

IMO 2025 atlasē atrisinājumi

1. diena

1. uzdevums Atrast visus reālu skaitļu desmitniekus $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$, kuri apmierina vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \frac{6x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2} \\ x_2 = 1 + \frac{6x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2} \\ \vdots \\ x_{10} = 1 + \frac{6x_{10}^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2} \end{cases}$$

Atrisinājums Saskaitot visus 10 sistēmas vienādojumus iegūsim, ka

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 10 + \frac{6(x_1^2 + \dots + x_{10}^2)}{x_1^2 + \dots + x_{10}^2} = 16$$

Apgalvojums. Starp skaitļiem x_1, x_2, \dots, x_{10} ir ne vairāk kā 2 dažādi reāli skaitļi.

Pierādījums. Aplūkosim sekojošus 2 vienādojumus, kur $i \neq 1$

$$x_1 = 1 + \frac{6x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2} \quad \text{un} \quad x_i = 1 + \frac{6x_i^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2}$$

No pirmā vienādojuma atņemot otro vienādojumu, iegūsim, ka

$$S(x_1 - x_i) = 6(x_1 - x_i)(x_1 + x_i),$$

kur mēs apzīmējam $S = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2$. Tas nozīmē, ka $x_1 = x_i$ vai arī $S = 6(x_1 + x_i)$. Ievērosim, ka, ja eksistē 2 tādi indeksi $i \neq j$, ka $x_1 \neq x_i$, $x_1 \neq x_j$, tad $S = 6(x_1 + x_i) = 6(x_1 + x_j)$, no kurienes izriet, ka $x_i = x_j$. Tas nozīmē, ka starp skaitļiem x_1, \dots, x_{10} ir ne vairāk kā divu dažādu skaitļu.

Ja visi 10 skaitļi savā starpā ir vienādi, tad $(x_1, x_2, \dots, x_{10}) = (\frac{8}{5}, \frac{8}{5}, \dots, \frac{8}{5})$. Pretējā gadījumā starp dotajiem 10 skaitļiem $x \geq 1$ no šiem skaitļiem pieņem vērtību a un $10 - x$ no šiem skaitļiem pieņem vērtību b . Tas nozīmē, ka

$$xa + (10 - x)b = 16 \quad \text{un} \quad xa^2 + (10 - x)b^2 = 6(a + b)$$

Ievērosim, ka no pirmā vienādojuma izriet, ka $x(a - b) = 16 - 10b$. Savukārt no otrā vienādojuma izriet, ka

$$\begin{aligned} x(a - b)(a + b) &= 6(a + b) - 10b^2 \\ (16 - 10b)(a + b) &= 6(a + b) - 10b^2 \\ (8 - 5b)(a + b) &= 3(a + b) - 5b^2 \\ 8(a + b) - 5ab &= 3(a + b) \\ a + b &= ab \\ b &= \frac{a}{a - 1} \end{aligned}$$

Ievietojot iegūto izteiksmi atpakaļ pirmajā vietā, iegūsim, ka:

$$\begin{aligned}ax + (10 - x)\frac{a}{a - 1} &= 16 \\a(a - 1)x + (10 - x)a &= 16(a - 1) \\a^2x - ax + 10a - xa &= 16a - 16 \\xa^2 - (2x + 6)a + 16 &= 0\end{aligned}$$

Apskatīsim pēdējo vienādojumu kā kvadrātvienādojumu attiecībā pret a . Tā kā x, a ir reāli skaitļi, tad šī kvadrātvienādojuma diskriminantam jābūt nenegatīvam, kas nozīmē, ka

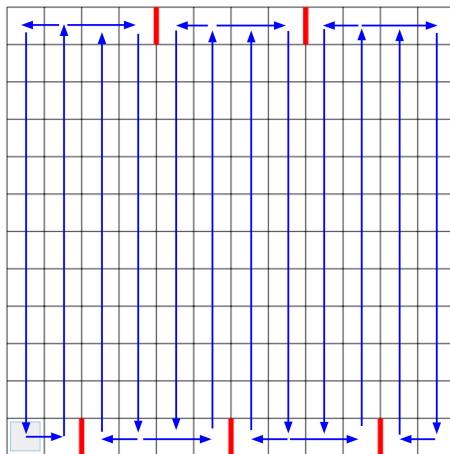
$$(2x + 6)^2 - 64x \geq 0 \implies 4(x - 1)(x - 9) \geq 0$$

Tā kā $x \geq 1$, tad $x \geq 9$. Ja $x = 10$, tad visi skaitļi ir vienādi savā starpā un šo gadījumu esam apskatījuši iepriekš. Pretējā gadījumā $x = 9$ un mēs iegūstam vienādojumu $9a^2 - 24a + 16 = 0$, no kurienes izriet, $(x_1, x_2, \dots, x_{10}) = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{4}{3}, 4)$ vai visas iespējamās permutācijas.

2.uzdevums Baltās Raganas ledus deju zāle ir kvadrāta formā, un tās grīda ir klāta ar $n \times n$ identiskām kvadrātveida flīzēm. Turklāt starp dažām blakus esošām flīzēm ir izvietotas burvju maliņas. Baltās Raganas uzticamajam kalpam Edmundam ir uzticēts iztīrīt zāli. Viņš sāk vienā no stūra flīzēm un drīkst pārvietoties uz augšu, uz leju, pa kreisi un pa labi. Taču, tā kā grīda ir slidena, viņš bez apstājas slīdēs izvēlētajā virzienā, līdz atsīties pret sienu vai burvju maliņu un apstāsies. Pēc apstāšanās Edmunds atkal var izvēlēties slīdēšanas virzienu. Par laimi, Edmundam ir speciāli apavi, kas pilnībā iztīra katru flīzi, kurai viņš vismaz vienu reizi ir slīdējis pāri. Noteikt minimālo burvju maliņu skaitu, kas jāuzliek zālē starp flīzēm, lai Edmunds spētu iztīrīt visas flīzes.

Atrisinājums. Atbilde ir $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ burvju maliņas.

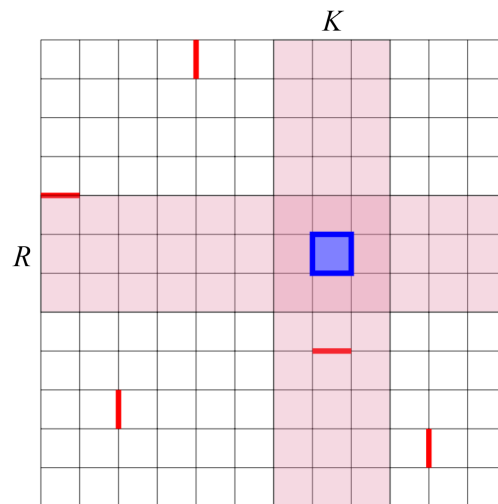
Vispirms parādīsim, ka Edmundam pietiks $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ burvju maliņas, lai spētu iztīrīt visas flīzes. Starp kolonnu $2k$ un $2k+1$ malas flīzēm novietojam burvju maliņu, pamīšus augšējā un apakšējā malā, kur $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Tādā veidā jebkuru kolonnas flīzi var sasniegt, slīdot no kreisās vai labās puses līdz attiecīgajai maliņai vai sienai, un pēc tam pārvietojoties vertikāli (skat. zīmējumu).



Tagad pierādīsim, ka ja kopumā izvietoto burvju maliņu skaits ir $m < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, tad var atrast flīzi, ko Edmunds nevarēs iztīrīt. Definēsim vertikālas līnijas V_1, V_2, \dots, V_{n-1} starp kaimiņkolonnām $1-2, 2-3, \dots, (n-1)-n$. Sauksim līniju V_i par *tīru*, ja tā nesatur vertikālas burvju maliņas. Tā kā netīru līniju skaits nevar būt lielāks par m , tad tīru līniju skaits ir vismaz

$$(n-1) - m \geq (n-1) - \left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1 \right) \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Tā kā kopējais līniju skaits ir $n-1$ un vismaz $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$ no tām ir tīras, tad pēc Dirihlē principa vienmēr var atrast divas tīras līnijas V_i un V_{i+1} , kas atrodas blakus, tas ir, trīs kolonnas, kas nav atdalītas ar vertikālām burvju maliņām. Analogiski definējot horizontālas līnijas H_1, H_2, \dots, H_{n-1} , un izmantojot līdzīgus spriedumus, secinām, ka var atrast divas tīras līnijas H_j un H_{j+1} , kas atrodas blakus, tas ir, trīs rindas, kas nav atdalītas ar horizontālām burvju maliņām.



Kolonnai, kas atrodas starp V_i un V_{i+1} apzīmēsim ar K un rindu, kas atrodas starp H_j un H_{j+1} apzīmēsim ar R (skat. zīmējumu). Ievērojām, ka K un R nepieskaras attiecīgi vertikālām un horizontālām ledus deju zāles sienām. Tas nozīmē, ka Edmunds, pārvietojoties, nevarēs apstāties ne K , ne R burvju maliņu trūkuma dēļ. Līdz ar to viņš nevarēs iztīrīt flīzi, kas atrodas K un R krustojumā, jo lai noslīdētu tai pāri viņam jāšāk kustība atrodoties vai nu K , vai nu R .

3. uzdevums Atrast visas bezgalīgas naturālu skaitļu virknes a_1, a_2, \dots ar īpašību, ka jebkuriem naturāliem skaitļiem m un n , kur $m \leq n$, skaitļi

$$\frac{a_m + a_{m+1} + \dots + a_n}{n - m + 1} \quad \text{un} \quad (a_m a_{m+1} \dots a_n)^{\frac{1}{n-m+1}}$$

abi ir naturāli skaitļi.

Atrisinājums. Ievērosim, ka no uzdevuma nosacījumiem izriet, ka

$$n - m \mid a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} \quad \text{un} \quad n - m \mid a_{m+1} + \dots + a_n$$

Tas nozīmē, ka

$$n - m \mid (a_{m+1} + \dots + a_n) - (a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1}) = a_n - a_m$$

visiem naturāliem skaitļiem $m \leq n$. Apzīmēsim ar $b_i = \nu_p(a_i)$, kur p ir fiksēts pirmskaitlis. Tā kā $(a_m a_{m+1} \dots a_n)^{\frac{1}{n-m+1}}$ ir vesels, tad

$$n - m + 1 \mid \nu_p(a_m \dots a_n) = \nu_p(a_m) + \dots + \nu_p(a_n) = b_m + \dots + b_n$$

Līdzīgi kā iepriekš varam iegūt, ka visiem naturāliem skaitļiem $n \leq m$ izpildās $n - m \mid b_n - b_m$.

Apgalvojums. Virknē b_1, b_2, \dots bezgalīgi daudz skaitļu ir vienādi ar b_1 .

Pierādījums. Apzīmēsim ar $k = b_1 = \nu_p(a_1)$. Ievērosim, ka

$$np^{k+1} = np^{k+1} + 1 - 1 \mid a_{np^{k+1}+1} - a_1$$

Tā kā $b_1 = k$, tad $a_1 = p^k x$, kur $p \nmid x$. Aplūkosim iespējamus gadījumus:

- $b_{np^{k+1}+1} < k$, tad $a_{np^{k+1}+1} = p^m y$, kur $m < k$ un $p \nmid y$. Tas nozīmē, ka

$$p^{k+1} \mid a_{np^{k+1}+1} - a_1 = p^m (p^{k-m} x - y)$$

Ievērosim, ka $p^{k-m} x - y$ ar p nedalās, tāpēc $p^{k+1} \mid p^m$, kas nav iespējams, jo $m < k$

- $b_{np^{k+1}+1} > k$, tad $a_{np^{k+1}+1} = p^m y$, kur $m > k$ un $p \nmid y$. Tas nozīmē, ka

$$p^{k+1} \mid a_{np^{k+1}+1} - a_1 = p^k (p^{m-k} x - y)$$

Ievērosim, ka $p^{m-k} x - y$ ar p nedalās, tāpēc $p^{k+1} \mid p^k$, kas nav iespējams.

Secinām, ka $b_{np^{k+1}+1} = k$, kas izpildās katram naturālam skaitlim n . Tas pierāda apgalvojumu.

Apgalvojums. Virkne b_1, b_2, \dots ir konstante .

Pierādījums. Apzīmēsim, ka $b_{n_1} = b_{n_2} = \dots = k$. Aplūkosim patvaļīgu indeksu m . Ievērosim, ka $n_j - m \mid b_{n_j} - b_m = k - b_m$. Izvēloties $n_j - m > |k - b_m|$, secinām, ka $b_m = k$.

Esam ieguvuši, ka virkne b_1, b_2, \dots ir konstante. Atcerēsimies, ka $b_i = \nu_p(a_i)$. Tas nozīmē, ka katram pirmskaitlim p izpildās, ka $\nu_p(a_i) = \nu_p(a_j)$ visiem i, j . Secinām, ka virkne a_1, a_2, \dots ir konstante. Viegli pārbaudīt, ka konstantes virknes tiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

4. uzdevums Dots izliekts piecstūris $ABCDE$. Punkts M ir nogriežņa AB viduspunkts. Zināms, ka taisne AB ir trijstūra CME apvilktās riņķa līnijas pieskare punktā M un punkts D atrodas uz trijstūru AME un BMC apvilktajām riņķa līnijām. Taisnes AD un ME krustojas punktā K , taisnes BD un MC krustojas punktā L . Punkti P un Q atrodas uz taisnes EC ar īpašību, ka $\angle PDC = \angle EDQ = \angle ADB$. Pierādīt, ka taisnes KP, LQ, MD krustojas vienā punktā.

Atrisinājums. Definēsim jaunus punktus $R = MC \cap AD$ un $S = ME \cap BD$.

1. apgalvojums. Ap piecstūri $EDCSR$ var apvilkt riņķa līniju.

Pierādījums. Tā kā ap četrstūri $AMDE$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle EDA = \angle AME$. Tā kā AM ir trijstūra CME apvilktās riņķa līnijas pieskare, tad $\angle AME = \angle ECM$. Secinām, ka

$$\angle EDR = \angle EDA = \angle ECM = \angle ECR,$$

kas nozīmē, ka ap četrstūri $EDCR$ var apvilkt riņķa līniju. Līdzīgi varam pierādīt, ka ap četrstūri $DCSE$ var apvilkt riņķa līniju. Tā kā šiem abiem četrstūriem ir trīs kopīgi punkti D, C, E , tad secinām, ka visi pieci punkti E, D, C, S, R atrodas uz vienas riņķa līnijas, kas arī bija jāpierāda.

2. apgalvojums. $KL \parallel AB \parallel RS$

Pierādījums. Ievērosim, ka tā kā AM ir trijstūra CME pieskare un ap četrstūri $ECSR$ var apvilkt riņķa līniju, tad

$$\angle AME = \angle MCE = \angle RCE = \angle RSE,$$

kas nozīmē, ka $AB \parallel RS$. Tā kā DM dala AB uz pusēm un $AB \parallel RS$, tad DM dala arī RS uz pusēm. Pieņemsim, ka $DM \cap RS = M'$, tad M' ir RS viduspunkts. Ievērosim, ka no Čevas teorēmas trijstūrī DSR taisnēm RL, KS, DM' izriet, ka

$$\frac{RM'}{SM'} \cdot \frac{SL}{DL} \cdot \frac{DK}{RK} = 1 \implies \frac{DK}{RK} = \frac{DL}{LS}$$

No Talesa teorēmas secinām, ka $KL \parallel AB$, kas arī bija jāpierāda.

Beidzot iesaistīsim punktus P un Q uzdevumā, pierādot sekojošus apgalvojumus.

3. apgalvojums. Ap četrstūriem $EDPK$ un $DCLQ$ var apvilkt riņķa līnijas.

Pierādījums. Tā kā $\angle ADB = \angle PDC$, tad $\angle KDP = \angle LDC$. Tā kā ap četrstūri $BMDC$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle LDC = \angle BMC$. Tā kā MB ir trijstūra CME apvilktās riņķa līnijas pieskare, tad $\angle BMC = \angle MEC$. Secinām, ka

$$\angle KEP = \angle MEC = \angle KDP,$$

kas nozīmē, ka ap četrstūri $EDPK$ var apvilkt riņķa līniju. Līdzīgi varam pierādīt, ka ap četrstūri $DCLQ$ var apvilkt riņķa līniju.

4. apgalvojums. $KP \parallel MC$ un $LQ \parallel ME$.

Pierādījums. Ievērosim, ka $\angle MEC = \angle SEC = \angle SDC$, jo ap četrstūri $EDCS$ var apvilkt riņķa līniju. Tā kā $\angle SDC = \angle LDC = \angle LQC$, jo ap četrstūri $DCLQ$ var apvilkt riņķa līniju, tad secinām, ka $\angle MEC = \angle LQC$, kas nozīmē, ka $LQ \parallel ME$. Līdzīgi varam pierādīt, ka

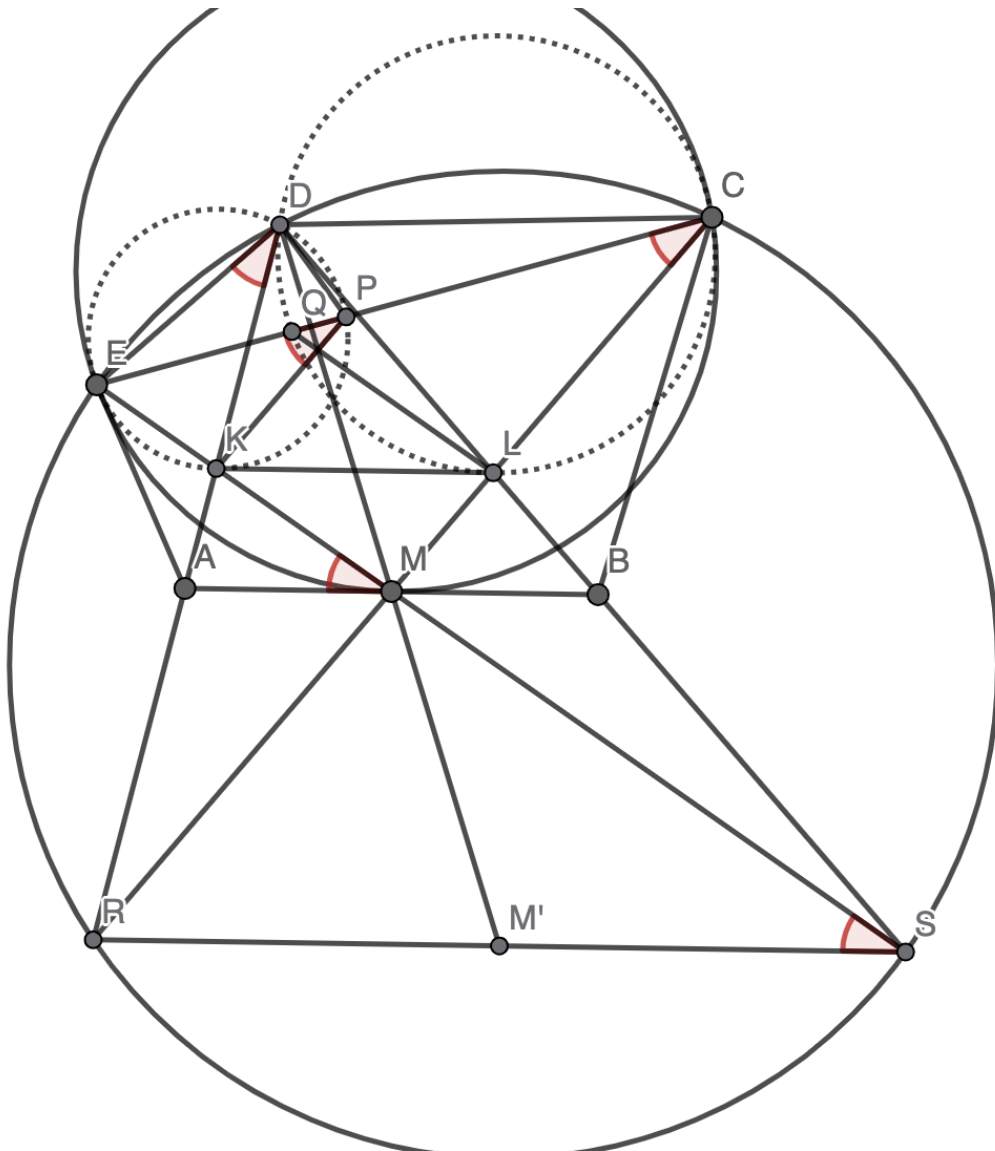
$KP \parallel MC$.

5. apgalvojums. Ap četrstūriem $EKLC$ un $KPQL$ var apvilkt riņķa līnijas.

Pierādījums. Ievērosim, ka $\angle KLM = \angle CRS$, jo $KL \parallel RS$. Savukārt $\angle CRS = \angle SEC = \angle KEC$, jo ap četrstūri $ECSR$ var apvilkt riņķa līniju. Esam ieguvuši, ka $\angle KEC = \angle KLM$, kas nozīmē, ka ap četrstūri $ECLK$ var apvilkt riņķa līniju.

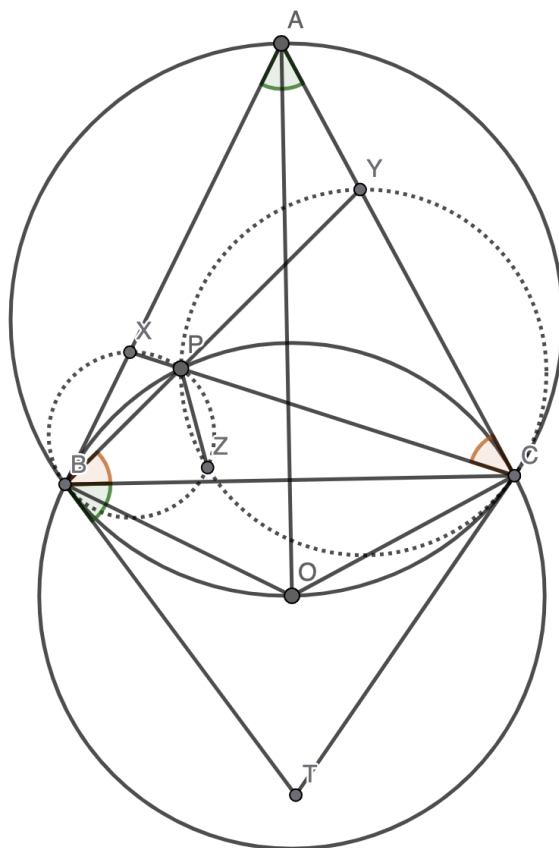
Ievērosim, ka $\angle EPK = \angle EDK$, jo ap četrstūri $EDPK$ var apvilkt riņķa līniju. Tā kā ap četrstūri $EDSR$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle EDK = \angle EDR = \angle ESR$. Tā kā $KL \parallel RS$, tad $\angle ESR = \angle MKL$. Tā kā $ME \parallel LQ$, tad $\angle MKL = \angle QLK$, kas nozīmē, ka $\angle EPK = \angle QLK$, līdz ar to ap četrstūri $PQKL$ var apvilkt riņķa līniju.

No radikālo asu teorēmas ap četrstūriem $EKPD$, $DQLC$ un $EKLC$ apvilktajām riņķa līnijām izriet, ka MD ir ir ap četrstūriem $EKDP$ un $DQLC$ apvilktu riņķa līniju radikālā ass. Savukārt no radikālo asu teorēmas ap četrstūriem $EKPD$, $DQLC$ un $KPQL$ apvilktajām riņķa līnijām izriet, ka taisnes KP , LQ un MD krustojas vienā punktā, kas arī bija jāpierāda.



2. diena

1.uzdevums Dota fiksēta riņķa līnija ω , kuras centrs ir O un rādiuss r , kā arī fiksēts punkts A ar īpašību, ka $OA = kr$, kur $k > 1$. Taisnes AB un AC ir pieskares, kas vilktas riņķa līnijai ω no punkta A . Punkts P ir patvaļīgi izvēlēts uz mazā ω loka BC . Taisnes AB un CP krustojas punktā X , savukārt taisnes AC un BP krustojas punktā Y . Trijstūru BPX un CPY apvilktās riņķa līnijas krustojas punktā Z . Pierādīt, ka taisne PZ neatkarīgi no punkta P izvēles iet caur fiksētu punktu katrai $k > 1$ vērtībai, izņemot vienu, un noteikt šo izņēmuma k vērtību.



Atrisinājums. Ievērosim, ka $\angle OBA = \angle OCA = 90^\circ$, tādēļ ap četrstūri $ABOC$ var apvilkt riņķa līniju Γ . Ar T apzīmēsim pieskaru krustpunktu, kas vilkta Γ punktos B un C . Acīmredzami, ka punkts T ir fiksēts un neatkarīgs no punkta P izvēles.

Apgalvojums. Taisnes BT un CT ir attiecīgi trijstūru PBX un CPY apvilktu riņķa līniju pieskares.

Pierādījums. Ievērosim, ka $\angle TBC = \angle BAC = \angle TCB$, jo BT un CT ir Γ pieskare, kā arī $\angle PBC = \angle PCA$, jo AC ir ω pieskare. Līdz ar to

$$\angle PBT = \angle TBC + \angle PBC = \angle BAC + \angle CBA = \angle BXC,$$

kur mēs izmantojam to, ka $\angle BXC$ ir trijstūra XAC ārējais leņķis. Tā kā $\angle PBT = \angle BXC = \angle BXP$, tad BT ir trijstūra BPX apvilktās riņķa līnijas pieskare. Līdzīgi varam pierādīt, ka CT ir trijstūra CPY apvilktās riņķa līnijas pieskare.

No apgalvojuma izriet, ka Γ un trijstūra BPX apvilktās riņķa līnijas radikāla ass ir taisne BT , savukārt Γ un trijstūra CPY apvilktās riņķa līnijas radikāla ass ir taisne CT . Līdz ar

to no radikālo asu teorēmas riņķa līnijai Γ un trijstūru BPX , CPY apvilktajām riņķa līnijām izriet, ka taisnes BT, CT, PZ krustojas punktā T . Līdz ar to taisne PZ iet caur punktu T neatkarīgi no punkta P izvēles.

Atcerēsimies, ka trīs radikālās asis vai nu krustojas vienā punktā vai ir savstarpēji paralēlas. Līdz ar to izņēmuma k vērtība ir tāda, kurai Γ pieskares punktos B un C , kuras mēs apzīmēsim ar ℓ_1 un ℓ_2 , ir paralēlas vienai otrai. Ar O' apzīmēsim Γ apvilktās riņķa līnijas centru, kas atrodas uz taisnes AO . Ievērosim, $\ell_1 \perp BO'$ un $\ell_2 \perp CO'$. Tā kā $\ell_1 \parallel \ell_2$, tad B, O', C atrodas uz vienas taisnes. Tas nozīmē, ka $O' = AO \cap BC$ un $AO' = OO' = BO' = CO'$, kas nozīmē, ka $ABCO$ ir kvadrāts. Tādā gadījumā $OA = \sqrt{2}r$, līdz ar to $k = \sqrt{2}$. Šajā gadījumā visa taisne PZ ir vienmēr paralēla ℓ_1 neatkarīgi no punkta P izvēles. Līdz ar to mainot punkta P atrašanās vietu uz mazā ω loka BC , mēs iegūsim taisnes bez kopīga krustpunktu, jo paralēlas taisnes nekrustojas.

2. uzdevums Atrast visus naturālos skaitļus n , kuriem eksistē naturāls skaitlis m ar īpašību, ka starp skaitļiem $m+n, 2m+(n-1), \dots, nm+1$ jebkuri divi skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi.

Atrisinājums. Apzīmēsim skaitļus $m+n, 2m+(n-1), \dots, nm+1$ attiecīgi ar x_1, x_2, \dots, x_n . Ievērosim, ka $x_i = im + (n+1) - i$ visiem $1 \leq i \leq n$.

Ja $n+1$ ir salikts skaitlis, tad $n+1 = p \cdot \frac{n+1}{p}$, kur p pirmskaitlis un $(n+1)/p > 1$. Tādā gadījumā $x_p = pm + n + 1 - p$ un $x_{2p} = 2pm + n + 1 - 2p$ abi dalās ar p neatkarīgi no m vērtības. Šī konstrukcija strādā tad un tikai tad, ja $2p \leq n$, kas nozīmē, ka $2 \leq \frac{n}{p} = \frac{n+1}{p} - \frac{1}{p}$. Tas neizpildās, ja $n+1 = 2p$. Priekš $n = 2p$ ievērosim, ka $x_2 = 2m + 2p - 2$ un $x_4 = 4 + 2p - 4$ abi dalās ar 2 neatkarīgi no m vērtības, līdz ar to neapmierina uzdevuma nosacījumus. Šī konstrukcija savukārt strādā tad un tikai tad, ja $4 \leq n = 2p - 1$, kas nozīmē, ka tā nestrādā priekš $p = 2$ jeb $n+1 = 4$. Taču priekš $n = 3$, ievērosim, ka $m = 2$ apmierina uzdevuma nosacījumus.

Ja $n+1$ ir pirmskaitlis, tad apzīmēsim $n+1 = p$. Ar p_1, p_2, \dots, p_k apzīmēsim visus pirmskaitļus mazākus par p . Pierādīsim, ka $m = p_1 \dots p_k + 1$ apmierina uzdevuma nosacījums. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tādi indeksi i un j , ka $\gcd(x_i, x_j) \neq 1$. Tas nozīmē, ka eksistē tāds pirmskaitlis q , ka $q \mid x_i$ un $q \mid x_j$.

Apgalvojums. Ja $q \mid x_i$, tad $q \geq p$.

Pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka $q < p$, tad q ir vienāds ar kādu no skaitļiem p_1, p_2, \dots, p_k . Tas nozīmē, ka $m \equiv 1 \pmod{q}$. Ievērosim, ka tādā gadījumā $0 \equiv x_i \equiv im + (n+1) - i \equiv i + p - i \equiv p \pmod{q}$. Tas nozīmē, ka $q \mid p$, kas ir pretrunā ar pieņēmumu, ka $q < p$. Secinām, ka $q \geq p$.

Ievērosim, ka

$$q \mid x_i - x_j = (im + (n+1) - i) - (jm + (n+1) - j) = (i-j)(m-1) = (i-j)(p_1 \dots p_k)$$

Tā kā $q \geq p$, tad $q \nmid p_1, p_2, \dots, p_k$, kas nozīmē, ka $q \mid i-j$. Ievērosim, ka $|i-j| < p-1 < q$. Līdz ar to $i-j = 0$, kas nozīmē, ka $i = j$. Sākotnējais pieņēmums ir aplams, līdz ar to $\gcd(x_i, x_j) = 1$ visiem $i \neq j$, kas pierāda to, ka izvēlētajā m vērtība tiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

3. uzdevums Dots naturāls skaitlis n . Zināms, ka $2n$ bruņinieki sēž pie apaļa galda. Starp viņiem ir n bruņinieku pāri. Ikvienā pāri esošie divi bruņinieki grib paspiest roku viens otram, taču to drīkst darīt tad un tikai tad, ja viņi sēž blakus viens otram. Katru minūti divi kādi blakusesoši bruņinieki samainās vietām. Atrast mazāko iespējamo minūšu skaitu, pēc kura neatkarīgi no sākotnējā bruņinieku izkārtojuma katram bruņiniekam kādā brīdī bija iespēja satikt savu partneri un paspiest tam roku.

Atrisinājums. Atbilde ir $\frac{n(n-1)}{2}$ minūtes.

Vispirms pierādīsim, ka ja sākotnēji katrs bruņinieks atrodas tieši pretī savam partnerim, tad ir vajadzīgas vismaz $\frac{n(n-1)}{2}$ minūtes, lai katrs bruņinieks varētu paspiest roku savam partnerim.

Pie šādā izkārtojuma katrs bruņinieks atrodas tieši $n - 1$ vietu tālu no sava partnera. Tātad, lai katrs bruņinieks varētu paspiest roku savam partnerim, katrā pāri abu bruņinieku kopējām pārvietošanās soļu skaitam jābūt vismaz $n - 1$. Tā kā pāru skaits ir n , tad kopējam soļu skaitam jābūt vismaz $n(n - 1)$. Savukārt katra bruņinieku apmaiņa pārvieto divus bruņiniekus tieši par vienu soli, tātad apmaiņu gājienu skaits ir vismaz $\frac{n(n-1)}{2}$.

Atliek pierādīt, ka neatkarīgi no sākotnējā bruņinieku izkārtojuma pēc $\frac{n(n-1)}{2}$ minūtēm var panākt, ka katrs bruņinieks paspieda roku savam partnerim. Pierādīsim stingrāko faktu – kad visi gājieni būs beigušies katrs bruņinieks atradīsies blakus savam partnerim un varēs paspiest viņam roku.

Novietosim galda centrā kolonnu un savienosim katru bruņinieku pāri ar virvi, ko sauksim par *saiti* (kopā n saites). Ja kādā pāri bruņinieki atrodas tieši pretī viens otram jeb saite iet tieši caur centru, tad patvaļīgi izvēlāties vienu pusi un teiksim, ka kolonna atrodas tajā pusē attiecīgi pret saiti. Teiksim, ka saite atrodas priekšā bruņiniekam, ja tas bruņinieks un kolonna atrodas dažādās pusēs attiecībā pret saiti. Par saites garumu sauksim bruņinieku skaitu, kam šī saite atrodas priekšā. Tātad katras saites garums ir vesels skaitlis starp 0 un $n - 1$.

Teiksim, ka saite C *ieslēdz* saiti C' , ja tās nekrustojas un saite C atrodas starp C' un kolonnu, un divas saites sauksim par *ieslēdzošām*, ja viena no tām ieslēdz otro. Ja divas saites krustojas savā starpā, tad sauksim tos par *krustojošām*. Ja divas saites nav gan ieslēdzošas, gan krustojošas, tad sauksim tos par *nepārklājošām*. Pamanīsim, ka kopā mums ir $\frac{n(n-1)}{2}$ saišu pāri. Ar k , l un m attiecīgi apzīmēsim ieslēdzošo, krustojšo un nepārklājošo saišu skaitu. Dabūjam, ka

$$k + l + m = \frac{n(n-1)}{2}.$$

1. apgalvojums. Pēc $2k + l$ vietu apmaiņām katrs bruņinieks varēs paspiest roku savam partnerim.

Pierādījums. Pierādīsim to izmantojot matemātisko indukciju pēc $2k + l$, tas ir, parādīsim, ka vienmēr var atrast gājienu, kas samazina $2k + l$ par vismaz vieninieku. Ja $2k + l = 0$ jeb katras saites garums ir 0, tad katrs bruņinieks jau atrodas blakus savam partnerim. Citādi, apskatīsim patvaļīgu bruņinieku A un B pāri, kas ir saistīti ar saiti C_0 ar garumu $q \geq 1$. Apzīmēsim A ar S_0 un bruņiniekus, kam C_0 atrodas priekšā ar S_1, S_2, \dots, S_q secībā no A līdz B . Ar C_1 apzīmēsim saiti, kas saista S_1 ar tā partneri. Apskatīsim trīs iespējamus gadījumus:

- Ja C_1 atrodas S_0 priekšā, tad C_0 un C_1 krustojas, tādēļ, samainot S_0 un S_1 vietām, C_0 un C_1 paliek nepārklājošas, kas samazina $2k + l$ par vieninieku (jo k nemainās, bet l samazinās par vieninieku).

- Ja C_1 neatrodas priekšā gan S_0 gan B , tad C_0 ieslēdz C_1 , kas nozīmē, ka samainot S_0 un S_1 vietām, C_0 un C_1 no ieslēdzošām kļūst par krustojošām, kas samazina k par vieninieku un palielina l par vieninieku, no kā izriet, ka $2k + l$ samazinās par vieninieku.
- Ja C_1 atrodas B priekšā, tad mēs nevaram uzreiz atrast vajadzīgo gājieni. Tā vietā mēs apskatīsim saišu pārus S_i un S_{i+1} katram indeksam i , kur $1 \leq i \leq q - 1$. Katru reizi mēs vai nu atradīsim vajadzīgo gājieni kādā no iepriekšējiem gadījumiem, vai nu dabūsim, ka C_{i+1} (saite, kas savieno S_{i+1} ar tā partneru) atrodas B priekšā. Izejot visiem indeksiem cauri mēs vai nu atradīsim vajadzīgo gājieni, vai nu atnāksim pie tā, ka C_q atrodas B priekšā, kas nozīmē, ka C_0 un C_q ir krustojošās, un kļūst par nepārklājošām, ja mēs samainām S_q un B vietām, kas samazina $2k + l$ par vieninieku.

Ievērojam, ka izmantojot doto stratēģiju, vienīgais gadījums, kad saites garums palielinās ir, kad tā ir ieslēgta ar kādu citu, kas nav iespējams saitei, kas iet caur centru. Līdz ar to, saites nekad nekrusto kolonnu.

2. apgalvojums. Neatkarīgi no bruņinieku izvietojumā, mums izpildās $k \leq m$.

Pierādījums. Pierādīsim prasīto izmantojot matemātisko indukciju pēc n . Bāze, kad $n = 2$ ir acīmredzama. Apskatīsim saisti C ar lielāko garumu un pieņemsim, ka tā savieno bruņiniekus A un B . Ar x apzīmēsim saišu skaitu, kas krustojas ar C , un ar y apzīmēsim saišu skaitu, ko ieslēdz C . Tā kā nepastāv saites ar lielāku garumu nekā C , tad neviena saite nevar ieslēgt C . Tātad C atrodas priekšā tieši vienam bruņiniekam no katra pāra, kura attiecīga saite krusto C , un abiem bruņiniekiem no katra pāra, kura attiecīga saite ir ieslēgta ar C . Līdz ar to saites C garums ir $x + 2y \leq n - 1$, un saišu skaits, kas ir nepārklājošās ar C ir vienāds ar

$$n - 1 - x - y \geq (x + 2y) - x - y = y.$$

Tagad mēs nodzēšam bruņiniekus A un B , samazinot k par y un m par vismaz y (pēc pierādītas nevienādības), un izmantojam induktīvo pieņēmumu. Mums paliek pierādīt, ka katras palikušās saites garums nav lielāks par $n - 2$. Ja kādas saites C garums pirms A un B izmešanas bija $\leq n - 2$, tad tas arī paliek $\leq n - 2$, jo saites garums nevar palielināties bruņinieka izmešanas dēļ. Ja kādas saites C garums pirms A un B izmešanas bija tieši $n - 1$, tad saites garums starp A un B arī ir $n - 1$ un tad saitei C bijā jābūt priekšā kādam no A un B , kas nozīmē, ka pēc to izmešanas tās garums kļūst $n - 2$. Tādējādi mēs esam pierādījuši doto apgalvojumu.

No 2. apgalvojuma izriet, ka $2k + l \leq k + l + m = \frac{n(n-1)}{2}$. Apvienojot šo rezultātu ar 1. apgalvojumu, secinām, ka ar $\frac{n(n-1)}{2}$ apmaiņām pietiek, lai pēc visām apmaiņām katrs bruņinieks atrastos blakus savam parteram un varētu paspiest viņam roku.

4.uzdevums Bezgalīgām pozitīvu reālu skaitļu virknēm a_1, a_2, a_3, \dots un b_1, b_2, b_3, \dots izpildās visas sekojošās īpašības katram naturālam skaitlim n

- $a_{n+1}b_{n+1} = a_n^2 + b_n^2$;
- $a_{n+1} + b_{n+1} = a_nb_n$;
- $a_n \geq b_n$.

Pierādīt, ka eksistē naturāls skaitlis k , ka $\frac{a_k}{b_k} > 2025^{2025}$.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, tad eksistē tāds reāls skaitlis M , ka $\frac{a_n}{b_n} \leq M$ visiem naturāliem skaitļiem n .

Ievērosim, ka

$$\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_nb_n} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{b_n}{a_n} \leq M + 1,$$

kur mēs izmantojam to, ka $a_n \geq b_n$, kas nozīmē, ka $\frac{b_n}{a_n} \leq 1$. Tādā gadījumā

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{a_{n+1}b_{n+1}} &\geq \frac{1}{M + 1} \\ \frac{1}{b_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1}} &\geq \frac{1}{M + 1} \\ \frac{2}{b_{n+1}} &\geq \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{b_{n+1}} \geq \frac{1}{M + 1} \\ 2(M + 1) &\geq b_{n+1}, \end{aligned}$$

kur mēs izmantojam to, ka $a_{n+1} \geq b_{n+1}$, kas nozīmē, ka $\frac{1}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{b_{n+1}}$. Ievērosim, ka tādā gadījumā

$$a_nb_n = \frac{a_n}{b_n} \cdot b_n^2 \leq M(2(M + 1))^2$$

Līdz ar to virkne a_1b_1, a_2b_2, \dots ir ierobežota no augšas. Taču no sakarības starp vidējo aritmētisko un ģeometrisko izriet, ka

$$a_{n+1}b_{n+1} = a_n^2 + b_n^2 \geq 2a_nb_n$$

Līdz ar to induktīvi varam iegūt, ka

$$a_{n+1}b_{n+1} \geq 2^n a_1b_1$$

Tā kā 2^n var būt pēc patikas liels skaitlis, tad secinām, ka virkne a_1b_1, a_2b_2, \dots ir neierobežota no augšas – pretruna ar iepriekš iegūto. Līdz ar to mūsu pieņēmums ir aplams un eksistē tāds naturāls skaitlis k , ka $\frac{a_k}{b_k} > 2025^{2025}$.

3. diena

1. uzdevums Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kurām visiem reāliem skaitļiem x un y izpildās nevienādība

$$f(x^2 + 2yf(x)) + (f(y))^2 \leq f((x+y)^2).$$

Atrisinājums. Ar $P(x, y)$ apzīmēsim doto funkcionālnevienādību. Ievērojam, ka jebkura skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs, no kā seko, ka ja mēs parādām, ka kāda skaitļa kvadrāts ir mazāks vai vienāds par nulli, tad tam obligāti jābūt vienādam ar nulli. Šajā uzdevumā mēs vairākas reizes izmantosim šo īpašību. No $P(0, 0)$ izriet, ka

$$f(0) + (f(0))^2 \leq f(0) \implies (f(0))^2 \leq 0 \implies f(0) = 0.$$

1. apgalvojums. $f(x) \geq 0$ visiem $x \geq 0$.

Pierādījums. Aplūkosim patvaļīgu nenegatīvu skaitli x . Tad no $P(0, \sqrt{x})$ izriet, ka

$$\begin{aligned} f(0 + 2\sqrt{x}f(0)) + (f(\sqrt{x}))^2 &\leq f((0 + \sqrt{x})^2) \\ f(0) + (f(\sqrt{x}))^2 &\leq f(x) \\ (f(\sqrt{x}))^2 &\leq f(x) \end{aligned}$$

un tā kā $0 \leq (f(\sqrt{x}))^2$, tad $0 \leq f(x)$, kas bija jāpierāda.

Tagad pielietosim mainīgo noīsināšanas triku – izvēlēsimies tādu y , lai $x^2 + 2yf(x) = (x+y)^2$ jeb $y = 2f(x) - 2x$. Tātad no $P(x, 2f(x) - 2x)$ seko, ka

$$(f(2f(x) - 2x))^2 \leq 0 \implies f(2f(x) - 2x) = 0 \quad (1)$$

visiem reāliem skaitļiem x . Apskatīsim divus gadījumus:

1. gadījums: $f(x) = 0$ tad un tikai tad, ja $x = 0$. Tādā gadījumā no (1) seko, ka $2f(x) - 2x = 0$ jeb $f(x) = x$ visiem reāliem skaitļiem x . Viegli pārlicināties, ka šī funkcija patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

2. gadījums: Eksistē vismaz viens reāls skaitlis $c \neq 0$ tāds, ka $f(c) = 0$. Apzīmēsim šādu skaitļu kopu ar S , tas ir, $c \in S$ tad un tikai tad, ja $c \neq 0$ un $f(c) = 0$.

2. apgalvojums. S satur patvaļīgi lielus pozitīvus skaitļus.

Pierādījums. Apskatīsim patvaļīgu skaitli $c \in S$ un ievietosim to vienādojumā (1):

$$\begin{aligned} f(2f(c) - 2c) &= 0 \\ f(-2c) &= 0. \end{aligned}$$

Tātad ja $c \in S$, tad arī $-2c \in S$. Šādi turpinot, pēc indukcijas var pierādīt, ka $(-2)^n c \in S$ jebkuram naturālam skaitlim n . No tā seko, ka neatkarīgi no skaitļa c zīmes, kopa S satur patvaļīgi lielus pozitīvus skaitļus.

Apskatīsim patvaļīgu reālo skaitli x . Izvēsimies ļoti lielu skaitli $c \in S$ tādu, lai $\sqrt{c} - x \geq 0$. No $P(\sqrt{c} - x, x)$ izriet, ka

$$f((\sqrt{c} - x)^2 + 2xf(\sqrt{c} - x)) + (f(x))^2 \leq f(((\sqrt{c} - x) + x)^2) = f(c) = 0$$

No otras puses $(f(x))^2 \geq 0$ un $f((\sqrt{c} - x)^2 + 2xf(\sqrt{c} - x)) \geq 0$, jo $\sqrt{c} - x \geq 0$ un $(\sqrt{c} - x)^2 + 2xf(\sqrt{c} - x) \geq (\sqrt{c} - x)^2 \geq 0$, kur mēs izmantojam 1. apgalvojumu. Tas var gadīties tikai ja

$$f((\sqrt{c} - x)^2 + 2xf(\sqrt{c} - x)) = (f(x))^2 = 0,$$

no kā izriet, ka $f(x) = 0$. Tā kā šos spriedumus var veikt patvaļīgam reālam skaitlim x , tad secinām, ka $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem x . Viegli pārlicināties, ka šī funkcija patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

2.uzdevums Dots naturāls skaitlis n . Naturāli skaitļi $1, 2, \dots, n^2$ ir sarakstīti $n \times n$ rūtiņu laukumā tā, ka katrs skaitlis ir tieši vienā rūtiņā un katrā rūtiņā ir tieši viens skaitlis. Katram naturālam skaitlim d , kuram $d \mid n$, par d -dalījumu saucsim $(n/d)^2$ nepārklājošos $d \times d$ kvadrātus, kas noklāj sākotnējo $n \times n$ rūtiņu laukumu. Naturālu skaitli n saucsim par *latvisku*, ja skaitļi var būt sakārtoti $n \times n$ rūtiņu laukumā tā, lai katram naturālam skaitlim d , kuram $d \mid n$ un $1 < d < n$, d -dalījumam izpildās īpašība, ka skaitļu summa katrā $d \times d$ kvadrātā nedalās ar d . Atrast visus pāra latviskos skaitļus.

Atrisinājums. Atbilde ir visi skaitļi formā $n = 2^k$, kur k ir naturāls skaitlis.

Vispirms parādīsim, ka katram naturālam k , skaitlis 2^k ir latvisks. Pierādīsim to, izmantojot matemātisko indukciju. Indukcijas bāze, kad $k = 1$, ir acīmredzama. Tagad pieņemsim, ka kādam naturālam k , skaitlis 2^k ir latvisks.

Aplūkosim $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ rūtiņu laukumu un sadalīsim to četros $2^k \times 2^k$ apakšlaukumos, patvaļīgi sanumurējot tos. Pēc induktīva pieņēmuma eksistē $(2^k)^2$ skaitļu sadalījums $2^k \times 2^k$ rūtiņu laukumā (apzīmēsim šo sadalījumu ar S), kuram izpildās uzdevuma nosacījums. Izmantojot šo sadalījumu, sarakstam skaitļus no 1 līdz $(2^k)^2$ katrā no četriem apakšlaukumiem, bet i -tajā apakšlaukumā katram skaitlim pieskaitām $(i-1)(2^k)^2$. Tādējādi i -tajā apakšlaukumā būs sarakstīti skaitļi no $(i-1)(2^k)^2 + 1$ līdz $i(2^k)^2$, kas nozīmē, ka $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ rūtiņu laukumā kopumā būs uzrakstīti visi skaitļi no 1 līdz $4 \cdot (2^k)^2 = (2^{k+1})^2$. Tagad samainīsim skaitļus $(2^k)^2$ (no 1. apakšlaukuma) un $(2^k)^2 + 2^{k-1}$ (no 2. apakšlaukuma) vietām. Līdzīgi samainīsim arī skaitļus $3 \cdot (2^k)^2$ (no 3. apakšlaukuma) un $3 \cdot (2^k)^2 + 2^{k-1}$ (no 4. apakšlaukuma) vietām.

Pierādīsim, ka iegūtais skaitļu sakārtojums apmierina uzdevuma nosacījumus. Katram $d = 2^j$ ar $j < k$ apskatīsim patvaļīgu $2^j \times 2^j$ kvadrātu. Ievērojam, ka kad mēs bijām pieskaitījuši $(i-1)(2^k)^2$ vai kad bijām mainījuši skaitļus vietām, skaitli nemainījās pēc moduļa 2^j (jo $j \leq k-1$). Tā kā katrs $2^j \times 2^j$ kvadrāts atrodas kādā no četriem apakšlaukumiem, un katrs no apakšlaukumu skaitļu sadalījumiem ir ekvivalents ar S pēc moduļa 2^j , tad skaitļu summa, kas atrodas $2^j \times 2^j$ kvadrātā arī nedalās ar 2^j .

Palika gadījums, kad $d = 2^k$. Šajā gadījumā katrs no $2^k \times 2^k$ sakrīt ar kādu no četriem apakšlaukumiem. Pieņemsim, ka tas sakrīt ar i -to apakšlaukumu. Tādā gadījumā tajā kvadrāta skaitļu summa būs vienāda ar

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + \dots + (2^k)^2) + (2^k)^2 \cdot (i-1)(2^k)^2 + (-1)^{i-1} \cdot 2^{k-1} = \\ & = 2^{2k-1}(2^{2k} + 1) + (i-1) \cdot 2^{4k} + (-1)^{i-1} \cdot 2^{k-1} \equiv 2^{k-1} \not\equiv 0 \pmod{2^k}, \end{aligned}$$

kas nozīmē, ka tā nedalās ar 2^k . Tādējādi katram d skaitļu summa katrā $d \times d$ kvadrātā nedalās ar d , kas dod prasīto. Esam pierādījuši ar indukciju, ka visi skaitļi formā $n = 2^k$ ir latviski.

Atliek pierādīt, ka visi pārējie pāra skaitļi nav latviski. Pieņemsim pretējo, jeb ka eksistē latvisks skaitlis formā $n = 2^s \cdot m$, kur s ir naturāls un $m > 1$ ir naturāls nepāra skaitlis, kuram eksistē skaitļu sakārtojums, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

Apgalvojums. Katram naturālam i , kuram $1 \leq i \leq s$, pie 2^i -dalījuma skaitļu summa katrā $2^i \times 2^i$ kvadrātā ir kongruenta ar 2^{i-1} pēc moduļa 2^i .

Pierādījums. Pierādīsim apgalvojumu izmantojot matemātisko indukciju. Indukcijas bāze, kad $i = 1$, ir patiesa, jo skaitļu summai katrā 2×2 kvadrātā jābūt nepāra (citādi n nebūtu

latvisks).

Tagad pieņemsim, ka dotais apgalvojums ir patiess kādam naturālam skaitlim i (ar $1 \leq i < s$). Pie 2^{i+1} -dalījuma katrs $2^{i+1} \times 2^{i+1}$ kvadrāts sastāv no četriem $2^i \times 2^i$ kvadrātiem. Pēc induktīva pieņēmuma, katrā no tam skaitļu summa ir kongruenta ar 2^{i-1} pēc moduļa 2^i . Līdz ar to, skaitļu summa $2^{i+1} \times 2^{i+1}$ kvadrātā ir kongruenta ar $4 \cdot 2^{i-1} \equiv 0 \pmod{2^i}$ jeb tā dalās ar 2^i . Ievērojam, ka skaitļu summa $2^{i+1} \times 2^{i+1}$ kvadrātā nevar dalīties ar 2^{i+1} , jo citādi n nebūtu latvisks. No tā izriet, ka skaitļu summa $2^{i+1} \times 2^{i+1}$ kvadrātā ir kongruenta ar $2^i \pmod{2^{i+1}}$, kas pierāda prasīto.

Aplūkosim 2^s -dalījumu, kas sastāv no $\left(\frac{n}{2^s}\right)^2 = m^2$ kvadrātiem. Izmantojot apgalvojumu, secinām, ka skaitļu summa katrā $2^s \times 2^s$ kvadrātā ir kongruenta ar $2^{s-1} \pmod{2^s}$. Līdz ar to, visu skaitļu summa $n \times n$ kvadrātā ir kongruenta ar

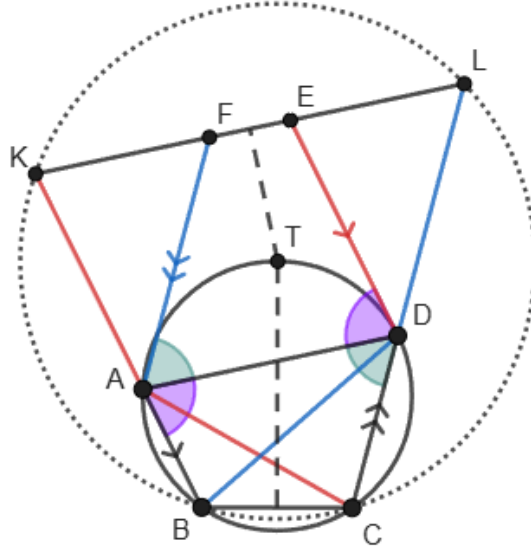
$$2^{s-1}m^2 \equiv 2^{s-1} \pmod{2^s},$$

kur mēs izmantojam to, ka m^2 ir nepāra. No otras puses, naturālu skaitļu no 1 līdz n^2 summa ir kongruenta ar

$$(1 + 2 + \dots + n^2) = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2} = 2^{2s-1}m^2(2^{2s}m^2 + 1) \equiv 0 \pmod{2^s},$$

kas ir pretruna. Līdz ar to, mūsu sākuma pieņēmums ir aplams, no kā seko, ka patiešām vienīgie pāra latviski skaitļi ir formā $n = 2^k$.

3.uzdevums Dots riņķa līnijā ievilkts četrstūris $ABCD$, kuram izpildās $AC < BD < AD$ un $\angle DBA < 90^\circ$. Punkts E atrodas uz taisnes, kas vilkta caur punktu D paralēli taisnei AB ar īpašību, ka punkti E un C atrodas pretējās pusēs taisnei AD un $AC = DE$. Punkts F atrodas uz taisnes, kas vilkta caur punktu A paralēli taisnei CD ar īpašību, ka punkti F un C atrodas pretējās pusēs taisnei AD un $BD = AF$. Pierādīt, ka nogriežņu BC un EF vidusperpendikuli krustojas uz četrstūra $ABCD$ apvilktais riņķa līnijas.



Atrisinājums. Ar T apzīmēsim nogriežņa BC vidusperpendikula krustpunktu ar četrstūra $ABCD$ apvilktais riņķa līniju. Sanāk, ka punkts T ir lielā loka BC viduspunkts. Mums ir jāpierāda, ka punkts T atrodas uz nogriežņa EF vidusperpendikula.

Tā kā četrstūris $ABCD$ ir ievilkts, tad

$$\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AC}{\sin \angle ADC} \quad \text{jeb} \quad BD \cdot \sin \angle ADC = AC \cdot \sin \angle BAD.$$

Ievērojam, ka no doto taisņu paralelītātes izriet, ka $\angle DAF = \angle ADC$ un $\angle BAD = \angle EDA$. Līdz ar to

$$AF \cdot \sin \angle DAF = BD \cdot \sin \angle ADC = AC \cdot \sin \angle BAD = DE \cdot \sin \angle EDA,$$

kur mēs izmantojam to, ka $AF = BD$ un $AC = DE$. Pamanīsim, ka $AF \cdot \sin \angle DAF$ un $DE \cdot \sin \angle EDA$ ir attiecīgi punktu F un E attālumi līdz taisnei AD (par šo var pārlielināties, piemēram, novelkot augstumu FX un taisni AD un apskatot taisnleņķa trijstūri AFX). Tā kā šie attālumi ir vienādi, mēs varam secināt, ka $AD \parallel EF$.

Definēsim jaunus punktus $K = EF \cap AB$ un $L = EF \cap CD$. Pamanīsim, ka četrstūri $KADE$ un $FADL$ ir paralelogrami, jo $AD \parallel EF$, ko kā izriet, ka $KA = DE = AC$, $DL = AF = BD$ un $KE = AD = FL$. Dabūjam, ka

$$KF = KE - FE = FL - FE = LE.$$

Līdz ar to, mums pietiek pierādīt, ka punkts T atrodas uz uz nogriežņa KL vidusperpendikula. Tā kā $KA = AC$, tad

$$\angle BTC = \angle BAC = 180^\circ - \angle KAC = 180^\circ - (180^\circ - 2\angle AKC) = 2\angle AKC = 2\angle BKC.$$

Līdzīgi varam dabūt, ka $\angle BTC = 2\angle BLC$. Ievērojam, ka punkti T, K, L atrodas vienā pusē attiecībā pret taisni BC un punkts T atrodas uz nogriežņa BC vidusperpendikula. Tas nozīmē, ka punkts T ir četrstūra $BKLC$ apvilktais riņķa līnijas centrs. Atceramies, ka riņķa līnijas centrs vienmēr atrodas uz tā hordas vidusperpendikula, kas dod prasīto.

4. uzdevums Sauksim naturālu skaitli n par *dīvainu*, ja katram skaitļa n dalītājam d izpildās vismaz viena no īpašībām:

- skaitlis n dalās ar skaitli $d + 1$;
- skaitlis $d + 1$ ir pirmskaitlis.

Atrast visus dīvainos skaitļus.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka skaitlis n ir dīvains. Uzrakstīsim $n = 2^k m$, kur k ir nenegatīvs vesels skaitlis un m ir nepāra naturāls skaitlis. Tādā gadījumā m ir skaitļa n dalītājs, tāpēc no uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $m + 1 \mid 2^k m$ vai arī $m + 1$ ir pirmskaitlis.

Ja $m + 1$ ir pirmskaitlis, tad tā kā $m + 1$ ir pāra (jo m ir nepāra), tad $m + 1 = 2$ jeb $m = 1$. Līdz ar to $n = 2^k$. Ja $k \geq 3$, tad 8 ir skaitļa n dalītājs, taču $8 + 1 = 9 \nmid 2^k = n$ un 9 nav pirmskaitlis, kas ir pretruna. Līdz ar to $k \in \{0, 1, 2\}$ jeb $n \in \{1, 2, 4\}$. Var viegli pārlicināties, ka visi šie skaitļi patiešām apmierina uzdevuma nosacījumus.

Ja $m + 1$ nav pirmskaitlis, tad $m + 1 \mid 2^k m$, no kā seko, ka $m + 1 \mid 2^k$, jo m un $m + 1$ ir savstarpēji pirmskaitļi. Tā kā divnieka pakāpes dalītāji var būt tikai divnieka pakāpes, tad $m + 1 = 2^j$ kādam $2 \leq j \leq k$, jo gadījumā, kad $j = 1$ mēs jau esam izskatījuši iepriekš. Tā kā m ir lielākais nepāra skaitlis, kas dala n , tad $m < 2^k + 1 \nmid n$. Tas nozīmē, ka $2^k + 1$ ir pirmskaitlis, jo 2^k ir skaitļa n dalītājs.

Apgalvojums. Ja $k > 2$, tad $2^{k-1} + 1 \nmid n$.

Pierādījums. Pieņemsim, ka $k > 2$ un $2^{k-1} + 1 \mid n$. Ievērojam, ka skaitlim m jādalās ar visiem skaitļa n nepāra dalītājiem. Tā kā $n = 2^k m$, tad $2^{k-1} + 1 \mid n$ tad un tikai tad, ja $2^{k-1} + 1 \mid m = 2^j - 1$. Ja $j \leq k - 1$, tad $2^{k-1} + 1 \mid 2^j - 1 \leq 2^{k-1} - 1 < 2^{k-1} + 1$, kas nav iespējams. Savukārt ja $j = k$, tad $2^{k-1} + 1 \mid 2^j - 1 = 2^k - 1$, kas ir iespējams tikai ja $2^{k-1} + 1 = 2^k - 1$, jo $2(2^{k-1} + 1) = 2^k + 2 > 2^k - 1$. Līdz ar to

$$2^{k-1} + 1 = 2^k - 1$$

$$2^{k-1} + 2 = 2^k$$

$$2^{k-2} + 1 = 2^{k-1}$$

Tā kā $k > 2$, tad pēdējas vienādības laba puses ir pāra, līdz ar to 2^{k-2} ir nepāra jeb $2^{k-2} = 1$, kas ir pretruna ar to, ka $k > 2$. Līdz ar to apgalvojums ir pierādīts.

Esam ieguvuši, ka ja $k > 2$, tad $2^{k-1} + 1 \nmid n$, no kā seko, ka $2^{k-1} + 1$ ir pirmskaitlis pēc uzdevuma nosacījumiem (jo $2^{k-1} \mid 2^k m = n$). Atceramies, ka esam dabūjuši iepriekš, ka $2^k + 1$ ir pirmskaitlis. Tā kā $2^l \equiv 1$ vai $2 \pmod{3}$, tad noteikti viens no skaitļiem $2^{k-1} + 1$ un $2^k + 1$ dalās ar trīs, bet tā kā abi skaitļi ir pirmskaitļi, tad viens no tiem ir vienāds ar 3. Taču mēs zinām, ka $3 < 2^{k-1} + 1 < 2^k + 1$ (jo $k > 2$), kas ir pretruna.

Līdz ar to, pieņēmums, ka $k > 2$ ir aplams, kas nozīmē, ka $k = j = 2$. Tādējādi, $n = 2^2 \cdot (2^2 - 1) = 12$. Viegli pārlicināties, ka 12 arī apmierina uzdevuma nosacījumus.

Vērtēšanas kritēriji

1. diena

Vērtēšanas kritēriji 1.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – pierādīts, ka $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 16$.
- **3 punkti** – pierādīts, ka starp skaitļiem x_1, x_2, \dots, x_{10} ir ne vairāk kā 2 dažādi reāli skaitļi.
 - **1 punkts** – tika apskatīta divu vienādojumu starpība.
 - **2 punkti** – apgalvojums tika pierādīts līdz galam.
- **1 punkts** – pierādīts, ka vismaz 9 no skaitļiem x_1, x_2, \dots, x_{10} ir vienādi savā starpā.
- **1 punkts** – tika iegūtas visas pareizās atbildes.
- **1 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 2.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **3 punkti** – tika pāradīta strādājoša konstrukcija un paskaidrot kāpēc tā strādā.
 - **1 punkts** – uzrakstīta pareizā atbilde.
 - **1 punkts** – tika pāradītā strādājoša konstrukcija.
 - **1 punkts** – paskaidrots kāpēc konstrukcija strādā.
- **4 punkti** – pierādīts, ka jābūt vismaz $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ burvju maliņām.
 - **1 punkts** – tiek apskatītas līnijas starp kaimiņkolonnām, kas nesatur burvju maliņas.
 - **1 punkts** – tiek novērtēts šādu līniju daudzums.
 - **2 punkti** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 3.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – pierādīts, ka $n - m \mid a_n - a_m$ visiem $m \leq n$.
- **1 punkts** – tiek ieviesta virkne b_i .
- **1 punkts** – uzdevums tika reducēts uz "Pierādīt, ka virkne b_i ir konstante".
- **2 punkti** – pierādīts pirmais apgalvojums.
- **1 punkts** – pierādīts otrais apgalvojums.
- **1 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Piezīme. Par pareizas atbildes atrašanu un tās pārbaudi punkti netiek piešķiroti.

Vērtēšanas kritēriji 4.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – tika definēti punkti R un S .
- **1 punkts** – pierādīts 1. apgalvojums.
- **1 punkts** – pierādīts 2. apgalvojums.
- **1 punkts** – pierādīts 3. apgalvojums.
- **1 punkts** – pierādīts 4. apgalvojums.
- **1 punkts** – pierādīts 5. apgalvojums.
- **1 punkts** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

2. diena

Vērtēšanas kritēriji 1.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – tika atrasta pareizā atbilde.
- **1 punkts** – tika definēts punkts T .
- **2 punkti** – pierādīts, ka taisnes BT un CT ir attiecīgi trijstūru PBX un CPY apvilkto riņķa līniju pieskares.
 - **1 punkts** – tika dabūtas leņķu sakarības, kas ir svarīgas apgalvojuma pierādīšanā.
 - **1 punkts** – apgalvojums tika pierādīts līdz galam.
- **2 punkti** – pierādīts, ka taisne PZ iet caur punktu T , ja $k \neq \sqrt{2}$.
- **1 punkts** – pierādīts, ka $\ell_1 \parallel \ell_2$ tad un tikai tad, ja $k = \sqrt{2}$.

Vērtēšanas kritēriji 2.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **3 punkti** – tika pilnīgi atrisināts gadījums, kad $n + 1$ ir salikts skaitlis.
- **1 punkts** – tiek apskatīts pirmskaitlis $q > p$ tāds, ka $q \nmid m - 1$.
- **1 punkts** – pierādīts, ka $q \mid (i - j)(m - 1)$.
- **2 punkti** – tika pareizi izvēlēta konstrukcija priekš m un pamatots kāpēc q izpildīsies augstāk minētās īpašības.
 - **1 punkts** – tiek pierādīts, ka ja tāds $q \mid x_i - x_j$, tad $i = j$.

Piezīme. Par katru neizskatītu apakšgadījumu, kad $n + 1$ ir salikts skaitlis, tiek atņemts viens punkts.

Vērtēšanas kritēriji 3.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- 1 punkts – tika atrasta pareizā atbilde.
- 1 punkts – pamatots, ka ir vajadzīgas vizmas $\frac{n(n-1)}{2}$ minūtes.
- 1 punkts – tiek apskatīts ieslēdzošo, krustojšo un nepārklājošo saišu daudzums.
- 2 punkti – pierādīts 1. apgalvojums.
- 1 punkts – pierādīts 2. apgalvojums.
- 1 punkts – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 4.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- 1 punkts – pierādīts, ka virkne $a_i b_i$ ir neierobežota.
- 4 punkti – pieņemot pretējo, pierādīts, ka virkne b_i ir ierobežota no augšas.
 - 2 punkti – pieņemot pretējo, pierādīts, ka izteiksme $\frac{a_n b_n}{a_n + b_n}$ ir ierobežota no augšas.
 - 2 punkti – apgalvojums tika pierādīts līdz galam.
- 1 punkts – pieņemot pretējo, pierādīts, ka virkne $a_i b_i$ ir ierobežota no augšas.
- 1 punkts – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

3. diena

Vērtēšanas kritēriji 1.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- 1 punkts – pierādīts, ka $f(x) \geq 0$ visiem $x \geq 0$.
- 1 punkts – tika apskatīts $y = 2f(x) - 2x$.
- 1 punkts – pierādīts, ka ja f ir injektīva nullē, tad $f(x) = x$ visiem reāliem x .
- 1 punkts – tika apskatīts $c \neq 0$ tāds, ka $f(c) = 0$.
- 1 punkts – tika apskatīta substitūcija ar $x + y = \sqrt{c}$.
- 2 punkti – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 2.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- 7 punkti – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 3.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- 2 punkti – pierādīts, ka $AD \parallel DE$.
- 1 punkts – tika definēti punkti K un L .
- 1 punkts – pierādīts, ka $KE = LF$.
- 1 punkts – pierādīts, ka četrstūris $BKLC$ ir ievilkts.
- 2 punkti – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.

Vērtēšanas kritēriji 4.uzdevumam. Punktu sadalījums uzdevumā ir šāds:

- **1 punkts** – tika atrasti visi divaini skaitļi.
- **6 punkti** – risinājums tālāk tiek novests līdz galam.