59th International Mathematical Olympiad
Cluj-Napoca Romania

Pirmdiena, 9. jūlijs, 2018

Uzdevums 1. Šaurleņķa trijstūrim ABC apvilkta riņķa līnija Γ. Punkti D un E pieder attiecīgi nogriežņiem AB un AC, tā ka $AD = AE$. Nogriežņu BD un CE vidusperpendikuli krusto Γ mazos lokus AB un AC attiecīgi punktos F un G.

Pierādiet, ka taisnes DE un FG ir paralēlas vai sakrīt.

Uzdevums 2. Atrodiet visus naturālus $n \geq 3$, kuriem eksistē reāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, tādi, ka $a_{n+1} = a_1$ un $a_{n+2} = a_2$, un

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

priekš $i = 1, 2, \ldots, n$.

Uzdevums 3. Par *anti-Paskāla trijstūri* sauksim tādu skaitļu izkārtojumu vienādsānu trijstūrī, ka, izņemot apakšējo rindu, katrs skaitlis ir divu zemākstāvošo skaitļu starpības absolūtā vērtība. Piemēram, šāds izkārtojums ir anti-Paskāla trijstūris ar četrām rindām, kurš satur visus naturālos skaitļus no 1 līdz 10:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Vai eksistē anti-Paskāla trijstūris ar 2018 rindām, kurš satur visus naturālos skaitļus no 1 līdz $1 + 2 + \cdots + 2018$?

Language: Latvian

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Katrs uzdevums tiks vērtēts ar maksimums 7 punktiem

Otrdiena, 10. jūlijs, 2018

Uzdevums 4. *Laucinš* ir tāds plaknes punkts (x, y), ka x un y ir naturāli skaitļi mazāki vai vienādi par 20.

Sākumā visi 400 lauciņi ir tukši. Anete un Benjaminš pēc kārtas liek uz lauciņiem akmentiņus, Anete sāk. Savā gājienā Anete novieto sarkanu akmentiņu uz tukša lauciņa tā, ka neviens attālums starp diviem sarkaniem akmentiņiem nav $\sqrt{5}$. Benjaminš savā gājienā novieto zilu akmentiņu jebkurā tukšā lauciņā. (Lauciņš ar zilu akmentiņu drīkst atrasties jebkurā attālumā no jebkura cita lauciņa.) Spēle beidzas, kad kāds spēlētājs nevar novietot akmentiņu.

Kāds ir lielākais K, kuram Anete var garantēti novietot K akmentiņus, neatkarīgi no Benjamiņa gājieniem?

Uzdevums 5. $a_1, a_2, \ldots$ ir bezgalīga naturālu skaitļu virkne. Pieņemsim, ka eksistē tāds naturāls $N > 1$, ka katram $n \geq N$, vērtība

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

ir vesels skaitlis.

Pierādiet, ka eksistē tāds naturāls M, ka $a_m = a_{m+1}$ visiem $m \geq M$.

Uzdevums 6. Izliektā četrstūrī $ABCD$ izpildās $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Punkts X atrodas $ABCD$ iekšpusē tā, ka

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{un} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Pierādiet, ka $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

Language: Latvian

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Katrs uzdevums tiks vērtēts ar maksimums 7 punktiem