

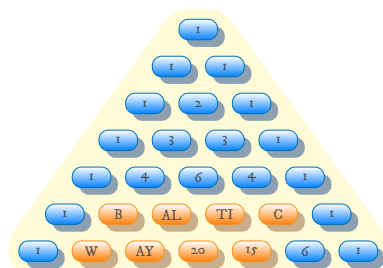
BALTIC WAY 2015

Risināšanas laiks: 9.00–13.30

Jautājumus drīkst uzdot 9.00–9.30.

Atļauts lietot tikai rakstāmpiederumus un lineālu.

Language: Latvian



1. Vienādmalu trijstūris ir sadalīts n^2 mazākos vienādos vienādmalu trijstūros, $n \geq 2$. Nosakiet visus veidus, kā katrā virsotnē var ierakstīt pa vienam reālam skaitlim, tā, ka jebkurās trīs virsotnēs, kas veido vienādmalu trijstūri, kura malas ir paralēlas sākotnējā trijstūra malām, ierakstīto skaitļu summa ir 0.
2. Dots naturāls skaitlis n un reāli skaitļi $a_1, \dots, a_n$, tādi, ka $0 \leq a_i \leq 1$ visiem $i = 1, \dots, n$. Pierādiet nevienādību

$$(1 - a_1^n)(1 - a_2^n) \cdots (1 - a_n^n) \leq (1 - a_1 a_2 \cdots a_n)^n.$$

3. Dots naturāls skaitlis $n > 1$. Atrodiet visus nekonstantos polinomus $P(x)$, kuri visiem reāliem skaitļiem x apmierina vienādību

$$P(x)P(x^2)P(x^3) \cdots P(x^n) = P\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right).$$

4. Kāda ģimene nēsā trīs krāsu drēbes: sarkanas, zilas un zaļas, un viņiem ir trīs vienādi veļas grozi — pa vienam katrai krāsai. Pirmās nedēļas sākumā visi grozi ir tukši. Katru nedēļu ģimene sasmērē 10 kg veļas (krāsu proporcija var mainīties). Nedēļas beigās šo veļu sašķiro pa krāsām un katru krāsu ieliek savā grozā, pēc tam veļa no smagākā groza tiek izmazgāta un grozs iztukšojas. Kāda ir mazākā nepieciešamā grozu ietilpība, lai tie nekad nepārpildītos?

5. Atrast visas funkcijas $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, kas visiem reāliem x un y apmierina vienādojumu

$$|x|f(y) + yf(x) = f(xy) + f(x^2) + f(f(y)).$$

6. Divi draugi spēlē sekojošu spēli. Sākumā uz galda ir divas kaudzītes ar 10000 un 20000 žetoniem. Draugi pēc kārtas veic sekojošus gājienus: paņem no vienas kaudzītes jebkuru pozitīvu skaitu žetonu *vai* paņem $x > 0$ žetonus no pirmās kaudzītes un $y > 0$ žetonus no otrās kaudzītes tā, ka $x + y$ dalās ar 2015. Zaudē tas, kurš nevar izdarīt gājienu. Kuram no draugiem ir uzvaroša stratēģija?
7. Dāmu klubā ir 100 biedres. Katra dāma ir dzērusi tēju (privāti) ar tieši 56 kluba biedrēm. Kluba Valdē, kura sastāv no 50 cienījamākajām dāmām, katra dāma ir dzērusi tēju ar katru citu. Pierādiet, ka kluba dāmas var sadalīt divās grupās tā, ka katras grupas ietvaros katra dāma ir dzērusi tēju ar katru citu.
8. Iedvesmojoties no Ņujorkas ielu tīkla, par *Manhetenas attālumu* starp plaknes punktiem (a, b) un (c, d) sauksim

$$|a - c| + |b - d|.$$

Starp kādas kopas punktiem sastopami tikai divi Manhetenas attālumi. Kāds var būt lielākais punktu skaits šādā kopā?

9. Dots vesels skaitlis $n > 2$. Kāršu kava sastāv no $\frac{n(n-1)}{2}$ kārtīm, kuras ir sanumurētas ar

$$1, 2, 3, \dots, \frac{n(n-1)}{2}.$$

Divas kārtis veido *magisku pāri*, ja to numuri ir pēc kārtas sekojoši skaitļi vai ja to numuri ir 1 un $\frac{n(n-1)}{2}$.

Kādiem n iespējams sadalīt kārtis n kaudzītēs tā, ka katrās divās kaudzītēs ir tieši viens magisks pāris?

10. Kopas $\{1, 2, \dots, n\}$ apakškopu S saucsim par *sabalansētu*, ja katram $a \in S$ eksistē tāds $b \in S$, $b \neq a$, ka arī $\frac{a+b}{2} \in S$.
 - (a) Dots naturāls skaitlis $k > 1$ un $n = 2^k$. Pierādiet, ka katra $\{1, 2, \dots, n\}$ apakškopa S , kurai $|S| > \frac{3n}{4}$, ir sabalansēta!
 - (b) Vai eksistē tāds $n = 2^k$ ar naturālu $k > 1$, ka katra $\{1, 2, \dots, n\}$ apakškopa S ar $|S| > \frac{2n}{3}$, ir sabalansēta?
11. Paralelograma $ABCD$ diagonāļu krustpunkts ir E . Leņķu $\angle DAE$ un $\angle EBC$ bisektrises krustojas punktā F . Zināms, ka $ECFD$ ir paralelograms. Nosakiet attiecību $AB : AD$.
12. Riņķa līnija, kas iet caur trijstūra ABC virsotni B , krusto tā malas AB un BC attiecīgi punktos K un L un pieskaras malai AC tās viduspunktā M . Uz loka BL (kurš nesatur K) izvēlēts punkts N , tā, ka $\angle LKN = \angle ACB$. Aprēķiniet leņķa $\angle BAC$ vērtību, ja zināms, ka trijstūris CKN ir vienādmalu.
13. BD ir trijstūra ABC augstums, zināms, ka $AB = 1$. Trijstūrī BCD ievilkta riņķa līnijas centrs atrodas trijstūra ABC mediānu krustpunktā. Atrodiet malu AC un BC garumus.
14. AD ir dažādmalu trijstūra ABC augstums, punkts M ir malas BC viduspunkts un punkts N ir punktam M simetriskais punkts attiecībā pret punktu D . Trijstūrim AMN apvilkta riņķa līnija krusto malu AB punktā $P \neq A$ un malu AC punktā $Q \neq A$. Pierādiet, ka taisnes AN , BQ un CP krustojas vienā punktā.
15. Trijstūrī ABC , leņķa $\angle BAC$ iekšējā un ārējā bisektrises krusto taisni BC attiecīgi punktos D un E . Trijstūrim ABC apvilkta riņķa līnija vēlreiz krusto taisni AD punktā F , tās centrs ir O un D' ir punktam D simetriskais punkts attiecībā pret O . Pierādīt, ka $\angle D'FE = 90^\circ$.
16. Ar $P(n)$ apzīmēsim lielāko pirmskaitli, ar ko dalās skaitlis n . Atrodiet visus naturālos $n \geq 2$, kuriem

$$P(n) + [\sqrt{n}] = P(n+1) + [\sqrt{n+1}].$$

Ar $[x]$ apzīmē skaitļa x veselo daļu — lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x .

17. Atrodiet visus naturālos skaitļus n , kuriem $n^{n-1} - 1$ dalās ar 2^{2015} , bet nedalās ar 2^{2016} .
18. Dots n -ās ($n \geq 1$) pakāpes polinoms $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, kuram ir n (ne noteikti dažādas) veselas saknes, un n dažādi pirmskaitļi $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$, tādi, ka a_i ir p_i naturāla pakāpe visiem $i = 0, \dots, n-1$. Atrodiet visas iespējamās n vērtības.
19. Par trim dažādiem naturāliem skaitļiem a, b, c zināms, ka $\text{LKD}(a, b, c) = 1$, un $(b-c)^2$ dalās ar a , $(c-a)^2$ dalās ar b un $(a-b)^2$ dalās ar c . Pierādīt, ka a, b, c nav (nedeģenerēta) trijstūra malu garumi.
20. Naturālam skaitlim $n \geq 2$, ar A_n apzīmē to naturālo skaitļu m skaitu, kuriem izpildās sekojoša īpašība: attālums no n līdz tuvākajam nenegatīvajam m daudzkārtņim ir vienāds ar attālumu no n^3 līdz tuvākajam nenegatīvajam m daudzkārtņim. Atrodiet visus naturālos $n \geq 2$, kuriem A_n ir nepāra skaitlis.
(Piezīme: Attālumu starp veseliem skaitļiem a un b definē kā $|a-b|$.)