



EGMO 2021  
GEORGIA  
KUTAISI

Language: **Latvian**

Day: **1**

*Svētdien, 2021. gada 11. aprīlī.*

**1. uzdevums.** Skaitlis 2021 ir *brīnišķīgs*. Ja kāds no skaitļu kopas  $\{m, 2m + 1, 3m\}$  elementiem ir brīnišķīgs katram naturālam skaitlim  $m$ , tad visi skaitļu kopas elementi ir brīnišķīgi. Vai skaitlis  $2021^{2021}$  ir brīnišķīgs?

**2. uzdevums.** Atrast visas tādas funkcijas  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ , kurām visiem racionāliem skaitļiem  $x$  un  $y$  izpildās

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2.$$

*Piezīme.* Ar  $\mathbb{Q}$  tiek apzīmēta racionālo skaitļu kopa.

**3. uzdevums.** Platleņķa trijstūra  $ABC$  platais leņķis ir  $\angle BAC$ . Leņķa  $\angle BAC$  ārējā bisektrise krusto trijstūra  $ABC$  augstumus, kas vilkti no virsotnēm  $B$  un  $C$ , attiecīgi punktos  $E$  un  $F$ . Punkti  $M$  un  $N$  atrodas attiecīgi uz nogriežņiem  $EC$  un  $FB$  tā, ka  $\angle EMA = \angle BCA$  un  $\angle ANF = \angle ABC$ . Pierādīt, ka punkti  $E, F, N, M$  atrodas uz vienas riņķa līnijas.

Language: Latvian

Risināšanas laiks:  $4\frac{1}{2}$  stundas.  
Katru uzdevumu vērtē ar 7 punktiem.

Lai nodrošinātu godīgas un patīkamas sacensības, lūdzu neapspriest un nepieminēt uzdevumus internetā vai sociālajos tīklos līdz otrdienas, 13. aprīļa, plkst. 15:00.



*Pirmdien, 2021. gada 12. aprīlī.*

**4. uzdevums.** Trijstūra  $ABC$  ievilktais riņķa līnijas centrs ir  $I$ , uz malas  $BC$  atlikts patvaļīgs punkts  $D$ . Taisne, kas vilkta caur punktu  $D$  un ir perpendikulāra  $BI$ , krusto  $CI$  punktā  $E$ . Taisne, kas vilkta caur punktu  $D$  un ir perpendikulāra  $CI$ , krusto  $BI$  punktā  $F$ . Pierādīt, ka punktam  $A$  simetrisks punkts attiecībā pret  $EF$  atrodas uz taisnes  $BC$ .

**5. uzdevums.** Plaknē atrodas īpašs punkts  $O$ , ko sauc par sākumpunktu. Dots, ka  $P$  ir tāda 2021 punktu kopa plaknē, ka

(i) nekādi trīs punkti no  $P$  neatrodas uz vienas taisnes,

(ii) nekādi divi punkti no  $P$  neatrodas uz taisnes, kas iet caur sākumpunktu.

Trijstūris ar virsotnēm no  $P$  ir *resns*, ja punkts  $O$  atrodas trijstūra iekšpusē un neatrodas uz trijstūra malām. Noteikt lielāko resnu trijstūru skaitu.

**6. uzdevums.** Vai eksistē tāds nenegatīvs vesels skaitlis  $a$ , ar kuru vienādojumam

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

ir vairāk nekā viens miljons dažādu atrisinājumu  $(m, n)$ , ja  $m$  un  $n$  ir naturāli skaitļi?

*Piezīme.* Ar  $\lfloor x \rfloor$  apzīmē reāla skaitļa  $x$  veselo daļu. Piemēram,  $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ ,  $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$ ,  $\lfloor 42 \rfloor = 42$  and  $\lfloor 0 \rfloor = 0$ .