Otrdiena, 2017. gada 18. jūlijs

Uzdevums 1. Katram veselam skaitlim $a_0 > 1$, definēsim virkni $a_0, a_1, a_2, \ldots$ kā:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{, ja } \sqrt{a_n} \text{ ir vesels skaitlis,} \\ a_n + 3 & \text{citos gadījumos,} \end{cases} \qquad \text{katram } n \geqslant 0.$$

Atrodiet visas a_0 vērtības, kurām eksistē tāds skaitlis A, ka $a_n = A$ bezgalīgi daudzām n vērtībām.

Uzdevums 2. $\mathbb{R}$ ir reālo skaitļu kopa. Atrodiet visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kurām, visiem reāliem x un y,

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

Uzdevums 3. Medniece un neredzams trusītis spēlē spēli Eiklīda plaknē. Trusīša sākuma atrašanās punkts A_0 sakrīt ar mednieces sākuma atrašanās punktu B_0. Pēc $n-1$ gājiena, trusītis atrodas punktā A_{n-1} un medniece atrodas punktā B_{n-1}. Gājienā numur n secīgi notiek sekojošas lietas.

(i) Trusītis, medniecei neredzot, pārvietojas uz punktu A_n tā, ka attālums starp A_{n-1} un A_n ir tieši 1.

(ii) Radars paziņo medniecei punktu P_n. Radars garantē tikai to, ka attālums starp P_n un A_n nepārsniedz 1.

(iii) Medniece, trusītim redzot, parvietojas uz punktu B_n tā, ka attālums starp B_{n-1} un B_n ir tieši 1.

Vai, lai kā nekustētos trusītis un kādus punktus nerādītu radars, medniece var izvēlēties savus gājienus tā, ka pēc 10^9 gājieniem viņa var garantēt, ka attālums starp viņu un trusīti nepārsniedz 100?

Trešdiena, 2017. gada 19. jūlijs

Uzdevums 4. Uz riņķa līnijas Ω atzīmēti dažādi punkti R un S tā, ka RS nav Ω diametrs. ℓ ir Ω pieskare punktā R. Punkts T ir atlikts tā, ka S ir nogriežņa RT viduspunkts. Punkts J ir atlikts uz riņķa līnijas Ω īsākā loka RS tā, ka trīsstūrim JST apvilktā riņķa līnija Γ krusto ℓ divos dažādos punktos. A ir Γ un ℓ krustpunkts, kurš atrodas tuvāk R. Taisne AJ krusto Ω otrreiz punktā K. Pierādiet, ka taisne KT ir Γ pieskare.

Uzdevums 5. Dots vesels skaitlis $N \geqslant 2$. $N(N+1)$ dažāda auguma futbolisti stāv ierindā. Marians Pahars grib no ierindas padzīt $N(N-1)$ futbolistus tā, ka paliek jauna ierinda no $2N$ futbolistiem un tajā izpildās sekojoši N nosacījumi:

(1) starp diviem garākajiem futbolistiem nestāv neviens cits futbolists,

(2) starp pēc auguma trešo un ceturto futbolistu nestāv neviens cits futbolists,

$\vdots$

(N) starp diviem īsākajiem futbolistiem nestāv neviens cits futbolists.

Pierādiet, ka tas vienmēr ir iespējams!

Uzdevums 6. Sakārtots veselu skaitļu pāris (x, y) ir *primitīvs punkts*, ja x un y lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Pierādiet, ka katrai galīgai primitīvu punktu kopai S eksistē tāds vesels pozitīvs skaitlis n un tādi veseli skaitļi $a_0, a_1, \ldots, a_n$, ka katram (x, y) pārim no S izpildās:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-7 punktiem