

Atlases sacensības komandu olimpiādei "Baltijas ceļš"

2024. gada 29. septembris, Rīga

2. diena (2)

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.

Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.

Atļauts izmantot tikai rakstāmpiederumus, lineālu un cirkuli.

9. Dots šaurleņķu trijstūris ABC , kurā ir novilkts augstums AD . Punkti X un Y izvēlēti trijstūra iekšpusē tā, ka $\angle BXA + \angle ACB = 180^\circ$ un $\angle CYA + \angle ABC = 180^\circ$, kā arī $CD + AY = BD + AX$. Punkts M ir izvēlēts uz stara BX tā, ka punkts X atrodas uz nogriežņa BM un $XM = AC$, savukārt punkts N ir uz stara CY tā, ka punkts Y atrodas uz nogriežņa CN un $YN = AB$. Pierādīt, ka $AM = AN$.

10. Dots vienādsānu trijstūris ABC , kuram $AB = AC$. Ar ω apzīmēsim riņķa līniju ar centru punktā A un rādiusu AB . Trijstūra ABC augstums un mediāna, kas vilkti no virsotnes B , krusto ω punktos H un G . Taisne GH krusto taisni AC punktā X . Pierādīt, ka punkts C ir nogriežņa AX viduspunkts.

11. Punkts X atrodas taisnstūra $ABCD$ iekšpusē. Leņķu $\angle DAX$ un $\angle CBX$ bisektrises krustojas punktā P . Punkts Q izvēlēts tā, ka $\angle QAP = \angle QBP = 90^\circ$. Pierādīt, ka $PX = QX$.

12. Dots vienādsānu trijstūris ABC , kuram $AC = AB$. Punkti E un F atrodas attiecīgi uz malām AC , AB ar īpašību, ka $AE = BF$. Punkti D un A atrodas vienā un tajā pašā pusplaknē attiecībā pret taisni EF un $\triangle DFE \sim \triangle ABC$. Taisnes EF un BC krustojas punktā K . Pierādīt, ka taisne DK ir trijstūrim ABC apvilktais riņķa līnijas pieskare.

13. Dota funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kurai n dalās ar $f(n)$ visiem naturāliem n un visiem naturāliem skaitļiem m un n izpildās

$$\text{MKD}(nf(n^2), f(m^2)) = nf(mn).$$

Atrodiet izteiksmes $f(2024)$ lielāko iespējamo vērtību.

Piezīme. Ar $\text{MKD}(a, b)$ apzīmē skaitļu a, b mazāko kopīgo dalāmo. Piemēram, $\text{MKD}(15, 21) = 105$.

14. Ar $S(x)$ apzīmēsim naturāla skaitļa x ciparu summu. Pierādīt, ka katram naturālam skaitlim n eksistē tāds naturāls skaitlis m , ka $\frac{S(m^2)}{S(m)} = n$.

15. Dots naturāls skaitlis n un pirmskaitlis q . Pierādīt, ka skaitlis $n^q + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ nevar būt vienāds ar skaitļa q naturālu pakāpi.

16. Saliktu nepāra naturāla skaitli n sauksim par *latvisku*, ja visus tā dalītājus var sadalīt pāros tā, ka katrā pāri esošu skaitļu summa ir divnieka pakāpe un katrs dalītājs ir tieši vienā pāri. Atrast visus latviskus skaitļus.