Atlases sacensības komandu olimpiādei "Baltijas ceļš"

2023. gada 24. septembris, Rīga

2. diena (2)

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Atļauts izmantot tikai rakstāmpiederumus, lineālu un cirkuli.

9. Dots šaurleņķu trijstūris ABC, kurā novilkts augstums AD (punkts D atrodas uz malas BC). Ar H apzīmēts ABC augstumu krustpunkts, pie tam zināms, ka $AH = HD$. Ar ℓ apzīmēsim taisni, kura iet caur punktu H un pieskaras trijstūra BHC apvilktajai riņķa līnijai. Punkti S un T ir taisnes ℓ krustpunkti attiecīgi ar malām AB un AC. Nogriežņu BH un CH viduspunktus apzīmēsim attiecīgi ar punktiem M un N. Pierādīt, ka taisnes SM un TN ir paralēlas.

10. Dots dažādmalu trijstūris ABC. Punkti A_1, B_1, C_1 ir viduspunkti attiecīgi ABC apvilktās riņķa līnijas lokiem BC, CA, AB, kas nesatur attiecīgi punktus A, B, C. Punkti A_2, B_2, C_2 ir izvēlēti tā, ka četrstūri $AB_1A_2C_1, BA_1B_2C_1$ un $CA_1C_2B_1$ ir paralelogrami. Pierādīt, ka trijstūriem $A_2B_2C_2$ un ABC sakrīt apvilkto riņķa līniju centri.

11. Dažādmalu trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas centrs ir punkts O. Malu AB un AC vidusperpendikuli krusto augstumu, kas vilkts no virsotnes A pret malu BC, attiecīgi punktos P un Q. Punkts S ir trijstūra OPQ apvilktās riņķa līnijas centrs, savukārt punkts M ir malas BC viduspunkts. Pierādīt, ka $\angle BAS = \angle CAM$.

12. Trijstūra ABC malas BC viduspunkts ir punkts M. Leņķa BAC iekšējā bisektrise krusto malu BC punktā K un trijstūra ABC apvilkto riņķa līniju punktā $L \neq A$. Ar Ω apzīmēsim riņķa līniju, kuras diametrs ir BC. Pierādīt, ka, ja leņķa BAC ārējā bisektrise pieskaras Ω, tad trijstūrim KML apvilktā riņķa līnija arī pieskaras Ω.

13. Ar $P(x)$ apzīmēsim skaitļa x lielāko pirmreizinātāju. Pierādīt, ka eksistē naturāls skaitlis $n > 2^{2023}$ ar īpašību, ka visi skaitļi $P(n-1), P(n), P(n+1)$ ir mazāki nekā $\sqrt{n}$.

14. Doti naturāli skaitļi a, b ar īpašību, ka $a > b$. Zināms, ka $\mathrm{LKD}(a-b, ab+1) = \mathrm{LKD}(a+b, ab-1) = 1$. Pierādīt, ka skaitlis $(a-b)^2 + (ab+1)^2$ nav vesela skaitļa kvadrāts.

15. Atrast visus naturālu skaitļus pārus (a, p), kur p ir pirmskaitlis un kam izpildās īpašība — visiem naturāliem skaitļiem m un n, dalot skaitli a^{2^m} ar p^m, iegūst tādu pašu nenulles atlikumu, kā dalot skaitli a^{2^n} ar p^n.

16. Dots pirmskaitlis p, kas lielāks par 2. Māris ikvienam iespējamam skaitļu komplektam $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p)$, kur σ_k ir 1 vai -1 katram $1 \leqslant k \leqslant p$, aprēķina skaitļa

$$1 \cdot \sigma_1 + 2 \cdot \sigma_2 + \ldots + p \cdot \sigma_p$$

atlikumu, to dalot ar p. Ar N_j apzīmēsim komplektu skaitu, kuriem iegūtais skaitlis dod atlikumu j, kur $0 \leqslant j \leqslant p-1$. Pierādīt, ka starp skaitļiem $N_0, N_1, \ldots, N_{p-1}$ ir ne vairāk kā 2 atšķirīgas vērtības.