

Atlases sacensības komandu olimpiādei "Baltijas ceļš"

2024. gada 28. septembris, Rīga

1. diena (2)

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.

Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.

Atļauts izmantot tikai rakstāmpiederumus, lineālu un cirkuli.

1. Vai eksistē 2025 no nulles atšķirīgi skaitļi $a_1, a_2, \dots, a_{2024}, a_{2025}$ ar īpašību, ka $a_{2025} = a_1$ un

$$\sum_{i=1}^{2024} \left(a_i^2 + \frac{1}{a_i^2} \right) + 2 \sum_{i=1}^{2024} \frac{a_i}{a_{i+1}} + 2024 = 2 \sum_{i=1}^{2024} \left(a_i + \frac{1}{a_i} \right)?$$

2. Atrast lielāko naturālo skaitli k , kuram var atrast naturālu skaitli n un tādu n -tās pakāpes polinomu ar reāliem koeficientiem $P(x)$, ka polinomam $x^k P(x) + 1$ ir $k + n$ dažādas reālas saknes.

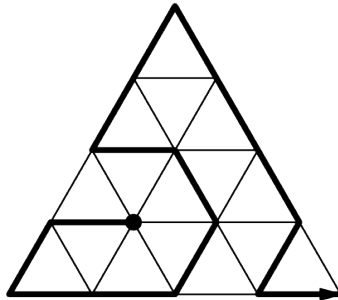
3. Atrast visas funkcijas $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurām visiem reāliem skaitļiem x un visiem polinomiem P ar reāliem koeficientiem izpildās apgalvojums: ja $P(f(x)) = 0$, tad $f(P(x)) = 0$.

4. Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$ un pozitīvi reāli skaitļi a_1, a_2, \dots, a_n , kuru summa ir vienāda ar 1. Apzīmēsim ar b skaitli $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$. Pierādīt, ka

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i - j)^2 a_i a_j \leq (n - b)(b - 1).$$

5. No vienādmalu trijstūriem ar malas garumu 1 ir salikts vienādmalu trijstūris ar malas garumu n . Gliemezis Turbo, rāpojot tikai pa dotajiem nogriežņiem, vēlas apmeklēt katru no $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ lielā trijstūra virsotnēm tieši vienu reizi. Kāds ir mazākais iespējamais pagriezienu skaits, kas Turbo ir jāveic sava ceļā?

Piemērs. Dotajā attēlā ir redzams ceļš ar 9 pagriezieniem, kas veikts trijstūrī ar malas garumu 4.



6. Uz reālo skaitļu ass atrodas m nogriežņi. Katram nogrieznim abi galapunkti pieder veselo skaitļu kopai $\{1, 2, \dots, 2024\}$ un visi nogriežņi ir dažāda garuma. Neviens nogrieznis pilnībā neatrodas cita nogriežņa iekšpusē, taču nogriežņi var daļēji pārklāties. Kāda ir lielākā iespējamā m vērtība?

7. Māris un Filips spēlē spēli uz 100×100 rūtiņu laukumu, viens pēc otra veicot gājienus, Māris sāk pirmais. Sākotnēji laukums ir tukšs. Savā gājienā spēlētājs izvēlas veselu skaitli no 1 līdz 100^2 , kas vēl nav uzrakstīts nevienā no rūtiņām un tukšu rūtiņu un ieraksta izvēlēto skaitli tajā. Kad tukšo rūtiņu vairs nav, Māris aprēķina skaitļu summu katrā rindā un viņa rezultāts ir lielākais no šiem 100 skaitļiem. Savukārt Filips aprēķina skaitļu summu katrā kolonnā un viņa rezultāts ir lielākais no šiem 100 skaitļiem. Māris uzvar, ja viņa rezultāts ir lielāks nekā Filipa rezultāts, savukārt Filips uzvar, ja viņa rezultāts ir lielāks nekā Māra rezultāts, bet, ja abi rezultāti ir vienādi, tad neviens spēlētājs neuzvar. Kurš spēlētājs (ja tāds ir) var, pareizi spēlējot, uzvarēt neatkarīgi no otra spēlētāja gājieniem?

8. Karaļvalstī ir n pilsētas un dažas no tām ir savienotas ar ceļu savā starpā. Zināms, ka starp katrām divām pilsētām ir ne vairāk kā viens ceļš un kopējais ceļu skaits karaļvalstī ir lielāks nekā $\frac{nk}{2}$, kur k ir naturāls skaitlis. Parādiet, ka pastāv $k + 2$ atšķirīgas pilsētas C_1, C_2, \dots, C_{k+2} ar īpašību, ka starp pilsētām C_i un C_{i+1} ir ceļš visiem $i = 1, 2, \dots, k + 1$.