

Svētdien, 2021. gada 11. aprīlī.

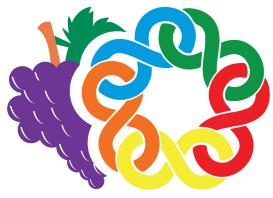
1. uzdevums. Skaitlis 2021 ir brīnišķīgs. Ja kāds no skaitļu kopas $\{m, 2m + 1, 3m\}$ elementiem ir brīnišķīgs katram naturālam skaitlim m , tad visi skaitļu kopas elementi ir brīnišķīgi. Vai skaitlis 2021^{2021} ir brīnišķīgs?

2. uzdevums. Atrast visas tādas funkcijas $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, kurām visiem racionāliem skaitļiem x un y izpildās

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2.$$

Piezīme. Ar \mathbb{Q} tiek apzīmēta racionālo skaitļu kopa.

3. uzdevums. Platlenķa trijstūra ABC platais leņķis ir $\angle BAC$. Leņķa $\angle BAC$ ārējā bisektrise krusto trijstūra ABC augstumus, kas vilkti no virsotnēm B un C , attiecīgi punktos E un F . Punkti M un N atrodas attiecīgi uz nogriežņiem EC un FB tā, ka $\angle EMA = \angle BCA$ un $\angle ANF = \angle ABC$. Pierādīt, ka punkti E, F, N, M atrodas uz vienas riņķa līnijas.



Pirmdien, 2021. gada 12. aprīlī.

4. uzdevums. Trijstūra ABC ievilktais riņķa līnijas centrs ir I , uz malas BC atlikts patvalīgs punkts D . Taisne, kas vilkta caur punktu D un ir perpendikulāra BI , krusto CI punktā E . Taisne, kas vilkta caur punktu D un ir perpendikulāra CI , krusto BI punktā F . Pierādīt, ka punktam A simetrisks punkts attiecībā pret EF atrodas uz taisnes BC .

5. uzdevums. Plaknē atrodas īpašs punkts O , ko sauc par sākumpunktu. Dots, ka P ir tāda 2021 punktu kopa plaknē, ka

- (i) nekādi trīs punkti no P neatrodas uz vienas taisnes,
- (ii) nekādi divi punkti no P neatrodas uz taisnes, kas iet caur sākumpunktu.

Trijstūris ar virsotnēm no P ir *resns*, ja punkts O atrodas trijstūra iekšpusē un neatrodas uz trijstūra malām. Noteikt lielāko resnu trijstūru skaitu.

6. uzdevums. Vai eksistē tāds nenegatīvs vesels skaitlis a , ar kuru vienādojumam

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

ir vairāk nekā viens miljons dažādu atrisinājumu (m, n) , ja m un n ir naturāli skaitļi?

Piezīme. Ar $\lfloor x \rfloor$ apzīmē reāla skaitļa x veselo daļu. Piemēram, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ and $\lfloor 0 \rfloor = 0$.