Pirmdiena, 2016. gada 11. jūlijs

1. uzdevums. Dots, ka BCF ir taisnleņķa trijstūris, $\angle CBF = 90^\circ$. Uz taisnes CF izvēlēts tāds punkts A, ka $FA = FB$ un F atrodas starp A un C. Punkts D ir tāds, ka $DA = DC$ un AC ir $\angle DAB$ bisektrise. Punkts E ir tāds, ka $EA = ED$ un AD ir $\angle EAC$ bisektrise. Nogriežņa CF viduspunkts ir M. Punkts X ir izvēlēts tā, ka $AMXE$ ir paralelograms (kur $AM \parallel EX$ un $AE \parallel MX$). Pierādīt, ka taisnes BD, FX un ME krustojas vienā punktā.

2. uzdevums. Atrast visus naturālos skaitļus n, tādus, ka katrā no $n \times n$ tabulas rūtiņām var ierakstīt vienu no burtiem I, M un O tā, ka izpildās sekojoši divi nosacījumi:

- katrā rindā un katrā kolonnā, trešdaļa no burtiem ir I, trešdaļa ir M un trešdaļa ir O;
- katrā diagonālē, kuras rūtiņu skaits dalās ar 3, trešdaļa no burtiem ir I, trešdaļa ir M un trešdaļa ir O.

Piezīme: $n \times n$ tabulas rindas un kolonnas ir sanumurētas ar skaitļiem no 1 līdz n no augšas uz leju un no kreisās puses uz labo, attiecīgi. Līdz ar to katru rūtiņu apraksta naturālu skaitļu pāris (i, j), kur $1 \le i, j \le n$. Ja $n > 1$, tad tabula satur $4n - 2$ divu veidu *diagonāles*. Pirmā veida diagonāle sastāv no visām rūtiņām (i, j), kurām sakrīt vērtība $i + j$, un otrā veida diagonāle sastāv no visām rūtiņām (i, j), kurām sakrīt vērtība $i - j$.

3. uzdevums. Plaknē dots izliekts daudzstūris $P = A_1A_2 \ldots A_k$. Virsotnes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ atrodas uz vienas riņķa līnijas un to koordinātas ir veseli skaitļi. Apzīmēsim P laukumu ar S. Visu P malu garumu kvadrāti ir veseli skaitļi, kas dalās ar doto nepāra naturālu skaitli n. Pierādīt, ka $2S$ ir vesels skaitlis, kas dalās ar n.

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Par katru uzdevumu var nopelnīt 7 punktus

Otrdiena, 2016. gada 12. jūlijs

4. uzdevums. Par *aromātisku* sauksim tādu naturālu skaitļu kopu, kas sastāv no vismaz diviem elementiem un katram no tās elementiem ir vismaz viens kopīgs pirmreizinātājs ar vismaz vienu no pārējiem elementiem. Apzīmēsim $P(n) = n^2 + n + 1$. Kāda ir mazākā iespējamā naturālā skaitļa b vērtība, pie nosacījuma, ka eksistē tāds nenegatīvs vesels skaitlis a, kuram kopa

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

ir *aromātiska*?

5. uzdevums. Uz tāfeles uzrakstīts vienādojums

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016),$$

ar 2016 lineāriem reizinātājiem katrā pusē. Kāda ir mazākā iespējamā skaitļa k vērtība, ja zināms, ka ir iespējams nodzēst tieši k no šiem 4032 lineāriem reizinātājiem tā, lai katrā pusē paliktu vismaz viens reizinātājs un gala vienādojumam nebūtu atrisinājumu reālos skaitļos?

6. uzdevums. Plaknē atrodas $n \geq 2$ taišņu nogriežņi, tādi, ka katri divi nogriežņi krustojas stingri iekšā, un nekādi trīs no nogriežņiem nekrustojas vienā punktā. Džefs katrā no nogriežņiem izvēlas vienu no galapunktiem un novieto tajā vardi tā, lai tās skatiens būtu vērsts pretējā galapunkta virzienā. Tad viņš $n-1$ reizes noplaukšķina rokas. Pēc katra plaukšķa, katra varde nekavējoties aizlec nākamajā nogriežņu krustpunktā, kas atrodas tai priekšā uz tās nogriežņa. Vardes nekad nemaina savu lēcienu virzienu. Džefs vēlas izvietot vardes sākotnēji tādā veidā, lai nekādas divas vardes nekad neatrastos vienā un tajā pašā nogriežņu krustpunktā vienlaicīgi.

(a) Pierādīt, ka Džefs vienmēr var izvietot vardes tā, lai sasniegtu vēlamo, ja n ir nepāra.

(b) Pierādīt, ka Džefs nekad nevar izvietot vardes tā, lai sasniegtu vēlamo, ja n ir pāra.