IMO 2023 atlases atrisinājumi

1. diena

1.uzdevums Doti nenulles reāli skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zināms, ka

$$x_1 - \frac{1}{x_2} = x_2 - \frac{1}{x_3} = \ldots = x_{n-1} - \frac{1}{x_n} = x_n - \frac{1}{x_1}.$$

Atrast visus naturālus skaitļus $n \geq 2$, kuriem skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noteikti visi savā starpā ir vienādi.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka $n = 2k$ ir pāra skaitlis. Tad $x_1 = x_3 = \ldots x_{2k-1} = 2$ un $x_2 = x_4 = \ldots = x_{2k} = \frac{1}{2}$ apmierina uzdevuma nosacījumus. Patiešām:

$$x_{2i-1} - \frac{1}{x_{2i}} = 2 - 2 = 0$$
$$x_{2i} - \frac{1}{x_{2i+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

visiem i, kur indeksi ir ņemti pēc moduļa n. Tātad pāra n visiem skaitļiem nav noteikti jābūt vienādiem.

Aplūkosim gadījumu, kad n ir nepāra skaitlis. Ievērosim, ka:

$$x_k - \frac{1}{x_{k+1}} = x_{k+1} - \frac{1}{x_{k+2}} \implies (x_k - x_{k+1})x_{k+1}x_{k+2} = -(x_{k+1} - x_{k+2})$$

Līdz ar to varam iegūt, ka:

$$(x_1 - x_2)x_2x_3 = -(x_2 - x_3)$$
$$\ldots$$
$$(x_{n-1} - x_n)x_1x_n = -(x_n - x_1)$$
$$(x_n - x_1)x_1x_2 = -(x_1 - x_2)$$

Viegli redzēt, ka, ja $x_i = x_{i+1}$ kaut kādam i (indeksi pēc moduļa n), tad varam iegūt, ka $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Pretējā gadījumā visus vienādojumus var sareizināt kopā un saīsināt abas puses ar $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\ldots(x_n - x_1)$ un iegūt, ka:

$$(x_1x_2\ldots x_n)^2 = (-1)^n = -1$$

Tā kā reāla skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, tad ir iegūta pretruna. Līdz ar to noteikti $x_1 = x_2 \ldots = x_n$.

2.uzdevums Rindā ir novietoti 2022 spaiņi ar ūdeni, katrs no tiem nokrāsots zils vai sarkans. Zivtiņa Dora spēlē spēli. Vispirms viņa izvēlas spaini, kurā viņa sāks spēli. Katrā gājienā Dora var aizlēkt uz nākamo vai aiznākamo spaini pa labi. Jebkurā brīdī viņa var izvēlēties apstāties un beigt veikt gājienus. Spēle beidzas, kad Dora ir nonākusi pēdējā spainī rindas labajā malā vai arī viņa ir izvēlējusies pārstāt veikt gājienus. Doras spēlē iegūto punktu skaits ir modulis no starpības starp sarkano un zilo spaiņu skaitu, kuros viņa ir bijusi spēles laikā. Noteikt lielāko naturālo skaitli C, ka neatkarīgi no tā, kā spaiņi ir nokrāsoti, Dora var iegūt vismaz C punktus.

Piezīme. Zivtiņa vienmēr zina visu spaiņu krāsojumu, tostarp kādā krāsā ir spainis, kurā viņa šobrīd atrodas, kā arī kādā krāsā ir spaiņi, uz kuriem viņa var aizlēkt.

Atrisinājums. Atbilde ir $C = 506$.

Vispirms pierādīsim, ka Dora vienmēr var iegūt vismaz C punktus. Vienā no krāsām rindā ir vismaz $\frac{2022}{2} = 1011$ spaiņi; pieņemsim, ka tie ir sarkani. Dora spēlē šādi - viņa atrod pirmo sarkano spaini rindā no kreisās puses un sāk tajā spēli. Tālāk jebkurā spainī,kurā Dora atrodas, viņa aplūko nākamo spaini. Ja nākamais spainis pa labi ir sarkans, viņa lec uz to. Ja nākamais spainis pa labi ir zils, viņa lec uz aiznākamo spaini. Gadījumā, ja visi spaiņi rindā pa labi no Doras ir zili, tad viņa noslēdz spēli.

Skaidrs, ka ar šādu stratēģiju Dora spēles laikā nonāks katrā sarkanajā spainī, kuru ir vismaz 1011. Papildus tam redzams, ka Dora var nonākt zilā spainī tikai tad, ja viņa pārlēca vienam zilam spainim pāri. Tātad spēles laikā Dora paviesosies ne vairāk kā $\left\lfloor \frac{1011}{2} \right\rfloor = 505$ zilos spaiņos. Līdz ar to iegūtais punktu skaits būs vismaz $1011 - 505 = 506$ punkti, kas dod prasīto.

Tālāk aplūkojam šādu spaiņu krāsojumu:

$$(\{Z\}, \{S, S\}, \{Z, Z\}, \{S, S\}, \ldots, \{S, S\}, \{Z, Z\}, \{S\}).$$

Pierādīsim, ka pie šāda krāsojuma Dora nevar iegūt vairāk par 506 punktiem. Spaiņus, kas ierakstīti vienās figūriekavās, sauksim par *bloku*. Kopumā ir 1012 bloki - 506 no tiem ir sarkani spaiņi un 506 ir zili spaiņi (ir 2 bloki, kuriem katrā ir tieši viens spainis, bet visos pārējos ir divi spaiņi).

Pieņemsim, ka Dora spēles laikā pabija vairāk sarkanos spaiņos nekā zilos un attiecīgi paviesojās k blokos ar sarkaniem spaiņiem. Tā kā starp diviem secīgiem sarkanu spaiņu blokiem atrodas bloks ar diviem ziliem spaiņiem, lai nokļūtu no viena sarkanu spaiņu bloka uz nākamo pa labi, Dorai ir jāielec vismaz vienā zilā spainī. Katrā sarkanu spaiņu blokā Dora var paviesoties ne vairāk kā divos sarkanos spaiņos. Līdz ar to Dora kopumā varēja iegūt ne vairāk kā $2k - (k-1) = k+1$ punktus.

Ja $k < 506$, tad punktu skaits nepārsniedz 506. Ja $k = 506$, tad Dora ir pabijusi visos sarkanu spaiņu blokos. Taču bloks rindas galā satur tikai vienu sarkanu spaini, līdz ar to šajā gadījumā Dora no sarkano spaiņu blokiem varēja iegūt ne vairāk kā $2k-1$ punktus, līdz ar to kopumā viņa varēja iegūt ne vairāk kā $(2k-1) - (k-1) = k$ punktus, kur $k = 506$. Gadījumā, ja Dora pabija vairāk zilos spaiņos nekā sarkanos, pierādījums ir analoģisks. Tātad pie šāda krāsojuma Dora nevar iegūt vairāk par 506 punktiem, kas pierāda iegūto atbildi.

3.uzdevums Pierādīt, ka visiem naturāliem skaitļiem a, b, c eksistē naturāls skaitlis k ar īpašību, ka skaitļu $a^k + bc$, $b^k + ca$, $c^k + ab$ lielākais kopīgais dalītājs ir lielāks par 1.

Atrisinājums. Vispirms apskatīsim gadījumu, kad skaitlis $abc+1$ ir divnieka pakāpe. Tādā gadījumā skaitļi a, b, c visi ir nepāra. Pierādīsim, ka $k = 1$ apmierina nosacījumu. Ievērosim, ka $a+bc, b+ca, c+ab$ visi ir pāra skaitļi, kas nozīmē, ka to lielākais kopīgais dalītājs ir vismaz 2.

Tagad aplūkosim gadījumu, kad $abc + 1$ nav divnieka pakāpe. Tas nozīmē, ka eksistē nepāra pirmskaitlis p ar īpašību, ka $p \mid abc + 1$. Ievērosim, ka tādā gadījumā $\gcd(a, p) = \gcd(b, p) = \gcd(c, p) = 1$. Pierādīsim, ka $k = p - 2 > 0$ apmierina uzdevuma nosacījumus.

No Mazās Fermā teorēmas un no tā, ka $abc \equiv -1 \pmod p$, izriet:

$$\begin{aligned} a^{p-1} + abc &\equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod p \\ b^{p-1} + abc &\equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod p \\ c^{p-1} + abc &\equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod p \end{aligned}$$

Citiem vārdiem sakot, tas nozīmē, ka $p \mid a^{p-1} + abc = a(a^{p-2} + bc)$. Tā kā $\gcd(a, p) = 1$, tad secinām, ka $p \mid a^{p-2} + bc$. Analoģiski varam iegūt, ka $p \mid b^{p-2} + ca$, $p \mid c^{p-2} + ab$. Tas nozīmē, ka skaitļu $a^{p-2} + bc, b^{p-2} + ca, c^{p-2} + ab$ lielākais kopīgais dalītājs ir vismaz p.

4.uzdevums Ar O apzīmēsim trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas centru. Nogriežņu OB un OC vidusperpendikuli krusto malas AB un AC attiecīgi punktos $D \neq A$ un $E \neq A$. Noteikt, kāds ir lielākais iespējamais dažādu krustpunktu skaits taisnei BC un trijstūra ADE apvilktajai riņķa līnijai.

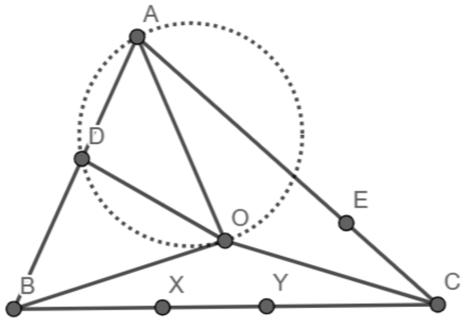
Atrisinājums. Lielākais iespējamais dažādo krustpunktu skaits taisnei BC un trijstūra ADE apvilktajai riņķa līnijai ir 1.

Vispirms apskatīsim gadījumu, kad $\angle BAC \neq 90°$. Tādā gadījumā punkts O neatrodas uz taisnes BC. Pieņemsim, ka trijstūra ADE apvilktā riņķa līnija krusto taisni BC divos dažādos punktos X un Y tā, ka punkts X atrodas tuvāk punktam B. Acīmredzami, ka vairāk krustpunkti nevar būt.

Ievērosim - tā kā $OA = OB$, tad $\angle OAB = \angle OBA$, un tā kā $BD = OD$, tad $\angle DBO = \angle OBA = \angle DOB$. Tas nozīmē, ka $\angle DOB = \angle BAO$, līdz ar to OB ir trijstūra ADO apvilktās riņķa līnijas pieskare. Analoģiski varam iegūt, ka OC ir trijstūra AOE apvilktās riņķa līnijas pieskare. Ievērosim, ka tādā gadījumā:

$$BO^2 = BD \cdot BA = BX \cdot BY$$
$$CO^2 = CE \cdot CA = CY \cdot CX$$

Tas nozīmē, ka OB un OC ir divas dažādas trijstūra XOY apvilktās riņķa līnijas pieskares punktā O. Taču riņķa līnijai vienā punktā var novilkt tikai vienu pieskari - pretruna. Tātad šajā gadījumā nevar būt vairāk par vienu krustpunktu.

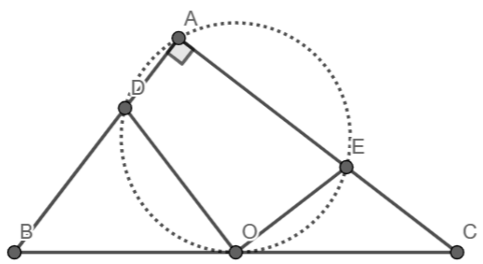


Tagad apskatīsim gadījumu, kad $\angle BAC = 90°$. Tas nozīmē, ka $O \in BC$. Ievērosim - tā kā $OA = OB$, tad $\angle OAB = \angle OBA$, un tā kā $BD = OD$, tad $\angle DBO = \angle OBA = \angle DOB$. Līdz ar to $\angle DOB = \angle BAO$, kas nozīmē, ka OB jeb BC ir trijstūra ADO apvilktās riņķa līnijas pieskare.

Pierādīsim, ka punkti A, D, O, E atrodas uz vienas riņķa līnijas, kas nozīmēs, ka BC ir pieskaras trijstūra ADE apvilktajai riņķa līnijai punktā O. Ievērosim, ka $\angle DOB = \angle ABC$ un $\angle COE = \angle ACB$. Tas nozīmē, ka:

$$\angle DOE = 180° - \angle DOB - \angle COE - 180° - \angle ABC - \angle ACB = 90°.$$

Līdz ar to $\angle BAC + \angle DOE = 180°$, kas nozīmē, ka punkti A, D, O, E atrodas uz vienas riņķa līnijas. Tātad šajā gadījumā tiek sasniegts tieši viens krustpunkts, kas atrisina uzdevumu.



2. diena

5.uzdevums Dota vienādsānu trapece $ABCD$, kurai $AD \parallel BC$ un $AD > BC$. Punkts X ir leņķa BAC bisektrises un malas BC krustpunkts. Ar E apzīmēsim taisnes BD krustpunktu ar taisni, kas ir paralēla leņķa CBD bisektrisei un vilkta caur punktu X. Savukārt ar F apzīmēsim taisnes DC krustpunktu ar taisni, kas ir paralēla leņķa DCB bisektrisei un vilkta caur punktu X. Pierādīt, ka punkti A, E, F, D atrodas uz vienas riņķa līnijas.

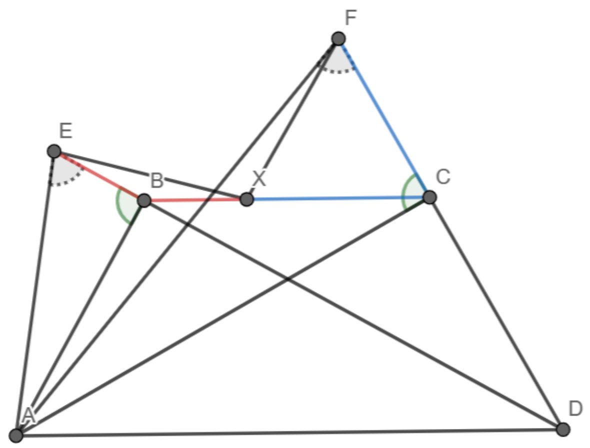
Atrisinājums. Ievērosim, ka, tā kā leņķa CBD bisektrise ir paralēla ar taisni XE, tad no kāpšļu leņķiem un iekšējiem šķērsleņķiem izriet:

$$\frac{1}{2}\angle CBD = \angle BEX = \angle EXB.$$

Tas nozīmē, ka $BX = EB$. Analoģiski varam iegūt, ka $CX = FC$. No bisektrises īpašības trijstūrī ABC un iegūtajām nogriežņu vienādībām izriet, ka:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BX}{CX} = \frac{EB}{CF}.$$

Tā kā $ABCD$ ir vienādsānu trapece, tad $\angle ABD = \angle ACD \implies \angle ABE = \angle ACF$. Varam secināt, ka $\triangle ACF \sim \triangle ABE$ pēc pazīmes *mlm*. Līdz ar to $\angle AEB = \angle AFC$, no kā izriet, ka punkti A, E, F, D atrodas uz vienas riņķa līnijas.



6.uzdevums Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$. Kopu S_n veido visi pirmskaitļu pāri (p, q), kuriem $p < q \leq n$. Katram kopas S_n elementam (p, q) ar *komponenšu summu* apzīmēsim lielumu $p + q$. Skaitlis P_n ir visu kopas S_n elementu *komponenšu summu* reizinājums. Atrast visus $n \geq 3$, kuriem skaitlis P_n dalās ar skaitli $n!$ (ar $n!$ apzīmē visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n).

Piemērs. Ja $n = 5$*, tad* $S_n = \{(2, 3), (2, 5), (3, 5)\}$*,* $P_n = (2 + 3)(2 + 5)(3 + 5) = 280$ *un* $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Atrisinājums. Apskatīsim lielāko pirmskaitli p, kas ir mazāks vai vienāds ar n. Tā kā $n!$ dala skaitli P_n, un p dala $n!$, tad vismaz viena elementa komponenšu summa dalās ar p. Apzīmēsim šo elementu ar (x, y). Ievērosim, ka $x + y < 2p$, līdz ar to $x + y = p$. Tā kā p ir nepāra skaitlis, tad secinām, ka viens no skaitļiem x, y ir 2, jo tas ir vienīgais pāra pirmskaitlis. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $x = 2$, tad $y = p - 2$ ir pirmskaitlis.

Atzīmēsim, ka $p - 2 < p \leq n$, tāpēc $p - 2$ dala $n!$ un attiecīgi vismaz viena elementa komponenšu summa dalās ar $p - 2$. Apzīmēsim šo elementu ar (z, t). Ievērosim, ka $z + t < 2p$, līdz ar to $z + t = p - 2$ vai $z + t = 2p - 4$. Pirmajā gadījumā varam secināt, ka, tā kā $p - 2$ ir nepāra pirmskaitlis, tad vismaz viens no skaitļiem z, t ir 2, jo tas ir vienīgais pāra pirmskaitlis. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka $z = 2$, tad $t = p - 4$ ir pirmskaitlis. Savukārt, ja $z + t = 2p - 4$, tad $z, t \in \{p, p - 2, p - 4\}$. Viegli redzēt, ka vismaz viens no tiem noteikti ir vienāds ar $p - 4$, teiksim t.

Abos gadījumos esam ieguvuši, ka skaitļi $p, p - 2, p - 4$ ir pirmskaitļi. Ievērosim, ka:

- Ja $p \equiv 1 \pmod 3$, tad $p - 4 \equiv 1 - 4 \equiv 0 \pmod 3$, līdz ar to $p - 4 = 3 \implies p = 7$. Tad atliek pārbaudīt skaitļus $n = 7, 8, 9, 10$, no kuriem iegūst, ka der tikai 7.
- Ja $p \equiv 2 \pmod 3$, tad $p - 2 \equiv 2 - 2 \equiv 0 \pmod 3$, līdz ar to $p - 2 = 3$, taču tādā gadījumā $p - 4 = 1$, kas nav pirmskaitlis.
- Ja $p \equiv 0 \pmod 3$, taču tādā gadījumā $p - 4 = -1$ nav pirmskaitlis.

Līdz ar to vienīgā n vērtība, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir $n = 7$.

7.uzdevums Ar $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ apzīmēsim nenegatīvo veselo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, kurām visiem $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ izpildās

$$f^a(b) - f^b(a) = a - b.$$

Piezīme. Ar $f^n(x)$ apzīmē funkcijas n-kārtēju pielietošanu argumentam x, tas ir, $f^0(x) = x$ un $f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$ visiem veseliem $k \geq 0$.

Atrisinājums. Ar $P(a, b)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. Ievērosim, ka no $P(a, 0)$ izriet:

$$f^a(0) - f^0(a) = a \implies f^a(0) = 2a$$

Ar matemātiskās indukcijas metodi pierādīsim, ka $f(a) = a + 2$ katram nenegatīvam pāra skaitlim a.

Indukcijas bāze: Tā kā $f^a(0) = 2a$, tad, ievietojot $a = 1$, iegūsim, ka $f(0) = 2$.
Induktīvais pieņēmums: Pieņemsim, ka nenegatīvam veselam skaitlim $2k$ ir spēkā $f(2k) = 2k + 2$.
Induktīvā pāreja: Ievērosim, ka $f^k(0) = 2k$, līdz ar to $f^{k+1}(0) = f(2k) = 2k + 2$. No otras puses, mēs zinām, ka $2k + 4 = f^{k+2}(0) = f(f^{k+1}(0)) = f(2k + 2)$.

No matemātiskās indukcijas principa secinām, ka katram nenegatīvam pāra skaitlim a ir spēkā $f(a) = a + 2 \implies f^n(a) = 2(n - 1) + a + 2 = 2n + a$. Aplūkosim $P(a, 2)$:

$$f^a(2) - f(f(a)) = a - 2 \implies 2a + 2 - f(f(a)) = a - 2 \implies f(f(a)) = a + 4$$

Ievērosim, ka $f(f(f(a))) = f(a + 4) = f(a) + 4$. Ar matemātisko indukciju viegli pierādīt, ka $f(4n+1) = 4n+f(1)$ un $f(4n+3) = 4n+f(3)$ katram naturālam skaitlim n. Apskatīsim $P(1, 3)$:

$$f(3) - f(f(f(1))) = -2 \implies f(3) - f(5) = -2 \implies f(3) - (f(1) + 4) = -2 \implies$$
$$\implies f(3) - f(1) = 2.$$

Secinām, ka tādā gadījumā $f(4n + 3) = 4n + f(3) = 4n + 2 + f(1) = 4n + 3 + f(1) - 1$ un $f(4n+1) = 4n+1+f(1)-1$. Apzīmēsim $c = f(1)-1$, tad esam ieguvuši, ka visiem nepāra skaitļiem x ir spēkā $f(x) = x + c$.

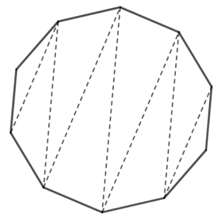
Aplūkosim $P(a, b)$, kur a, b abi ir nepāra skaitļi:

$$\begin{aligned} f^a(b) - f^b(a) &= a - b \\ b + ac - a - bc &= a - b \\ (c - 2)(a - b) &= 0 \end{aligned}$$

Tā kā tas izpildās visiem nenegatīviem nepāra skaitļiem a, b, tad secinām, ka $c = 2$. Līdz ar to visiem nenegatīviem skaitļiem x ir spēkā $f(x) = x + 2$. Šī funkcija apmierina uzdevuma nosacījumus

$$\begin{aligned} f^a(b) - f^b(a) &= a - b \\ b + 2a - a - 2b &= a - b \\ a - b &= a - b. \end{aligned}$$

8.uzdevums Dots izliekts n-stūris, kurš ar $n-3$ nekrustojošām diagonālēm ir sadalīts trijstūros; apzīmēsim šādu sadalījumu ar P. Noteiktam sadalījumam P sauksim dažu izvēlētu n-stūra virsotņu kopu par *neatkarīgu*, ja nekādas divas šīs kopas virsotnes nav savienotas ar malu vai diagonāli. Ar $i(P)$ apzīmēsim visu dažādo *neatkarīgo* kopu skaitu, ko var izvēlēties pie sadalījuma P. Pierādīt, ka n-stūrim mazākais $i(P)$ tiek sasniegts pie zig-zag dalījuma trijstūros (piemēru 10-stūrim skat. zīmējumā).



Atrisinājums. Viegli ievērot, ka jebkurā n-stūra dalījumā trijstūros eksistē vismaz divas virsotnes, no kurām neiziet neviena diagonāle. Ja tā nebūtu, tad katram trijstūrim ne vairāk kā viena mala būtu n-stūra mala. Bet katra diagonāle ir mala tieši 2 trijstūriem, un katram trijstūrim ir vismaz 2 diagonāļu malas, līdz ar to tad varētu būt ne vairāk kā $\frac{2(n-3)}{2} = n-3$ trijstūri un attiecīgi arī n-stūra malas - pretruna. Tātad šīs virsotnes bez diagonālēm eksistē.

Aplūkosim zig-zag dalījumu n-stūrim un ar x_n apzīmēsim dažādo *neatkarīgo* kopu skaitu. Ar A apzīmēsim virsotni, no kuras neiziet neviena diagonāle. Ja *neatkarīga* kopa nesatur A, tad, izdzēšot virsotni A, tiks iegūts zig-zag sadalīts $(n-1)$-stūris. Ja *neatkarīga* kopa satur A, tad šī kopa nesatur A blakus esošās divas virsotnes, bet var acīmredzami saturēt jebkuru no pārējām virsotnēm. Izdzēšot šīs trīs virsotnes (un diagonāles, kas no tām iziet), tiks iegūts zig-zag sadalīts $(n-3)$-stūris, kurā pie katras *neatkarīgās* kopas būs pievienota arī A. Tā kā visas *neatkarīgās* kopas vai nu satur A, vai nesatur, tad varam iegūt rekurentu sakarību

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-3}.$$

Tālāk aplūkosim patvaļīgu n-stūra sadalījumu P. Uztversim n-stūra virsotnes kā grafa virsotnes un attiecīgi malas un diagonāles kā grafa šķautnes. Pierādīsim, ka $i(P) \geq x_n$ ar matemātisko indukciju. Indukcijas bāzi $n \leq 6$ var viegli pārbaudīt, aplūkojot katru gadījumu.

Pieņemsim, ka uzdevumā prasītais izpildās visiem trijstūros sadalītiem izliektiem daudzstūriem ar mazāk kā n virsotnēm. Aplūkojam P kā grafu - tajā būs vismaz divas virsotnes ar pakāpi 2 (no risinājuma sākumā pierādītā). Ar A apzīmēsim vienu no šīm virsotnēm un ar u, v apzīmēsim A kaimiņus.

Aplūkojam *neatkarīgās* kopas, kuras nesatur A. To skaits ir vienāds ar neatkarīgo kopu skaitu grafā $P \backslash A$. No induktīvā pieņēmuma to skaits ir vismaz x_{n-1}.

Tagad aplūkojam tās neatkarīgās kopas, kuras satur A. Vienīgais ierobežojums šīm kopām ir tāds, ka tās nevar saturēt u, v, līdz ar to šo kopu skaits ir vienāds ar *neatkarīgo* kopu skaitu grafā $H = P \backslash \{A, u, v\}$ ar $n-3$ virsotnēm. Bet vispārīgi grafs H var arī neatbilst sadalījumam trijstūros, jo, dzēšot u un v šķautnes, var rasties četrstūri vai citi daudzstūri. Taču ir iespējams H uzvilkt vēl dažas papildus šķautnes, lai rastos grafs H^*, kurš atbilstu sadalījumam trijstūros.

Varam ievērot, ka papildu šķautņu pievienošana grafā palielina kaimiņu skaitu, līdz ar to *neatkarīgo* kopu skaits var tikai palikt tāds pats vai samazināties. Tātad $i(H) \geq i(H^*) \geq x_{n-3}$ no induktīvā pieņēmuma. Līdz ar to iegūstam, ka

$$i(P) = i(P \backslash A) + i(H) \geq x_{n-1} + x_{n-3} = x_n.$$

No tā varam secināt, ka jebkuram n-stūra sadalījumam trijstūros $i(P)$ ir vismaz tikpat, cik zig-zag dalījumā, tātad minimums tiek sasniegts pie zig-zag dalījuma. Ar to arī varam noslēgt induktīvo pāreju, kas pierāda uzdevumā prasīto.

3. diena

1.uzdevums Dota bezgalīga pozitīvu reālu skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots$ ar īpašību, ka

$$(a_{n+1})^2 + a_n a_{n+2} \leqslant a_n + a_{n+2}$$

visiem naturāliem skaitļiem n. Pierādīt, ka $a_{2023} \leqslant 1$.

Atrisinājums. Ievērosim, ka dotā nevienādība ir ekvivalenta ar

$$a_{n+1}^2 - 1 \leq a_n + a_{n+2} - 1 - a_n a_{n+2} = (1 - a_n)(a_{n+2} - 1)$$

Pieņemsim, ka eksistē tāds naturāls skaitlis n ar īpašību, ka $a_{n+1} > 1$ un $a_{n+2} > 1$. Tā kā

$$(1 - a_n)(a_{n+2} - 1) \geq a_{n+1}^2 - 1 \geq 0,$$

tad secinām, ka $1 - a_n \geq 0$. Ievērosim, ka $1 + a_{n+2} > 1 > 1 - a_n \geq 0$, līdz ar to varam rakstīt, ka:

$$a_{n+2}^2 - 1 = (a_{n+2} + 1)(a_{n+2} - 1) > (1 - a_n)(a_{n+2} - 1) \geq a_{n+1}^2 - 1 \geq 0$$

No otras puses mēs zinām, ka

$$(a_{n+1} - 1)(1 - a_{n+3}) = (1 - a_{n+1})(a_{n+3} - 1) \geq a_{n+2}^2 - 1 \geq 0$$

Tā kā $a_{n+1} \geq 1$, tad secinām, ka $1 - a_{n+3} \geq 0$, līdz ar to varam rakstīt, ka $1 + a_{n+1} > 1 > 1 - a_{n+3} \geq 0$, kas nozīmē

$$a_{n+1}^2 - 1 = (a_{n+1} + 1)(a_{n+1} - 1) > (a_{n+1} - 1)(1 - a_{n+3}) \geq a_{n+2}^2 - 1$$

Esam ieguvuši, ka

$$a_{n+1}^2 - 1 > a_{n+2}^2 - 1 > a_{n+1}^2 - 1,$$

kas ir acīmredzama pretruna. Līdz ar to mūsu pieņēmums ir aplams.

Pieņemsim, ka $a_{2023} > 1$, tad no iepriekš iegūtā rezultāta izriet, ka $a_{2022} \leq 1$ un $a_{2024} \leq 1$. Taču tādā gadījumā:

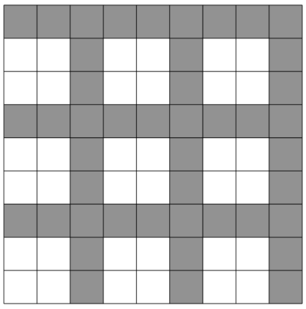
$$0 < a_{2023}^2 - 1 = (1 - a_{2022})(a_{2024} - 1) \leq 0$$

Tā ir pretruna, līdz ar to mūsu pieņēmums ir aplams, kas nozīmē, ka $a_{2023} \leq 1$, kas arī bija jāpierāda.

2.uzdevums Dārzā, kurš iekārtots 2022×2022 rūtiņu laukuma formā, katrā rūtiņā aug koks. Sākotnēji katra koka garums ir 0 metri. Dārznieks un mežcirtējs dārzā spēlē spēli. Dārznieks veic pirmo gājienu, un spēlētāji gājienus veic secīgi.
Dārznieks savā gājienā izvēlas vienu dārza rūtiņu. Visi koki, kas atrodas dārznieka izvēlētajā rūtiņā un kaimiņu rūtiņās, kam ir kopīga mala vai stūris ar izvēlēto rūtiņu (tātad kaimiņu rūtiņu ir ne vairāk kā astoņas), izaug par 1 metru garāki.
Mežcirtējs savā gājienā izvēlas četras dažādas dārza rūtiņas. Katrā no izvēlētajām rūtiņām koka garums ciršanas rezultātā samazinās par 1 metru. Ja kādā no izvēlētajām rūtiņām koka garums pirms mežcirtēja gājiena bija 0 metri, tad šajā rūtiņā koka garums nemainās (nekļūst negatīvs).
Sauksim koku par *iespaidīgu*, ja tā garums ir vismaz 10^6 metri. Noteikt lielāko *iespaidīgu* koku skaitu, ko dārznieks var vienlaicīgi iegūt dārzā pēc galīga gājienu skaita neatkarīgi no tā, kā savus gājienus veic mežcirtējs.

Atrisinājums. Atbilde ir $5 \cdot \left(\frac{2022}{3}\right)^2 = 2271380$ iespaidīgu koku. Pierādīsim, ka vispārīgā gadījumā $3N \times 3N$ dārzā atbilde ir $5N^2$.

Vispirms pierādīsim, ka mežcirtējs var garantēti neļaut dārzā izaudzēt vairāk par $5N^2$ koku. Sanumurējam dārza rindas un kolonnas secīgi un nokrāsojam visas tās rūtiņas, kurām vismaz viena no koordinātām dalās ar 3. Piemērs 9×9 dārzam redzams attēlā.



Viegli pārbaudīt, ka jebkurā 3×3 kvadrātā ir tieši 4 neiekrāsotas rūtiņas. Tā kā ikvienā gājienā dārznieks izvēlas patvaļīgu 3×3 kvadrātu vai kādu daļu no tā, tad mežcirtējs var izvēlētajā kvadrātā cirst kokus, kuri atrodas neiekrāsotajās izvēlētā kvadrāta rūtiņās. Tādā veidā tiek garantēts, ka visās neiekrāsotajās rūtiņās pēc mežcirtēja gājiena koku garums ir 0, acīmredzami tiem nekļūstot iespaidīgiem. Viegli saskaitīt, ka neiekrāsotu rūtiņu $3N \times 3N$ laukumā ir $4N^2$, līdz ar to iespaidīgo koku skaits nevar pārsniegt $9N^2 - 4N^2 = 5N^2$.

Tālāk jāpierāda, ka dārznieks var izaudzēt dārzā vismaz $5N^2$ iespaidīgu koku neatkarīgi no mežcirtēja gājieniem. Apzīmējam $M = C_9^5$. Ievērojam, ka, dārzniekam veicot vienā 3×3 kvadrātā gājienus, katrā gājienā kvadrātā veidojas 5 koku izkārtojums, kuriem garums pieaug par 1 metru (ja mežcirtējs veic gājienus citā laukuma daļā, tad var gadīties, ka šādu koku ir vairāk - tad izvēlamies kaut kurus 5 no tiem, kuriem palielinājās garums), bet pārējiem šī kvadrāta kokiem garums palielinās vai paliek tāds pats. Tā kā ir M šādu izkārtojumu, tad vienā un tajā pašā kvadrātā pēc Ml gājieniem būs bijis kāds izkārtojums, kas izvēlēts vismaz l reižu - tātad 5 šī izkārtojuma koki būs sasnieguši vismaz garumu l.

Dārznieka stratēģija, lai sasniegtu vēlamo, ir vispirms sadalīt $3N \times 3N$ dārzu blakus esošos 3×3 kvadrātos (kā lielu rūtiņu laukumu) un sanumurēt tos $0, 1, \ldots, N^2 - 1$. Tad secīgi pēc kārtas (no lielākā numura uz mazāko) kvadrātā $i = N^2 - 1, N^2 - 2 \ldots, 0$ dārznieks izvēlas centrālo rūtiņu $10^6 M(M+1)^i$ reižu. No iepriekš iegūtā tas garantē, ka kvadrātā ar numuru i būs vismaz 5 koki, kuru garums ir vismaz $10^6(M+1)^i$. Ievērosim, ka pēc gājienu veikšanas i-tajā kvadrātā dārznieks citur veiks vēl $10^6 M(M+1)^{i-1} + \cdots + 10^6 M(M+1)^0 = 10^6((M+1)^i - 1)$ gājienu. Līdz ar to, ja visos turpmākajos gājienos tiek cirsts kāds i-tā kvadrāta koks ar garumu vismaz $10^6(M+1)^i$, tad pēc visiem dārznieka gājieniem tā garums būs joprojām vismaz $10^6(M+1)^i - 10^6((M+1)^i - 1) = 10^6$ metru. Tas nozīmē, ka pēc visiem dārznieka gājieniem katrā no N^2 izvēlētajiem 3×3 kvadrātiem būs vismaz 5 koki ar garumu vismaz 10^6, tātad visā dārzā būs vismaz $5N^2$ iespaidīgu koku, kas pierāda atbildi.

3.uzdevums Dažādmalu šaurleņķu trijstūrī ABC punkts F ir augstuma pamats no virsotnes A. Punkts P ir patvaļīgs punkts uz nogriežņa AF, pie tam $P \neq A$ un $P \neq F$. Caur punktu P vilktas paralēlas taisnes malām AC, AB, kas attiecīgi krusto malu BC punktos D un E. Punkti $X \neq A$ un $Y \neq A$ izvēlēti attiecīgi uz trijstūru ABD un ACE apvilktajām riņķa līnijām tā, ka $DA = DX$ un $EA = EY$. Pierādīt, ka punkti B, C, X, Y atrodas uz vienas riņķa līnijas.

Atrisinājums. No Talesa teorēmas redzam, ka:

$$\frac{FE}{FB} = \frac{FP}{FA} = \frac{FD}{FC} \implies FE \cdot FC = FB \cdot FD.$$

Tas nozīmē, ka punktam F ir vienāda pakāpe pret trijstūru ACE un ABD apvilktajām riņķa līnijām. Ja ar Z apzīmējam šo divu riņķa līniju krustpunktu, kas ir atšķirīgs no punkta A, tad esam ieguvuši, ka punkts $F \in AZ$.

Pieņemsim, ka taisne BX krusto taisni AF punktā T_1. Tad izmantojot $DA = DX$, varam iegūt, ka:

$$\angle DAX = \angle DBT_1 = \angle AXD = \angle ABD.$$

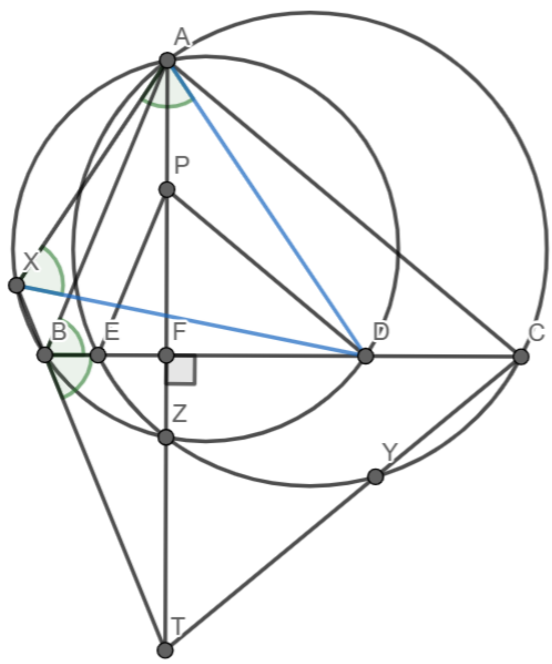
Tā kā $AF \perp BC$, tad secinām, ka $AF = FT_1$.

Pieņemsim, ka taisne CY krusto taisni AF punktā T_2, tad analoģiski varam iegūt, ka $AF = FT_2$. Tā kā taisnes BX un CY ir simetriskas attiecīgi AB un AC pret taisni BC, tas nozīmē, ka to krustpunkti ar AF atrodas vienā pusē taisnei BC. Tātad punkti T_1 un T_2 sakrīt, līdz ar to esam pierādījuši, ka taisnes BX, AF, CY krustojas vienā punktā, ko apzīmēsim ar T.

Tagad no punkta pakāpes varam iegūt, ka:

$$TB \cdot TX = TA \cdot TZ = TC \cdot TY.$$

Secinām, ka $TB \cdot TX = TC \cdot TY$, tātad punkti B, C, X, Y atrodas uz vienas riņķa līnijas.



4.uzdevums Sauksim naturālu skaitli n par *latvisku*, ja var atrast tādu naturālu skaitli m un pirmskaitļus $1 < p < q$, ka $q - p \mid m$ un

$$p \mid n^m + 1$$
$$q \mid n^m + 1.$$

Atrast visus n, kas ir *latviski.*

Piezīme. Ja vesels skaitlis b dalās ar veselu skaitli a, tad tas tiek pierakstīts kā $a \mid b$.

Atrisinājums. Pierādīsim, ka visi nepāra skaitļi $n > 1$ ir *latviski.* Izvēlēsimies $p = 2$ un kaut kādu nepāra pirmskaitli q ar īpašību, ka $q \mid n^2+1$. Tāds eksistē, jo $n^2+1 \equiv 2 \pmod 4$, līdz ar to skaitlis $n^2 + 1$ nav divnieka pakāpe. Piedevām paņemsim, ka $m = 2(q - 2)$, tad viegli redzēt, ka

$$n^2 \equiv -1 \pmod q \implies n^{2(q-2)} \equiv (-1)^{q-2} \equiv -1 \pmod q \implies q \mid n^m + 1$$

Savukārt tā kā n ir nepāra skaitlis, tad $2 \mid n^m + 1$, līdz ar to secinām, ka visi nepāra $n > 1$ ir *latviski.* Ja $n = 1$, tad vienīgie iespējamie pirmskaitļi ir $p = q = 2$, kas neizpilda uzdevuma nosacījumus, tādēļ šī vērtība neder.

Tagad aplūkosim gadījumu, kad n ir pāra skaitlis, tad $n^m + 1$ ir nepāra skaitlis, līdz ar to p un q ir nepāra pirmskaitļi. Ievērosim, ka

$$n^m \equiv -1 \pmod p \implies n^{2m} \equiv 1 \pmod p$$

Apzīmēsim $d = \text{ord}_p n$ (mazākais naturālais skaitlis d, kam izpildās $n^d \equiv 1 \pmod p$), tad mēs zinām, ka, tā kā $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, tad $d \mid 2m$ un $d \mid p - 1$.

Pierādīsim, ka d nevar būt m dalītājs. Pieņemsim, ka tas tā ir, tad eksistē naturāls skaitlis k ar īpašību, ka $dk = m$, līdz ar to

$$n^d \equiv 1 \pmod p \implies -1 \equiv n^m = n^{dk} = 1^k \equiv 1 \pmod p \implies 2 \equiv 0 \pmod p \implies p = 2,$$

kas ir acīmredzama pretruna. Līdz ar to d nav m dalītājs, taču $d \mid 2m$, kas nozīmē $\nu_2(d) = \nu_2(2m) = \nu_2(m) + 1$. Tā kā $d \mid p - 1$, tad secinām, ka $\nu_2(p - 1) \geq \nu_2(m) + 1$ (šeit ar $\nu_2(n)$ tiek apzīmēta augstākā skaitļa 2 pakāpe, ar ko dalās n, jeb t.s. valuācija).

Veicot analoģiskus spriedumus, varam iegūt, ka $\nu_2(q - 1) \geq \nu_2(m) + 1$. Tādā gadījumā secinām, ka

$$\nu_2(q - p) = \nu_2(q - 1 - (p - 1)) \geq \min(\nu_2(q - 1), \nu_2(p - 1)) \geq \nu_2(m) + 1.$$

No otras puses mēs zinām, ka, tā kā $q - p \mid m$, tad $\nu_2(m) \geq \nu_2(q - p) \geq \nu_2(m) + 1$, kas ir pretruna.