



Language: **Latvian**

Day: **1**

Sestdiena, 2024.gada 13.aprīlis

1.uzdevums. Uz tāfeles ir uzrakstīti divi dažādi veseli skaitļi u un v . Mēs izpildām soļu virkni. Katrā solī mēs veicam vienu no divām darbībām:

- (i) ja a un b ir dažādi veseli skaitļi uz tāfeles, tad mēs varam uzrakstīt $a + b$ uz tāfeles, ja šāds skaitlis tur nav uzrakstīts;
- (ii) ja a, b un c ir trīs dažādi veseli skaitļi uz tāfeles un ja vesels skaitlis x apmierina $ax^2 + bx + c = 0$, tad mēs varam uzrakstīt x uz tāfeles, ja šāds skaitlis tur nav uzrakstīts.

Noteikt visus tādus sākotnējos skaitļu pārus (u, v) , ka galu galā jebkurš vesels skaitlis tiks uzrakstīts uz tāfeles pēc galīga soļu skaita.

2.uzdevums. Ap trijstūri ABC , kur $AC > AB$, apvilka riņķa līnija Ω un atlikts iecentrs I . Trijstūrī ABC ievilkta riņķa līnija pieskaras BC, CA, AB attiecīgi punktos D, E, F . Uz mazākajiem ievilktais riņķa līnijas lokiem $\widehat{DF}$ un $\widehat{DE}$ atlikti attiecīgi tādi punkti X un Y , ka $\angle BXD = \angle DYC$. Taisne XY krusto taisni BC punktā K . Uz riņķa līnijas Ω atlikts tāds punkts T , ka KT ir riņķa līnijas Ω pieskare un punkts T atrodas tajā pašā taisnes BC pusē, kurā atrodas punkts A . Pierādīt, ka taisnes TD un AI krustojas uz Ω .

3.uzdevums. Mēs saucam naturālu skaitli n par *savdabīgu*, ja katram naturālam skaitļa n dalītājam d naturāls skaitlis $d(d + 1)$ dala skaitli $n(n + 1)$. Pierādīt, ka katriem četriem dažādiem savdabīgiem naturāliem skaitļiem A, B, C un D atbilst sekojošais:

$$\gcd(A, B, C, D) = 1.$$

Šeit $\gcd(A, B, C, D)$ ir lielākais kopīgais skaitļu A, B, C un D dalītājs.



Language: **Latvian**

Day: **2**

Svētdiena, 2024.gada 14.aprīlis

4.uzdevums. Naturālu skaitļu virknes $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ pāri (a_i, a_j) , kur $1 \leq i < j \leq n$, sauc par *interesantu*, ja eksistē tāds naturālu skaitļu pāris (a_k, a_ℓ) , kur $1 \leq k < \ell \leq n$, ka

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Katram $n \geq 3$ atrast lielāko iespējamo virknes ar garumu n interesanto skaitļu pāru skaitu.

5.uzdevums. Ar $\mathbb{N}$ apzīmēsim naturālu skaitļu kopu. Atrast visas tādas funkcijas $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, ka sekojošie nosacījumi ir patiesi visiem naturālu skaitļu pāriem (x, y) :

- (i) skaitļiem x un $f(x)$ ir viens un tas pats naturālo dalītāju skaits;
- (ii) ja skaitlis x nedala skaitli y un skaitlis y nedala skaitli x , tad

$$\gcd(f(x), f(y)) > f(\gcd(x, y)).$$

Šeit $\gcd(m, n)$ ir lielākais kopīgais skaitļu m un n dalītājs.

6.uzdevums. Atrast visus naturālos skaitļus d , kuriem eksistē tāds d -tās pakāpes polinoms P ar reāliem koeficientiem, ka lielākais dažādu vērtību skaits starp $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$ ir d .