}$ punktiem A un B var atrast tādu kopas $\mathcal{S}$ punktu C, ka $AC = BC$. Sauksim $\mathcal{S}$ par *ekscentrisku*, ja jebkuriem trim dažādiem kopas $\mathcal{S}$ punktiem A, B un C nevar atrast tādu kopas $\mathcal{S}$ punktu P, ka $PA = PB = PC$.

(a) Pierādīt, ka katram veselam skaitlim $n \geqslant 3$ eksistē līdzsvarota kopa no n punktiem.

(b) Noteikt visus veselus skaitļus $n \geqslant 3$, kuriem eksistē līdzsvarota ekscentriska kopa no n punktiem.

2. uzdevums. Noteikt visus veselu pozītīvu skaitļu trijniekus (a, b, c) tādus, ka katrs no skaitļiem

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

ir divnieka pākape.

(*Divnieka pakāpe ir vesels skaitlis formā* 2^n, *kur* n *ir vesels nenegatīvs skaitlis.*)

3. uzdevums. Dots šaurleņķu trīsstūris ABC ar $AB > AC$. Lai Γ ir tam apvilktā riņķa līnija, H ir tā augstumu krustpunkts, un F ir pamats augstumam, kas no A vilkts pret BC. Lai M ir BC viduspunkts. Lai Q ir tāds punkts uz Γ, ka $\angle HQA = 90°$, un K ir tāds punkts uz Γ, ka $\angle HKQ = 90°$. Pieņemsim, ka punkti A, B, C, K un Q ir dažādi un atrodas uz Γ šadā secībā.

Pierādīt, ka trīsstūriem KQH un FKM apvilktās riņķa līnijas pieskaras viena otrai.

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Par katru uzdevumu var nopelnīt 7 punktus

Sestdiena, 2015. gada 11. jūlijs

4. uzdevums. Trīsstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas Ω centrs ir O. Riņķa līnija Γ ar centru A krusto nogriezni BC punktos D un E, pie tam B, D, E un C visi ir dažādi un atrodas uz taisnes BC šādā secībā. Dots, ka Γ un Ω krustojas punktos F un G tā, ka A, F, B, C un G atrodas uz Ω šādā secībā. Trīsstūrim BDF apvilktās riņķa līnijas un nogriežņa AB otrais krustošanās punkts ir K. Trīsstūrim CGE apvilktās riņķa līnijas un nogriežņa CA otrais krustošanās punkts ir L.

Zināms, ka taisnes FK un GL ir dažādas un krustojas punktā X. Pierādīt, ka X atrodas uz taisnes AO.

5. uzdevums. Ar $\mathbb{R}$ apzīmēsim visu reālo skaitļu kopu. Noteikt visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kas apmierina vienādību

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

visiem reāliem skaitļiem x un y.

6. uzdevums. Veselu skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots$ apmierina sekojošus nosacījumus:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ visiem $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ visiem $1 \leqslant k < \ell$.

Pierādīt, ka eksistē divi veseli pozitīvi skaitļi b un N tādi, ka

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

visiem veseliem skaitļiem m un n, kas apmierina $n > m \geqslant N$.

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Par katru uzdevumu var nopelnīt 7 punktus