

IMO 2024 atlasē atrisinājumi

1. diena

1. uzdevums Burvji Harijs un Rons spēlē spēli $(2n + 1) \times (2n + 1)$ rūtiņu laukumā, kur n ir naturāls skaitlis. Apkārt laukumam visās pusēs ir bezgalīgs lavas ezers, un sākotnēji laukuma centrālās rūtiņas vidū sēž varde. Burvji pamīšus viens pēc otra veic gājienus, pie tam pirmo gājienu izdara Harijs. Katrā gājienā burvis apbur vardi, liekot tai lēkt d vienības burvja izvēlētajā virzienā, kas ir paralēls kādai no laukuma malām. Spēles sākumā d vērtība ir 1, un pēc katra vardenes lēciena d palielinās par 1. Spēlē zaudē tas burvis, pēc kura gājiena varde ielec lavā. Katrai n vērtībai noteikt, kurš burvis var garantēt uzvaru spēlē.

Atrisinājums. Rons var garantēt uzvaru katrai n vērtībai.

Aplūkojam gājienu pārus Harijs-Rons, sākot ar pirmo pāri sākumā. Ja Harijs liek vardei lēkt d vienības uz augšu, uz leju, pa labi vai pa kreisi, tad Rons atbild uz Harija gājienam, liekot vardei attiecīgi lēkt $d + 1$ vienības uz leju, uz augšu, pa kreisi vai pa labi (būtībā pretējā virzienā Harija gājienam). Ievērosim, ka pēc šāda gājienu pāra varde būs pakustējusies uz kādu no blakus rūtiņām tai rūtiņai, kurā varde bija pirms aplūkotā gājienu pāra.

Pamatosim, ka šāda stratēģija garantē, ka Rons varēs veikt vismaz n gājienu. Rons nevarētu veikt gājienam, ja tā rūtiņa, kurā būtu jānosēžas vardei pēc Rona gājiena, atrastos ārpus laukuma malām. Sākumā varde atrodas centrā, un acīmredzami īsākais rūtiņu attālums no centra līdz laukuma ārpusēi ir $n + 1$ rūtiņas (ejot uz blakus rūtiņām). Atcerēsimies, ka pēc Rona izvēlētajā stratēģijas pēc katra gājienam pāra varde ir pakustējusies vienu rūtiņu kaut kādā virzienā (salīdzinot ar situāciju pirms gājienam pāra). Tātad ātrākais brīdis, kad Rona stratēģija varētu likt vardei izlēkt no laukuma, ir Rona $n + 1$. gājienam. Tas nozīmē, ka ar izvēlēto stratēģiju Rons varēs garantēti veikt vismaz n gājienu, nezaudējot spēli.

Aplūkosim, kas notiek līdz Harija $n + 1$. gājienam. Ja kādā brīdī pēc Harija gājienam varde izlec ārā no laukuma, tad Rons ir uzvarējis. Ja tas nav noticis, tad iepriekš noskaidrojām, ka Rons pirmajos n gājienam pāros ar savu stratēģiju arī nezaudēs spēli. Taču tādā gadījumā Harijam savā $n + 1$. gājienam vardei jāliek lēkt $1 + n + n = 2n + 1$ rūtiņas uz priekšu, kas garantēti jebkurā virzienā iziet ārpus laukuma, jo tas ir laukuma malas garums. Tātad arī šajā gadījumā Harijs zaudēs, un tādēļ Rons garantēs uzvaru jebkurā gadījumā.

2.uzdevums Atrast visas bezgalīgas periodiskas pozitīvu reālu skaitļu virknes x_1, x_2, x_3, \dots ar īpašību, ka

$$x_{n+2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n \right).$$

Piezīme. Reālu skaitļu virkne x_1, x_2, x_3, \dots ir periodiska, ja eksistē tāds naturāls skaitlis T , ka visiem naturāliem skaitļiem n izpildās, ka $x_{n+T} = x_n$.

Atrisinājums. Vienīgās virknes, kuras apmierina uzdevuma nosacījumus, ir definētas ar $x_1 = t$ un $x_2 = \frac{1}{t}$, kur t ir pozitīvs reāls skaitlis. Viegli pārlicināties, ka tādā gadījumā $x_{2i-1} = t$ un $x_{2i} = \frac{1}{t}$ visiem naturāliem skaitļiem i . Šī virkne ir periodiska un tās perioda garums ir 2.

Pārveidosim doto sakarību

$$x_{n+2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n \right) \implies x_{n+2}x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 + x_nx_{n+1} \right)$$

Definēsim virkni $y_n = x_nx_{n+1}$. Tādā gadījumā esam ieguvuši, ka

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 + y_n \right)$$

visiem naturāliem skaitļiem n .

Pieņemsim, ka sākotnējās virknes perioda garums ir T , kas nozīmē, ka $x_{n+T} = x_n$ visiem naturāliem skaitļiem n . Tādā gadījumā

$$y_{n+T} = x_{n+T+1}x_{n+T} = x_{n+1}x_n = y_n$$

Secinām, ka virkne y_1, y_2, y_3, \dots arī ir periodiska. Aplūkosim visus iespējamus gadījumus.

- Ja $y_1 < 1$, tad ar indukcijas palīdzību varam pierādīt, ka $y_n < 1$. Patiešām, ja $y_n < 1$, tad

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 + y_n \right) < \frac{1}{2} \left(1 + 1 \right) = 1$$

Ievērosim, ka ar indukcijas palīdzību tādā gadījumā arī varam pierādīt, ka virkne y_1, y_2, y_3, \dots ir stingri augoša, jo

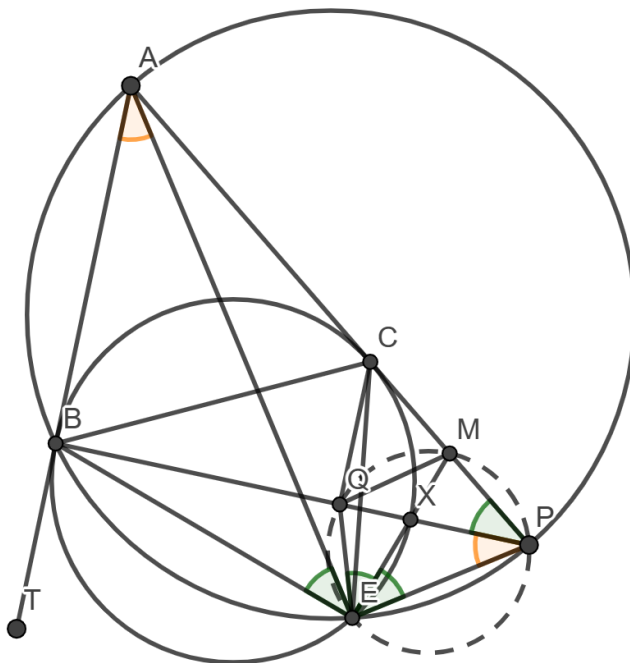
$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 + y_n \right) > \frac{1}{2} \left(y_n + y_n \right) = y_n$$

Taču virkne y_1, y_2, y_3, \dots nevar būt stingri augoša, jo tā ir periodiska.

- Ja $y_1 > 1$, tad līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā varam pierādīt, ka $y_n > 1$ visiem naturāliem skaitļiem n un virkne y_1, y_2, y_3, \dots ir stingri dilstoša, kas ir pretrunā ar virknes periodiskumu.
- Ja $y_1 = 1$, tad $x_1x_2 = 1$, kas nozīmē, ka $x_1 = t$ un $x_2 = \frac{1}{t}$ kaut kādam no nulles atšķirīgam reālam skaitlim t , ko mēs aplūkojam risinājumā sākumā.

Visi iespējamie gadījumi ir apskatīti.

3.uzdevums Dota riņķa līnija ω un punkts A tās ārpusē. Novilkta pieskares AB un AC . Uz stara AC aiz punkta C ir izvēlēts patvaļīgs punkts P . Trijstūra ABP apvilktā riņķa līnija krusto ω punktā $E \neq B$. Uz nogriežņa BP ir izvēlēts tāds punkts Q , ka $\angle PEQ = 2\angle APB$. Pierādīt, ka $CQ \perp BP$.



Atrisinājums. Pieņemsim, ka leņķa PEQ bisektrise krusto taisni BP punktā X un taisni AC punktā M . No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $\angle PEX = \angle QEX = \angle APB = \angle MPQ = \alpha$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $EQMP$ var apvilkt riņķa līniju. Tā kā EM ir leņķa PEQ bisektrise, tad $MP = MQ$.

Apgalvojums. Punkts X atrodas uz riņķa līnijas ω .

Pierādījums. Tas ir ekvivalents pierādīt tam, ka ap četrstūri $BCXE$ var apvilkt riņķa līniju. Apzīmēsim leņķi $\angle BPE = \beta$. No trijstūra PXE ārējā leņķa īpašības izriet, ka $\angle BXE = \alpha + \beta$. Tā kā ap četrstūri $ABEP$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle AEB = \angle APB = \alpha$ un $\angle BPE = \angle BAE = \beta$. Uz taisnes AB aiz punkta B atlieksim punktu T . No trijstūra ABE ārējā leņķa īpašības izriet, ka $\angle TBE = \alpha + \beta$. Tā kā taisne AB ir ω pieskares, tad $\angle TBE = \angle BCE$. Secinām, ka $\angle BCE = \angle BXE = \alpha + \beta$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $BXCE$ var apvilkt riņķa līniju, kas arī bija jāpierāda.

Ievērosim, ka, tā kā ap četrstūri $EQMP$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle PEX = \angle PQM = \angle QEX = \alpha$. Tas nozīmē, ka MQ ir trijstūra QXE apvilktās riņķa līnijas pieskares. No punkta pakāpes izriet, ka

$$MC^2 = MX \cdot ME = MQ^2$$

Secinām, ka $MQ = MC$. Iepriekš ieguvām, ka $MP = MQ$, tāpēc punkts M ir QCP apvilktās riņķa līnijas centrs. Tā kā punkts M atrodas uz taisnes AC , tad CP ir diametrs, tāpēc $CQ \perp BP$, kas arī bija jāpierāda.

4. uzdevums Doti $2n$ naturāli skaitļi $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Zināms, ka $n+1$ skaitļi

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n,$$

$$b_1 a_2 a_3 \cdots a_n,$$

$$b_1 b_2 a_3 \cdots a_n,$$

...

$$b_1 b_2 b_3 \cdots b_n$$

tieši šādā secībā veido augošu aritmētisku progresiju. Noteikt mazāko iespējamo šīs aritmētiskās progresijas diferenci.

Atrisinājums. Mazākā iespējamā diferences vērtība ir $n!$, ko var sasniegt, izvēloties $a_i = i$ un $b_i = i + 1$ visiem $1 \leq i \leq n$. Tādā gadījumā

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 1 \cdot 2 \cdots n = n!$$

$$b_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 2 \cdot 2 \cdots n = 2n!$$

$$b_1 b_2 a_3 \cdots a_n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdots n = 3n!$$

...

$$b_1 b_2 b_3 \cdots b_n = 2 \cdot 3 \cdots (n+1) = (n+1)!$$

Viegli pārlicināties, ka šie $n+1$ skaitļi veido augošu aritmētisku progresiju ar diferenci $n!$.

Tagad pierādīsim, ka mazāka diferences vērtība nav iespējama. Pieņemsim, ka mazākā iespējamā diferences vērtība ir D , tad no uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$D = (b_1 - a_1) a_2 a_3 \cdots a_n = b_1 (b_2 - a_2) a_3 a_4 \cdots a_n = \cdots = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} (b_n - a_n)$$

Tā kā dotā aritmētiska progresija ir stingri augoša, tad $D > 0$, kas nozīmē, ka $b_i > a_i$ visiem $1 \leq i \leq n$. Ievērosim, ka no iegūtās identitātes izriet, ka

$$(b_i - a_i) a_{i+1} = b_i (b_{i+1} - a_{i+1})$$

visiem $1 \leq i \leq n-1$. Ja $g_i = \gcd(a_i, b_i) > 1$, tad, aizstājot skaitļus a_i un b_i ar attiecīgi $\frac{a_i}{g_i}$ un $\frac{b_i}{g_i}$, iegūsim mazāku diferences vērtību. Līdz ar to secinām, ka $\gcd(a_i, b_i) = 1$. Tādā gadījumā $\gcd(b_i - a_i, b_i) = 1$, kas nozīmē, ka $b_i \mid a_{i+1}$ un $a_{i+1} \mid b_i$. Secinām, ka $b_i = a_{i+1}$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka

$$b_1 = a_2, b_2 = a_3, \dots, b_{n-1} = a_n.$$

Tā kā $b_i > a_i$, tad secinām, ka

$$a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = a_3 < \dots < a_{n-1} < b_{n-1} = a_n$$

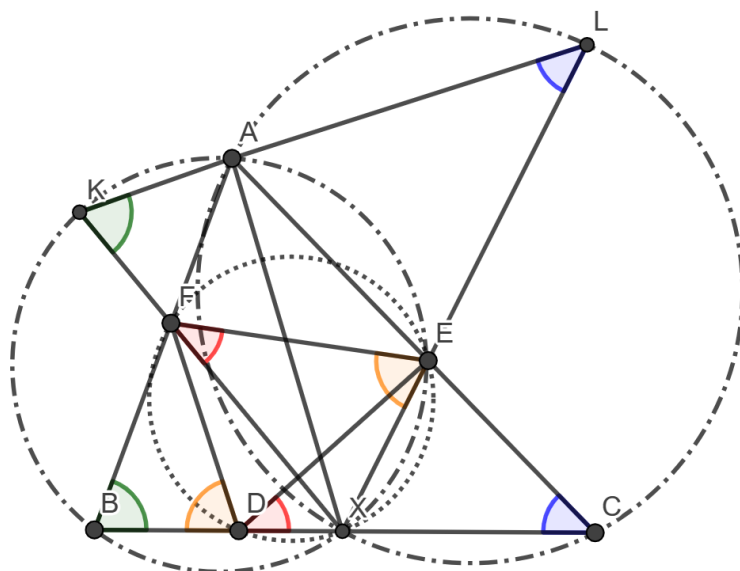
Līdz ar to

$$D = (b_1 - a_1) a_2 a_3 \cdots a_n \geq 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!,$$

jo a_i virkni veido atšķirīgi naturāli skaitļi, kur mazākās iespējamās vērtības ir $1, 2, \dots$. Tas dod prasīto.

2.diena

1.uzdevums Uz trijstūra ABC malām BC , AC , AB ir izvēlēti attiecīgi punkti D , E , F . Punkti K un L atrodas tajā pašā plaknes pusē attiecībā pret taisni FE kā punkts A . Zināms, ka punkti K un C atrodas dažādās plaknes pusēs attiecībā pret taisni AB un punkti B un L atrodas dažādās plaknes pusēs attiecībā pret taisni AC . Izpildās $\angle KFE = \angle BDE$, $\angle LEF = \angle FDC$, $\angle AKF = \angle ABC$ un $\angle ALE = \angle ACB$. Pierādīt, ka $\angle AKB + \angle ALC = 180^\circ$.



Atrisinājums. Pieņemsim, ka taisnes KF un LE krusto taisni BC punktos X un Y . Pieņemsim, ka $X \neq Y$. Ievērosim, ka

$$\begin{aligned}\angle KFE = \angle BDE &\implies \angle EFX = \angle EDX \\ \angle LEF = \angle FDC &\implies \angle EFY = \angle EDY\end{aligned}$$

kā atbilstošu leņķu blakusleņķi. Tas nozīmē, ka ap četrstūriem $EFDX$ un $FEDY$ var apvilkt riņķa līnijas. Taču šiem diviem četrstūriem trīs punkti ir kopīgi, tāpēc punkti E, F, Y, D, X atrodas uz vienas riņķa līnijas. Tādā gadījumā ap trijstūri EFD apvilktā riņķa līnija krusto taisni BC trīs punktos – Y, D, X , kas ir pretruna, jo riņķa līnija var krustot taisni ne vairāk kā 2 punktos.

Secinām, ka $X = Y$ jeb to, ka taisnes KF, LE un BC krustojas vienā punktā X , kas var sakrist ar D , bet tas neietekmē nekādi tālākos argumentos. Ievērosim, ka

$$\begin{aligned}\angle AKX = \angle AKF = \angle ABC = \angle ABX \\ \angle ALY = \angle ALE = \angle ACB = \angle ACY\end{aligned}$$

Tas nozīmē, ka ap četrstūriem $AKBX$ un $AXCL$ var apvilkt riņķa līnijas. Tādā gadījumā $\angle AKB = \angle AXC$ un $\angle AXC + \angle ALC = 180^\circ$, kas nozīmē, ka

$$\angle AKB = 180^\circ - \angle ALC \implies \angle AKB + \angle ALC = 180^\circ,$$

kas arī bija jāpierāda.

2. uzdevums Māris pa apli sarakstīja 2024 naturālus skaitļus un aprēķināja katru divu blakusesošu skaitļu reizinājumu. Vai var gadīties, ka Māris ieguva skaitļus $1!, 2!, \dots, 2024!$ kaut kādā secībā?

Piezīme. Ar $n!$ apzīmē visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n . Piemēram, ja $n = 5$, tad $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

1. atrisinājums. Nē, nevar. Pieņemsim, ka Māris sarakstīja pa apli skaitļus $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$. Tādā gadījumā kopas $\{a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_n a_1\}$ elementi sakrīt ar kopas $\{1!, 2!, \dots, 2024!\}$ (ne obligāti secība ir vienāda). Tādā gadījumā abu kopu elementu reizinājumi ir vienādi

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^2 = 1! \cdot 2! \cdots 2024!$$

Pierādīsim, ka skaitlis $1! \cdot 2! \cdots 2024!$ nav vesela skaitļa kvadrāts. Ievērosim, ka

$$\nu_2((2i+1)!) = \nu_2((2i)!) + \nu_2(2i+1) = \nu_2((2i)!)$$

Tas nozīmē, ka skaitļu pāros $(2!, 3!), (4!, 5!), \dots, (2022!, 2023!)$ abiem skaitļiem ir vienāda valuācija pēc 2. Līdz ar to secinām, ka skaitlis $\nu_2(1! \cdot 2! \cdots 2023!)$ ir pāra skaitlis. No Ležandra formulas izriet, ka

$$\nu_2(2024!) = 2024 - s_2(2024) = 2024 - s_2(11111101000) = 2024 - 7 = 2017,$$

kas ir nepāra skaitlis. Secinām, ka skaitlis $\nu_2(1! \cdot 2! \cdots 2024!)$ ir nepāra, kas nozīmē, ka $1! \cdot 2! \cdots 2024!$ nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

2. atrisinājums. Līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā mums pietiek pierādīt, ka skaitlis $1! \cdot 2! \cdots 2024!$ nav vesela skaitļa kvadrāts. Viegli pārlicināties, ka skaitlis 1009 ir pirmskaitlis. Ievērosim, ka

$$\begin{aligned} \nu_{1009}(1!) &= \nu_{1009}(2!) = \dots = \nu_{1009}(1008!) = 0 \\ \nu_{1009}(1009!) &= \nu_{1009}(1010!) = \dots = \nu_{1009}(2017!) = 1 \\ \nu_{1009}(2018!) &= \nu_{1009}(2019!) = \dots = \nu_{1009}(2024!) = 2 \end{aligned}$$

Tas nozīmē, ka

$$\nu_{1009}(1! \cdot 2! \cdots 2024!) = 1 \cdot 1009 + 7 \cdot 2 = 1023,$$

kas ir nepāra skaitlis. Tas nozīmē, ka skaitlis $1! \cdot 2! \cdots 2024!$ nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

3. uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kurām visiem naturāliem skaitļiem m un n izpildās

$$f^{f(n)}(m) + mn = f(m)f(n).$$

Piezīme. Ar $f^n(x)$ apzīmē funkcijas n -kārtēju pielietošanu argumentam x , tas ir, $f^0(x) = x$ un $f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$ visiem veseliem $k \geq 0$.

Atrisinājums. Ar $P(m, n)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu.

Pierādīsim, ka funkcija f ir injektīva. Pieņemsim, ka $f(a) = f(b)$. Tādā gadījumā no $P(1, a)$ un $P(1, b)$ izriet, ka

$$\begin{aligned} f^{f(1)}(a) + a &= f(1)f(a) \implies a = f^{f(1)}(a) - f(1)f(a) \\ f^{f(1)}(b) + b &= f(1)f(b) \implies b = f^{f(1)}(b) - f(1)f(b) \end{aligned}$$

Tā kā $f(a) = f(b)$, tad secinām, ka $a = f^{f(1)}(a) - f(1)f(a) = f^{f(1)}(b) - f(1)f(b) = b$, kas nozīmē, ka funkcija ir injektīva.

Apgalvojums. Neeksistē tāds naturāls skaitlis a ar īpašību, ka $f(a) = 1$.

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka tāds naturāls skaitlis a eksistē. Tādā gadījumā no $P(a, a)$ izriet, ka

$$\begin{aligned} f^{f(a)}(a) + a^2 &= f(a)f(a) \\ f(a) + a^2 &= 1 \\ 1 + a^2 &= 1 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

Tas ir pretrunā ar pieņēmumu, ka skaitlis a ir naturāls.

Salīdzinot savā starpā $P(m, n)$ un $P(n, m)$, secinām, ka

$$f^{f(n)}(m) = f^{f(m)}(n)$$

Ievietojot pēdējā sakarībā $n = 1$, iegūsim, ka $f^{f(1)}(m) = f^{f(m)}(1)$. Ievērosim, ka neeksistē tāds naturāls skaitlis m , ka $f(1) > f(m)$, jo pretējā gadījumā no injektīvātes izriet, ka $f^{f(1)-f(m)}(m) = 1$, kas ir pretrunā ar pierādīto apgalvojumu. Secinām, ka visiem naturāliem skaitļiem m ir spēkā, ka $f(m) \geq f(1)$. Piedevām nevienādība ir nestingra tad un tikai tad, ja $m = 1$, jo funkcija f ir injektīva.

Tā kā funkcija f ir injektīva un $f(m) > f(1)$ visiem $m > 1$, tad secinām, ka

$$f^{f(m)-f(1)}(1) = m$$

Tas nozīmē, ka funkcija f ir surjektīva visiem $m > 1$. Tādā gadījumā eksistē tāds reāls skaitlis b , ka $f(b) = 2$. Ja $b > 1$, tad mēs zinām, ka $2 = f(b) > f(1)$, kas nozīmē, ka vienīgā pieļaujamā $f(1)$ vērtība ir 1, kas ir pretrunā ar pierādīto apgalvojumu. Secinām, ka $b = 1$, līdz ar to $f(1) = 2$.

No $P(1, m)$ izriet, ka

$$f(f(m)) + m = 2f(m)$$

Ar matemātiskās indukcijas palīdzību pierādīsim, ka $f(n) = n + 1$ visiem naturāliem skaitļiem k . Indukcijas bāze mums jau ir. Induktīvais pieņēmums ir, ka $f(k) = k + 1$. Pēdējā sakarībā m aizvietojo ar k , iegūsim, ka

$$\begin{aligned}f(f(k)) + k &= 2f(k) \\f(k + 1) + k &= 2k + 2 \\f(k + 1) &= k + 2\end{aligned}$$

Induktīvā pārēja ir izpildīta, tāpēc $f(n) = n + 1$ visiem naturāliem skaitļiem n .

Šajā gadījumā pārbaudīt, ka iegūtā funkcija patiešām der, nav tik triviāli kā citos funkcionāl-vienādojumos. Var viegli pierādīt ar indukcijas palīdzību, ka $f^a(b) = a + b$. Tas nozīmē, ka

$$\begin{aligned}f^{f(n)}(m) + mn &= f(m)f(n) \\f^{n+1}(m) + mn &= (m + 1)(n + 1) \\m + n + 1 + mn &= mn + m + n + 1\end{aligned}$$

Secinām, ka iegūtā funkcija patiešām der.

4. uzdevums Noteikt lielāko naturālo skaitli L ar īpašību, ka eksistē naturālu skaitļu virkne a_1, a_2, \dots, a_L , kurai piemīt abas minētās īpašības:

- katrs virknes loceklis nepārsniedz 2^{2023} ;
- neeksistē secīgu virknes locekļu apakšvirkne a_i, a_{i+1}, \dots, a_j (kur $1 \leq i \leq j \leq L$), kam var izvēlēties veselus skaitļus $s_i, s_{i+1}, \dots, s_j \in \{-1, 1\}$ tā, ka

$$s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1} + \dots + s_j a_j = 0.$$

Atrisinājums. Atbilde ir $L = 2^{2024} - 1$. Pierādīsim vispārīgāku apgalvojumu, ka atbilde ir $2^{k+1} - 1$, ja maksimālā virknes locekļu vērtība ir $n = 2^k$.

Sākotnēji pierādīsim, ka L vērtība nevar būt $2n$ vai lielāka. Pieņemsim, ka eksistē naturālu skaitļu, kas nepārsniedz n , virkne ar garumu $L = 2n$, kam izpildās uzdevuma nosacījumi. Definējam zīmju virkni s_1, s_2, \dots, s_L rekursīvi:

- ja $s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_{i-1} a_{i-1} \leq 0$, tad $s_i = +1$;
- ja $s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_{i-1} a_{i-1} \geq 1$, tad $s_i = -1$.

Tādā gadījumā varam definēt virkni

$$b_i = \sum_{j=1}^i s_j a_j = s_1 a_1 + \dots + s_i a_i$$

un aplūkot virkni $0 = b_0, b_1, b_2, \dots, b_L$.

Apgalvojums. Visiem virknes b_i locekļiem izpildās $-n + 1 \leq b_i \leq n$.

Pierādījums. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju. Bāzes gadījumā b_0 tas acīmredzami izpildās. Pieņemsim, ka $-n + 1 \leq b_{k-1} \leq n$, un pierādīsim to arī loceklim b_k , kur k ir naturāls.

- ja $-n + 1 \leq b_{k-1} \leq 0$, tad $b_k = b_{k-1} + a_k$ no s_k definīcijas. Tādā gadījumā

$$-n + 1 \leq b_{k-1} < b_{k-1} + a_k \leq b_{k-1} + n \leq n.$$

- ja $1 \leq b_{k-1} \leq n$, tad $b_k = b_{k-1} - a_k$ no s_k definīcijas. Tādā gadījumā

$$-n + 1 \leq b_{k-1} - n \leq b_{k-1} - a_k < b_{k-1} \leq n.$$

Tas pierāda apgalvojumu abiem iespējamajiem gadījumiem.

Ievērosim, ka intervālā $[-n + 1; n]$ ir $2n$ veseli skaitļi, kamēr virknē b_0, b_1, \dots, b_L ir vismaz $2n + 1$ locekļi, kas ir veseli skaitļi (no pieņēmuma $L + 1 \geq 2n + 1$). Tad no Dirihlē principa varēs atrast divus dažādus virknes locekļus b_{i-1} un b_j ($1 \leq i \leq j \leq n$), kuriem sakrīt to vērtība. Tādā gadījumā

$$s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1} + \dots + s_j a_j = b_j - b_{i-1} = 0,$$

kas ir pretrunā ar pieņēmumu, tādēļ virkne ar garumu $L \geq 2n$ nevar apmierināt uzdevuma nosacījumus.

Tālāk parādīsim, ka eksistē virkne ar garumu $L = 2n - 1$, kura apmierina uzdevuma nosacījumus.

Ar $\nu_2(x)$ apzīmēsim skaitļa x valuāciju pirmskaitlim 2 jeb augstāko divnieka pakāpi, ar ko dalās x . Aplūkojam virkni $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$, kas definēta

$$a_i = 2^{k-\nu_2(i)}.$$

Piemēram, kad $k = 2$ un attiecīgi $n = 2^k = 4$, tad virkne ir

$$4, 2, 4, 1, 4, 2, 4.$$

Viegli redzēt, ka virkne satur naturālus skaitļus intervālā no 1 līdz $n = 2^k$, jo $0 \leq \nu_2(i) \leq k$ visiem $1 \leq i \leq 2^{k+1} - 1$.

Pierādīsim, ka aplūkotā virkne nesatur secīgu virknes locekļu apakšvirkni, kurai var izvēlēties zīmes, lai tās summa būtu 0. Aplūkojam skaitļus $1 \leq i \leq j \leq 2n - 1$. Ievērosim, ka starp skaitļiem

$$i, i + 1, \dots, j - 1, j$$

tikai viens skaitlis pieņem maksimālo valuācijas pēc 2 vērtību jeb ir tikai viens skaitlis x , kam $\nu_2(x) = \max(\nu_2(i), \dots, \nu_2(j)) = v$. Pieņemsim pretējo, ka starp skaitļiem eksistē vismaz divi, kuri dalās ar 2^v . Tādā gadījumā varētu atrast divus skaitļus formā $k \cdot 2^v$ un $(k + 1) \cdot 2^v$, no kuriem viens dalītos ar vismaz 2^{v+1} , kas ir pretrunā ar maksimalitāti.

Tātad ir starp aplūkotajiem skaitļiem ir tieši viens x ($i \leq x \leq j$), kuram $\nu_2(x) = v$. Tas nozīmē, ka visi virknes locekļi $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j$ dalās ar 2^{k-v+1} , izņemot $a_x = 2^{k-v}$. Tas pats arī izpildās skaitļiem $s_i a_i, s_{i+1} a_{i+1}, \dots, s_j a_j$, tādēļ šo skaitļu summa nevar būt vienāda ar 0, jo tad tai būtu jādalās ar 2^{k-v+1} .

Secinām, ka uzrādītajai virknei izpildās visas uzdevumā prasītās īpašības, tādēļ lielākā iespējamā $L \leq 2n - 1$ vērtība ir sasniedzama.

3.diena

1.uzdevums Atrast lielāko reālo skaitli M ar īpašību, ka visām bezgalīgām skaitļu virknēm x_0, x_1, x_2, \dots , kam vienlaicīgi ir spēkā nosacījumi

- $x_0 = 1$ un $x_1 = 3$;
- $x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} \geq 3x_n - x_{n+1}$ visiem $n \geq 1$,

izpildās nevienādība

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > M$$

visiem veseliem skaitļiem $n \geq 0$.

Atrisinājums. Vispirms pierādīsim, ka skaitlis M nevar būt lielāks par 2. Aplūkosim virkni $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2, x_3, \dots$, kurai visiem naturāliem skaitļiem $n \geq 1$ izpildās

$$x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} = 3x_n - x_{n+1}.$$

Tādā gadījumā izpildās arī sakarība

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = 3x_{n+1} - x_{n+2}$$

Atņemot no otrās sakarības pirmo sakarību, iegūstam, ka

$$x_n = 4x_{n+1} - 3x_n - x_{n+2} \implies x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$$

Tā ir homogēna otrās kārtas rekurence, kuras atrisinājums ir $x_n = 2^n \cdot (An + B)$, kur A un B ir konstantes. Tā kā $x_0 = 1$ un $x_1 = 3$, tad iegūstam, ka $A = \frac{1}{2}$ un $B = 1$, kas nozīmē, ka $x_n = 2^{n-1} \cdot (n + 2)$. Tādā gadījumā

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^n \cdot (n + 2)}{2^{n-1} \cdot (n + 1)} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n + 1}\right) = 2 + \frac{2}{n + 1}$$

Pieņemsim, ka $M = 2 + \epsilon$. Tādā gadījumā pietiekami lielam skaitlim n ir spēkā, ka $\frac{2}{n+1} < \epsilon$, kas nozīmē, ka $\frac{x_{n+1}}{x_n} < M$ – pretruna.

Tagad pierādīsim, ka visām virknēm, kuras apmierina uzdevuma nosacījumus, izpildās $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 2$ visiem $n \geq 0$. Pārveidosim doto nevienādību

$$x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n \geq 2x_n - x_{n+1} \quad (\star)$$

Ar indukciju pa n pierādīsim, ka visiem naturāliem skaitļiem $n \geq 1$ izpildās

$$x_n > x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} \quad (\star\star)$$

Indukcijas bāze acīmredzami izpildās. Pieņemam, ka nevienādība izpildās pie $n = k$, tas ir,

$$\begin{aligned} x_k &> x_0 + x_1 + \dots + x_{k-1} \\ 2x_k - x_{k+1} &> x_0 + x_1 + \dots + x_{k-1} + x_k - x_{k+1} \end{aligned}$$

No nevienādības (\star) un induktīvā pieņēmuma izriet, ka

$$0 > x_0 + x_1 + \dots + x_{k-1} - x_k \geq 2x_k - x_{k+1}$$

Secinām, ka tādā gadījumā

$$0 > 2x_k - x_{k+1} \geq x_0 + x_1 + \dots + x_k - x_{k+1}$$

Līdz ar to esam ieguvuši, ka

$$\begin{aligned} 0 &> x_0 + x_1 + \dots + x_k - x_{k+1} \\ x_{k+1} &> x_1 + \dots + x_k \end{aligned}$$

Induktīvā pārēja ir izpildīta, līdz ar to secinām, ka nevienādība (★★) ir patiesa visiem naturāliem skaitļiem $n \geq 1$. No tās izriet, ka

$$0 > x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n \geq 2x_n - x_{n+1},$$

kas nozīmē, ka $0 > 2x_n - x_{n+1}$. Atzīmēsim, ka visi virknes locekļi ir pozitīvi skaitļi, kas induktīvi izriet no nevienādības (★★). Līdz ar to nevienādībai $0 > 2x_n - x_{n+1}$ izdalot abas puses ar x_n , kas ir pozitīvs skaitlis un līdz ar to neizmaina nevienādības zīmi, tiek iegūta ekvivalenta nevienādība $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 2$, kas arī bija jāpierāda. Secinām, ka lielākā iespējamā M vērtība ir 2.

2.uzdevums Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$. Kalvim ir $1 \times n^2$ rūtiņu loksne, kura sastāv no n^2 rūtiņām, pie tam i -tajā rūtiņā ir ierakstīts skaitlis i visiem indeksiem $1 \leq i \leq n^2$. Kalvis vēlas sagriezt loksni vairākās daļās, kur katra daļa sastāv no vienas vai vairākām secīgām rūtiņām, un tad no sagrieztajām daļām salikt $n \times n$ rūtiņu kvadrātu, daļas nerotējot vai neapgriežot otrādi (attiecīgi, ja sākotnējā loksne bija horizontāla, tad sagrieztās daļas visu laiku arī paliek tāpat horizontālas – tās nedrīkst, piemēram, pagriezt vertikāli). Kvadrātā nekādas divas sagrieztās daļas nepārklājas.

Papildus tam kvadrātam ir jāizpildās īpašībai: ja rūtiņā, kas ir i -tajā rindā un j -tajā kolonnā, ir ierakstīts skaitlis a_{ij} , tad skaitlis $a_{ij} - (i + j - 1)$ dalās ar n . Atrast mazāko iespējamo daļu skaitu, kurā Kalvim ir jāsagriež rūtiņu loksni, lai panāktu prasīto.

Piezīme. Rindas tiek skaitītas, sākot no kvadrāta augšējās rindas, un kolonnas tiek skaitītas, sākot no kvadrāta kreisās kolonnas.

Atrisinājums. Atbilde ir $2n - 1$ daļas.

Visā risinājumā aplūkosim rūtiņās ierakstītos skaitļus pēc moduļa n , jo acīmredzami ir svarīgs tikai to atlikums, dalot ar n . Vispirms parādīsim, ka ar $2n - 1$ daļām prasīto var izdarīt. Sākotnējo rūtiņu loksni Kalvim jāsgriež secīgi daļās ar garumu

$$n, 1, n, 1, \dots, n, 1, 1.$$

Šādi griežot, tiek iegūtas $n - 1$ daļas ar garumu n , kā arī n daļas ar garumu 1 . Katra no daļām ar garumu n sākas ar atšķirīgu skaitli pēc moduļa n , t.i., pirmā daļa sākas ar $1 \pmod{n}$, otrā daļa sākas $2 \pmod{n}$ utt. Šīs daļas secīgi saliekot vienu zem otras, pirmās $n - 1$ kvadrāta rindas būs aizpildītas, un tām viegli pārbaudīt, ka prasītais izpildās. Palielina n daļas ar garumu 1 , taču tās no konstrukcijas satur visus atlikumus pēc moduļa n , jo pirmā šāda daļa satur skaitli $1 \pmod{n}$, otrā satur $2 \pmod{n}$ utt. Šīs daļas var salikt pēdējā rindā nepieciešamajā secībā.

Atliek pierādīt, ka ar mazāk daļām prasīto nav iespējams sasniegt. Domāsim par uzdevumu pretējā virzienā – pieņemsim, ka ir dotas n rūtiņu loksnes ar izmēru $1 \times n$, kur k -tā loksne satur skaitļus $k, k + 1, \dots, k + n - 1 \pmod{n}$. Tad mērķis ir sagriezt šīs loksnes tā, lai varētu salikt sākotnēji doto $1 \times n^2$ rūtiņu loksni.

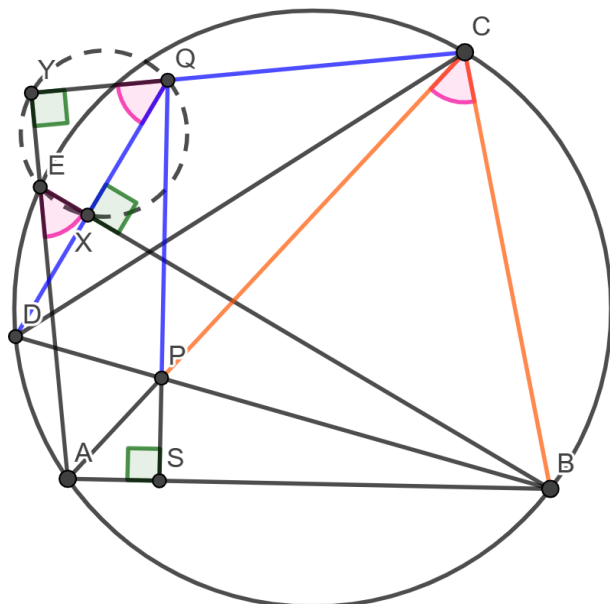
Ievērosim, ka pēc griešanas ikvienā jaunizveidotajā daļā ir skaitļi formā $a, a + 1, \dots, b - 1 \pmod{n}$. Konstruēsim grafu Γ ar n virsotnēm ar numuriem $1, 2, \dots, n$ (kas atbilst atlikumiem pēc moduļa n). Ja pēc lokšņu sagriešanas izveidojas daļa $a, a + 1, \dots, b - 1$, tad novilksim neorientētu šķautni starp virsotnēm a un b . Šajā grafā var gadīties, ka starp divām virsotnēm tiek novilkta vairākas atšķirīgas šķautnes. Veiksime vairākus novērojumus par grafa struktūru.

- Tās sagrieztās daļas, kuras sākotnēji veidoja k -to loksni $k, k + 1, \dots, k + n - 1$, no šķautņu definīcijas grafā atbilst ciklam γ_k , kurš satur virsotni k . Šis cikls potenciāli var būt grafa cilpa jeb cikls ar garumu 1 .
- Tā kā visas sagrieztās daļas var sakārtot sākotnējā $1 \times n^2$ loksne, tad secīgi ejot pa daļu atbilstošajām šķautnēm, tiks iegūts Eilera cikls.
- Šķautņu skaits grafā atbilst sagrieztu daļu skaitam.

Pierādīsim, ka Γ ir vismaz $2n - 1$ šķautnes. Tā kā Γ ir Eilera cikls un no katras virsotnes iziet vismaz viena šķautne, tad grafs ir saistīts. Aplūkojam katru ciklu γ_k , kur $1 \leq k \leq n$, un izdzēšam vienu šķautni tajā, iegūstot jaunu grafu Γ' . No šķautņu un ciklu definīcijas zināms, ka

jebkuriem diviem dažādiem cikliem γ_i un γ_j nav kopīgu šķautņu, tādēļ vienas šķautnes izdzēšana no cikla nemaina to, ka grafs ir savienots, jo visas virsotnes ciklā joprojām ir savienotas. No tā var secināt, ka Γ' ir savienots grafs, tātad tajā ir vismaz $n - 1$ šķautne. Tā kā tika izdzēstas n šķautnes no Γ , tad sākotnēji tajā bija vismaz $2n - 1$ šķautnes, kas bija jāpierāda.

3.uzdevums Dots trijstūris ABC , kuram izpildās $AC > BC$. Ar ω apzīmēsim trijstūra ABC apvilktā riņķa līniju un ar r tās rādiusu. Punkts P atrodas uz malas AC , pie tam $BC = CP$. Punkts S ir no punkta P pret taisni AB viltā perpendikula pamats. Stars BP krusto ω punktā D , savukārt punkts Q atrodas uz taisnes SP tā, ka $PQ = r$ un punkti S, P, Q atrodas uz taisnes tieši šādā secībā. Punkts E ir krustpunkts perpendikulam, kas viltks no punkta A pret taisni CQ , un perpendikulam, kas viltks no punkta B pret taisni DQ . Pierādīt, ka punkts E atrodas uz ω .



Atrisinājums. Ar O apzīmēsim trijstūra CPD apvilktās riņķa līnijas centru. Ērtībai apzīmēsim $\angle BAC = \angle A$, $\angle CBA = \angle B$ un $\angle ACB = \angle C$.

Apgalvojums. Punkts Q sakrīt ar punktu O .

Pierādījums. Mēs pierādīsim, ka punkts O atrodas uz taisnes PQ un $PO = r$, kas nozīmē, ka punkti O un Q sakrīt. Ievērosim, ka $\angle A = \angle PDC$ kā leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku. Līdz ar to secinām, ka

$$2r = \frac{BC}{\sin(\angle A)} = \frac{CP}{\sin(\angle PDC)} = 2r_{\triangle PCD}$$

Tas nozīmē, ka $r = r_{\triangle PCD} = PO$. Ievērosim, ka $\angle POC = 2\angle PDC = 2\angle A$ kā centra leņķis, kas nozīmē, ka $\angle CPO = 90^\circ - \angle A$. No otras puses, tā kā $\angle ASP = 90^\circ$, tad $\angle APS = \angle CPQ = 90^\circ - \angle A$. Secinām, ka $\angle CPQ = \angle CPO$, kas nozīmē, ka punkti P, O, Q atrodas uz vienas taisnes. Tas pierāda prasīto.

Pieņemsim, ka taisne BE krusto taisni DQ punktā X , un taisne AE krusto taisni CQ punktā Y . Tādā gadījumā $\angle EXQ = 90^\circ = \angle EYQ$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $EXQY$ var apvilkt riņķa līniju. Tā kā $BC = CP$, tad $\angle BPC = 90^\circ - \angle C/2$. Tādā gadījumā $\angle DPC = 90^\circ + \angle C/2$. Punkts Q ir trijstūra CPD apvilktās riņķa līnijas centrs, līdz ar to

$$\angle DQC = 360^\circ - 2\angle DPC = 180^\circ - \angle C.$$

Secinām, ka tādā gadījumā $\angle XQY = \angle C$. Tā kā ap četrstūri $EXQY$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle XQY = \angle AEB = \angle C$. Tas nozīmē, ka ap četrstūri $BCEA$ var apvilkt riņķa līniju jeb to, ka punkts E atrodas uz ω , kas arī bija jāpierāda.

4.uzdevums Naturālu skaitli m sauksim par *latvisku*, ja eksistē polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem ar īpašību, ka $(P(x))^m - x$ dalās ar m katram naturālam skaitlim x .

a) Pierādīt, ka visi latviski skaitļi ir kvadrātbrīvi.

b) Atrast visus naturālus skaitļus n ar īpašību, ka, ja \mathcal{P}_n ir visu tādu pirmskaitļu p reizinājums, kuriem izpildās $n \leq p \leq 2n$, tad \mathcal{P}_n ir latvisks.

Piezīme. Visiem naturāliem n eksistē vismaz viens pirmskaitlis p , kam $n \leq p \leq 2n$.

Atrisinājums. a) Aplūkosim latvisku skaitli m un pieņemsim, ka tas dalās ar p^2 , kur p ir kaut kāds pirmskaitlis. Polinomu, kuram izpildās prasītā īpašība, var pierakstīt formā

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kur $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ ir veseli skaitļi. Ievērosim, ka $P(p) \equiv a_0 \pmod{p}$, kas nozīmē, ka $0 \equiv P(p)^m - p \equiv a_0^m \pmod{p}$. Tātad $p \mid a_0$. Varam apzīmēt $a_0 = pt$, kur t ir naturāls skaitlis. Tādā gadījumā

$$P(p) = p \cdot (a_n p^{n-1} + \dots + a_1 + t)$$

Tas nozīmē, ka $p^m \mid P(p)^m$. Acīmredzami, ka $m \geq 2$, tāpēc $p^2 \mid P(p)^m$, taču tādā gadījumā $p^2 \mid P(p)^m - p$, līdz ar to $p^2 \mid p$, kas nav iespējams. Sākotnējais pieņēmums ir aplams, tāpēc skaitlis m nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

b) Atbilde ir visi naturālie skaitļi, izņemot $n = 2$.

Pieņemsim, ka $n > 2$. Aplūkosim polinomu $P(x) = x^l$. Pierādīsim, ka mēs varam izvēlēties l vērtību tādā veidā, lai izpildītos uzdevuma prasības. Pieņemsim, ka $\mathcal{P}_n = p_1 p_2 \cdots p_k$, kur p_1, p_2, \dots, p_k ir pirmskaitļi intervālā $[n, 2n]$. No Mazās Fermā teorēmas izriet, ka

$$x^{p_i-1} \equiv 1 \pmod{p_i} \implies x^{(p_i-1) \cdot A} \equiv 1 \pmod{p_i},$$

kur A ir patvaļīgs naturāls skaitlis. Tādā gadījumā

$$x^{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)} \equiv 1 \pmod{p_i}$$

visiem $1 \leq i \leq k$, kas nozīmē, ka

$$x^{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)} \equiv 1 \pmod{p_1 p_2 \cdots p_k},$$

jo visi minētie moduļi ir savstarpēji pirmskaitļi.

Ievērosim, ja mēs varam atrast tādu naturālu skaitli l , ka

$$l \cdot \mathcal{P}_n \equiv 1 \pmod{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)},$$

tad uzdevuma prasības būs izpildītas, jo

$$\begin{aligned} P(x)^m - x &= x^{l \cdot \mathcal{P}_n} - x \equiv \\ &\equiv x^{B \cdot (p_1-1)\cdots(p_k-1)+1} - x \equiv \\ &\equiv x - x \equiv 0 \pmod{p_1 p_2 \cdots p_k} \end{aligned}$$

Ja \mathcal{P}_n un $(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)$ ir savstarpēji pirmskaitļi, tad meklētā l vērtība eksistē pēc inverso elementu īpašībām.

Apgalvojums. Izpildās $\gcd(\mathcal{P}_n, (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1)) = 1$.

Pierādījums. Pieņemsim, ka abi skaitļi nav savstarpēji pirmskaitļi, tad abi dalās ar kaut kādu pirmskaitli p . Acīmredzami, ka šis pirmskaitlis ir vienāds ar kādu no skaitļiem p_1, p_2, \dots, p_k . Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka tas ir p_1 . Tādā gadījumā $p_1 \mid (p_1 - 1) \cdots (p_k - 1)$, kas nozīmē, ka $p_1 \mid p_j - 1$ kaut kādam $j \neq 1$. Ievērosim, ka, ja $p_1 = p_j - 1$, tad $p_1 = 2, p_j = 3$, kas nozīmē, ka mēs esam gadījumā, kad $n = 1, 2$, ko aplūkosim atsevišķi vēlāk. Pretējā gadījumā $p_j - 1 \geq 2p_1$, kas nozīmē, ka $p_j \geq 2p_1 + 1 \geq 2n + 1$, kas ir pretruna. Līdz ar to minētie skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi, kas arī bija jāpierāda.

Ja $n = 2$, tad $\mathcal{P}_2 = 6$, kas nozīmē, ka eksistē tāds polinoms, ka $P(x)^6 \equiv x \pmod{3}$. Taču izvēloties $x = 2$, iegūstam, ka $P(2)^6 \equiv 2 \pmod{3}$, kas ir pretruna, jo skaitļu kvadrāti dod tikai atlikumus $0, 1$, dalot ar 3 .

Ja $n = 1$, tad polinoms $P(x) = x$ acīmredzami apmierina uzdevuma prasības.