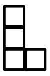
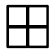
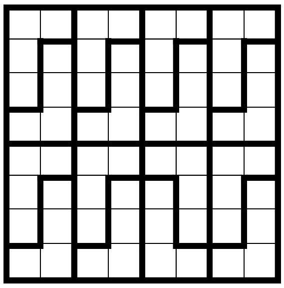
ATRISINĀJUMI
1992./93. mācību gads
1. kārta

1.1.1. ***Atbilde:*** **a)** jā, var; **b)** nē, nevar.

Risinājums. **a)** Skat., piemēram, A1. zīm.

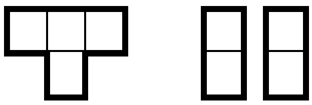
Figūriņu  sauksim par L-veida figūru, bet figūriņu  – par kvadrātu.

Ievērosim, ka divas L-veida figūras var novietot tā, ka tās veido 2×4 rūtiņu taisnstūri. Tā kā tāfelīti var sadalīt astoņos 2×4 rūtiņu taisnstūros, tad to var sadalīt 16 L-veida figūrās. Piemēram, tā, kā parādīts A1. zīmējumā. Iespējami arī citi sadalīšanas veidi, bet, lai uzdevums būtu atrisināts, pietiek uzrādīt tikai vienu.



A1. zīm.

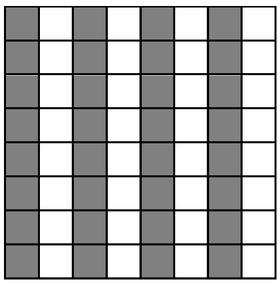
b) Šokolādes tāfelīte sastāv no 64 kvadrātiņiem. Arī kvadrātiņu skaits 15 L-veida figūrās un vienā 2×2 rūtiņu kvadrātā kopā ir 64. Varētu likties, ka uzdevuma prasība tāpat kā a) gadījumā būs izpildāma. Tomēr vairākkārtēji neveiksmīgi mēģinājumi liek domāt, ka atbilde uz uzdevumā prasīto varētu būt negatīva. (Šeit skaidri jāsaprot: ja rūtiņu skaits sākotnējā kvadrātā būtu citāds nekā visos iegūstamajos gabaliņos kopā, tad salaušanu **noteikti nevarētu** izdarīt; turpretī rūtiņu skaita vienādība salaušanas iespēju **vēl negarantē**. Skat., piem., A2. zīm., kur pa kreisi attēlotajā figūrā rūtiņu skaits ir tāds pats kā abās pa labi attēlotajās kopā, tomēr tādas daļas nav iegūstamas, sagriežot pa kreisi attēloto figūru.



A2. zīm.

Matemātiķi šādos gadījumos saka: rūtiņu skaitu vienādība ir ***nepieciešams, bet ne pietiekams*** nosacījums tam, lai sagriešanu varētu izdarīt.)

Pamatosim to, ka salaušana nav izdarāma (mūsu vairākkārtējie neveiksmīgie mēģinājumi vieni paši, protams, nav pietiekami, lai to apgalvotu; varbūt vēl pēc dažu stundu pūlēm mums izdotos iegūt vajadzīgo?)



A3. zīm.

Izkrāsosim šokolādes tāfelīti tā, kā parādīts A3. zīm.: pārmaiņus viena kolonna melna, otra balta, utt. Rezultātā 32 lauciņi ir melni un 32 – balti. Ievērosim: lai arī kā L-veida figūra nebūtu nolauzta no šokolādes tāfelītes, tā noteikti saturēs vai nu vienu, vai trīs melnus kvadrātiņus. Tātad tā saturēs nepāra skaitu melnu kvadrātiņu. Savukārt, lai kurā vietā arī nebūtu nolauzta 2×2 rūtiņu figūra, tā noteikti saturēs tieši divus melnus kvadrātiņus.

Pieņemsim, ka mums ir izdevies salauzt šokolādes tāfelīti atbilstoši uzdevuma nosacījumiem. Tad 15 L-veida figūrās kopā ir nepāra skaits melno kvadrātiņu, bet 2×2 rūtiņu figūrā ir divi melni kvadrātiņi. Seko, ka visās 16 laužot iegūtajās figūrās kopā ir nepāra skaits melno kvadrātiņu. Tas ir pretrunā ar mūsu izveidoto krāsojumu: melnā krāsā nokrāsoti 32 – pāra skaits – kvadrātiņu. Tātad mūsu pieņēmums par iespēju salauzt tāfelīti norādītajās daļās ir aplams un uzdevuma prasība nav izpildāma.

1.1.2. ***Atbilde:*** 2 gadi, 2gadi un 9 gadi.

Risinājums. Apskatīsim visas iespējamās trīs naturālu skaitļu kombinācijas, kuru elementu reizinājums ir 36 (secība nav svarīga). Šie trīs skaitļi **a**; **b**; **c** varētu būt iespējamie Jāņa bērnu vecumi (skat. A4. zīm.). Līdztekus aplūkosim arī skaitļu **a**, **b**, **c** summu. Skaidrs, ka autobusa numuram vajadzētu sakrist ar kādu no skaitļiem 38; 21; 16; 14; 13; 11; 10.

a	b	c	a+b+c
1	1	36	38
1	2	18	21
1	3	12	16
1	4	9	14
1	6	6	13
2	2	9	13
2	3	6	11
3	3	4	10

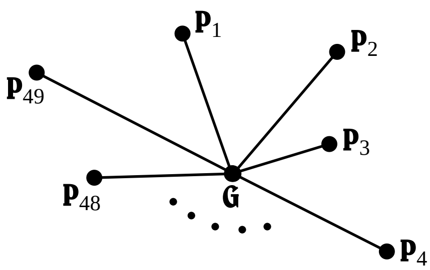
A4. zīm.

Padomāsim, kā veidotos saruna, ja garāmbraucošā autobusa numurs būtu 38. Tad Pēteris bez šaubīšanās varētu pateikt, ka Jāņa bērnu vecumi ir 1 gads, 1 gads un 36 gadi (diezgan neticams variants!), jo summa 38 atbilst tikai vienai reizinātāju a; b; c kombinācijai. Līdzīgi spriežam par gadījumiem, kad autobusa numurs būtu 21, 16, 14, 11 vai 10.

Vienīgi gadījumā, ja autobusa numurs ir 13, ir saprotama Pētera nezina: viņš nevar izšķirties starp divām iespējām – "1 gads, 6 gadi, 6 gadi" un "2 gadi, 2 gadi, 9 gadi". Jāņa piebilde: "Bet vecākais bērns man ir zilacis" šo jautājumu atrisina. Kļūst skaidrs, ka **ir** vecākais bērns, tātad Jāņa bērnu vecumi ir 2 gadi, 2 gadi un 9 gadi.

1.1.3. ***Atbilde:*** 49 aviolīnijas.

Risinājums. Kā redzams A5.. zīm., valstī varētu būt 49 aviolīnijas, kas savieno galvaspilsētu **G** ar pērējām 49 pilsētām P_1, P_2, ..., P_{49}.



A5. zīm.

Tagad pierādīsim, ka vismaz 49 aviolīnijām noteikti jābūt. Valstī noteikti eksistē divas pilsētas A_1 un A_2, kas ir savā starpā savienotas ar aviolīniju. Tā kā no katras pilsētas var aizbraukt uz katru, šī divu pilsētu sistēma nevar būt izolēta no pērējām, tāpēc ir kāda pilsēta $\mathbf{A}_3$, kas ir savienota ar aviolīniju ar kādu no pilsētām $\mathbf{A}_1$ vai $\mathbf{A}_2$. (Tātad starp šīm trim pilsētām noteikti ir vismaz divas aviolīnijas.)

Arī šo trīs pilsētu sistēma nevar būt izolēta no pārējām, tāpēc eksistē kāda pilsēta $\mathbf{A}_4$, kas savienota ar kādu no pilsētām $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$. (Tātad starp šīm četrām pilsētām noteikti ir vismaz trīs aviolīnijas.)

Spriedumu analoģiski turpinot, iegūstam, ka valstī ir vismaz 49 aviolīnijas ("pievienojot" sistēmai vienu pilsētu, pievienojas arī vismaz viena aviolīnija.)

Ievērosim: to, ka nepieciešamas vismaz 49 aviolīnijas, nosaka prasība, lai no katras pilsētas vispār varētu aizbraukt uz katru citu, nevis tas, lai to varētu izdarīt uzdevuma nosacījumos aprakstītajā "ekonomiskajā" veidā.

1.1.4. ***Atbilde:*** 000.

Risinājums. Ievērosim, ka $(2\cdot5)\cdot(4\cdot15)\cdot10=6000$. Pareizinot skaitli 6000 ar pārējiem reizinātājiem, rezultātā pēdējie trīs cipari vienmēr paliks nulles.

Tātad apskatāmā reizinājuma trīs pēdējie cipari ir 000.

1.1.5. ***Atbilde:*** 250; 505; 1016; 2039; 4086.

Risinājums. Šāda tipa uzdevumos atbilde principā varētu būt jebkura. Tiešām, varētu taču gadīties, ka uzdevuma sastādītājs iedomājies, piemēram, šādu likumu:

"pirmie septiņi virknes locekļi ir 3; 4; 7; 14; 29; 60; 123, bet visi tālākie – vieninieki",

vai kaut ko analoģisku.

Tāpēc šādus uzdevumus parasti nepiedāvā matemātikas olimpiādēs, kurās katrs risinājuma solis stingri jāpamato un risinājums precīzi jānovērtē punktu izteiksmē. Piedāvājot šādus uzdevumus konkursos, tiek ņemts vērā risinājuma skaistums, vienkāršība, risinātāja fantāzija – lietas, kuras novērtēt ar punktiem ir ļoti grūti, ja ne neiespējami.

Atzīmēsim, ka parasti uzdevuma autora iedomātais likums atšķiras no pārējiem ar to, ka tas ir ievērojami vienkāršāks un neizmanto dažādas "izņēmuma vērtības" (kā augšminētajā piemērā, kur likums pirmajiem septiņiem virknes locekļiem darbojas pavisam citādi nekā pārējiem).

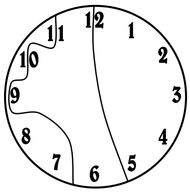
Šai gadījumā uzdevuma autori likumu veidojuši, pievēršot uzmanību virknē blakusesošo locekļu starpībām. Ievērosim: tās ir 1; 3; 7; 15; 31; 63 – par vienu mazākas nekā secīgas divnieka pakāpes 2; 4; 8; 16; 32; 64.

Tātad saskaņā ar autoru iedomāto likumu virknes nākošos locekļus varēs iegūt, iepriekšējam pēc kārtas pieskaitot 127; 255; 511; 1023; 2047 utt. Tāpēc pieci nākošie virknes locekļi, rīkojoties pēc šāda likuma, būtu 250; 505; 1016; 2039; 4086. Iesakām lasītājam patstāvīgi pierādīt: pēc šāda (autoru iecerētā) likuma jebkuru virknes locekli ar numuru n (to varam apzīmēt ar a_n, lasa: "*a* ar indeksu *en*") var aprēķināt pēc formulas $a_n = 2^n + 2 - n$. Pierādījumā pamēģiniet pielietot *matemātiskās indukcijas metodi*, t.i., pārliecināties, vai, virknes loceklim ar indeksu n (loceklim a_n) pieskaitot $(2^n - 1)$, iegūstam virknes $(n+1)$-ā locekļa aprēķināšanas formulu.

2. kārta

1.2.1. ***Atbilde:*** skat., piemēram, A6. zīm.

Risinājums. "Nesašķeļot" visus trīs divciparu skaitļus, uzdevums nav atrisināms. Visās daļās esošo skaitļu summai jābūt 17+17+17=51. Ja "nesašķeļam" nevienu no tiem, šī summa ir 1+2+3+...+12=78; sašķeļot vienu no tiem, summa ir 69 (*pārbaudiet!*); "sašķeļot" divus, tā ir 60 (*pārbaudiet!*).



A6. zīm.

Jautājums zinātkāram lasītājam: kā izskaidrot faktu, ka, "sašķeļot" vienu (vienalga, kuru), iegūto 13 skaitļu summa visos gadījumos ir viena un tā pati? Kā izskaidrot faktu, ka "sašķeļot" divus skaitļus, (vienalga, kurus), iegūto 14 skaitļu summa visos gadījumos ir viena un tā pati?

1.2.2. ***Atbilde:*** 3×6 vai 4×4.

Risinājums. Tiešām, taisnstūra 3×6 laukums ir 3·6=18 un perimetrs ir 3+6+3+6=18, bet kvadrāta (kas arī ir taisnstūris) 4×4 laukums ir 4·4=16 un perimetrs ir 4+4+4+4=16.

Kaut arī uzdevumā tas **nav** prasīts, noskaidrosim, vai tās ir vienīgās iespējas.

Apzīmēsim meklējamā taisnstūra malu garumus ar x un y.

Tad $x \cdot y = 2x + 2y$ jeb

$xy - 2x - 2y + 4 = 4$, jeb

$(x-2)(y-2) = 4$ **(1)**

Izmantosim vienādību **(1)**. Tā kā x un y ir naturāli skaitļi, tad $x-2$ un $y-2$ var būt tikai veseli skaitļi – skaitļa 4 dalītāji. Visas iespējas parādītas A7. zīm.

$x-2$	$y-2$	x	y
4	1	6	3
1	4	3	6
2	2	4	4
-4	-1	-2	1
-1	-4	1	-2
-2	-2	0	0

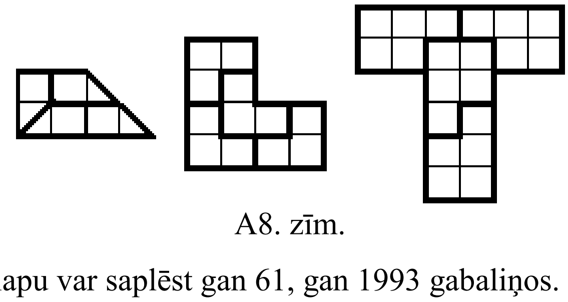
A7. zīm.

Redzam, ka uzdevuma prasības apmierina vienīgi taisnstūris ar izmēriem 3×6 un kvadrāts ar izmēriem 4×4, jo daudzstūra malu garumi nevar būt negatīvi skaitļi vai 0.

1.2.3. ***Atbilde:*** 1 neapmierinošs vērtējums.

Risinājums. Tā kā skolēnu skaitam jābūt veselam skaitlim, tad skaitlim, kas izsaka skolēnu skaitu klasē, noteikti jādalās ar 7, ar 3 un ar 2. Vienīgais skaitlis, kurš apmierina šo prasību un pie tam ir mazāks par 50, ir 42. Tātad atzīmi "9" saņēma seši skolēni, atzīmi "8" – 14 skolēni, atzīmi "7" – 21 skolēns. Tā kā 42–6–14–21=1, tad neapmierinošu vērtējumu saņēma viens skolēns.

1.2.4. ***Atbilde:*** skat., piemēram, A8. zīm.



A8. zīm.

1.2.5. ***Atbilde:*** papīra lapu var saplēst gan 61, gan 1993 gabaliņos.

Risinājums. **a)** Lapu saplēš 8 gabalos. No tiem 6 gabalus saplēš katru 8 gabaliņos, 1 gabalu saplēš 12 gabaliņos, 1 gabalu atstāj veselu.

Kopējais gabalu skaits ir $6\cdot8+12+1=61$.

b) Vispirms lapu saplēš 8 daļās un katru no tām vēl 12 daļās. Iegūtas $8\cdot12= 96$ daļas.

No šīm 96 daļām septiņas saplēšam katru 8 gabalos, divas – katru 12 gabalos, 87 daļas atstājam nesaplēstas. Tagad mums ir $7\cdot8+2\cdot12+87=167$ gabali.

Vienu gabalu atstājot nesaplēstu, bet pārējos 166 saplēšot katru 12 gabaliņos, iegūstam $166\cdot12+1=1993$ gabaliņus.

Iesakām lasītājam patstāvīgi pamatot, ka ar uzdevumā pieļautajām operācijām var iegūt jebkuru gabaliņu skaitu, kas nav mazāks par 61. Ievērojiet, ka katrā plēšanas reizē daļu skaits palielinās vai nu par 7, vai par 11.

3. kārta

1.3.1. ***Atbilde:*** jā, var.

Risinājums. Piemēram, Karaļdēls var pieveikt pūķi ar šādiem 9 cirtieniem (skat. A9. zīm.):

Nr.	Cik galvas nocērt	Cik astes nocērt	Cik galvas paliek	Cik astes paliek
1.	-	1	3	4
2.	-	1	3	5
3.	-	1	3	6
4.	-	2	4	4
5.	-	2	5	2
6.	-	2	6	0
7.	2	-	4	0
8.	2	-	2	0
9.	2	-	0	0

A9. zīm.

Uzdevuma risinājums atrasts sekojoši. Skaidrs, ka nocirst vienu galvu nav nozīmes, jo tā tūdaļ ataug. Zobena īpašības ļauj **a)** palielināt astu skaitu par 1, galvu skaitu nemainot, **b)** aizstāt divas astes ar vienu galvu, **c)** samazināt galvu skaitu par 2.

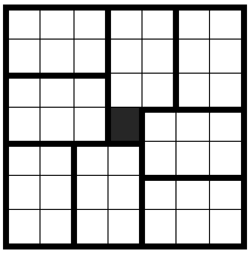
Uzstādām mērķi – panākt, lai pūķim nebūtu nevienas astes un būtu pāra skaits galvu, tad to varēs uzveikt ar **c)** tipa cirtieniem.

Panākt, lai Pūķim nebūtu nevienas astes, var, cērtot tās nost pa divām; tad vispirms astu skaits jāpadara par pāra skaitli. To var izdarīt, palielinot astu skaitu pakāpeniski par 1. Katrs astu pāris, to nocērtot, radīs vienu galvu. Mums vajag, lai brīdī, kad visas astes būs nocirstas, galvu daudzums būtu pāra skaitlis. Tā kā sākumā ir trīs galvas, tad vajag, lai astu pāru būtu nepāra skaits. Mazākais iegūstamais nepāra daudzums astu pāru ir 3.

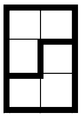
1. – 3. cirtienos mēs iegūstam 3 astu pārus.
4. – 5. cirtienos nocērtam visas astes, padarot galvu daudzumu par pāra skaitli.
7. – 9. cirtienos nocērtam visas galvas.

1.3.2. ***Atbilde:*** jā, var.

Risinājums. Skat., piem., A10. zīm., kur katru no taisnstūriem ar izmēriem 2×3 var sagriezt 2 vienādos stūrīšos (skat. A11. zīm.).



A10. zīm.



A11. zīm.

Iesakām lasītājam izpētīt citu figūriņu iespējamo sagriešanu stūrīšos. Piemēram, ir spēkā šāds rezultāts, ko astoņdesmito gadu beigās pierādīja LU studente Regīna Stadja:

ja $m \geq 7$, $n \geq 7$ un no taisnstūra ar izmēriem $m \times n$ rūtiņas izgriezta viena rūtiņa, tad, ja $m \cdot n - 1$ dalās ar 3, atlikušo daļu var sagriezt stūrīšos.

1.3.3. ***Atbilde:*** 13 riekstus.

Risinājums. No uzdevumā dotā seko, ka pērtiķu skaitam jābūt skaitļa 33 dalītājam. Tātad šis skaits varētu būt 3, 11 vai 33 (nevar būt 1 pērtiķis, jo tad nevarētu notikt strīds). Aplūkosim visas trīs iespējas. Ar x apzīmēsim riekstu skaitu, ko savāca katrs pērtiķis pirms ķīviņa.

a) Ja Mauglim riekstus nesa 3 pērtiķi, tad pēc ķīviņa viņiem palika $3(x-2)$ rieksti. Tātad $3(x-2)=33$. Seko, ka x=13.

b) Līdzīgi 11 pērtiķu gadījumā iegūstam vienādojumu $11(x-10)=33$, no kura atkal seko, ka x=13.

c) Ja pērtiķu skaits ir 33, tad attiecīgais vienādojums ir $33(x-31)=33$ un x=32. Bet šī atbilde neder, jo katrs pērtiķis var panest ne vairāk kā 20 riekstus.

Tātad uzdevumam ir tieši viena atbilde: katrs pērtiķis salasīja 13 riekstus.

1.3.4. ***Atbilde:*** 561 un 165.

Risinājums. Acīmredzami abiem spoguļskaitļiem jābūt trīsciparu; ja tie būtu divciparu, tad reizinājumā būtu ne vairāk kā 4 cipari, bet, ja tie būtu četrciparu, tad reizinājumā būtu vismaz 7 cipari.

Sadalīsim skaitli 92565 pirmreizinātājos: 92565=3·3·5·11·11·17. Abi spoguļskaitļi jāizveido no šiem reizinātājiem. Vienā no spoguļskaitļiem ietilpst 17; lai šis spoguļskaitlis būtu trīsciparu, 17 jāpareizina vismaz ar 6 (jo 5·17=85) un ne vairāk kā ar 58 (jo 59·17=1003). Tātad 17 varētu tikt pareizināts ar 11, 3·3=9, 3·5=15, 3·11=33, 5·11=55, 3·3·5=45.

Pārbaudot šīs iespējas, atrodam, ka der tikai skaitļu pāris (561,165): 561=3·11·17, 165=3·5·11.

1.3.5. ***Atbilde:*** piemēram, uzdodot jautājumu: "*Ko melis atbildēs uz jautājumu, uz kuru jāatbild "**top**"?*"

Risinājums. Uzdosim iezemietim jautājumu: "*Ko melis atbildēs uz jautājumu, uz kuru jāatbild "top"?*" *Pareizā* atbilde uz šo jautājumu ir „**tip**" (melis vienmēr melo, tāpēc „*jā*" vietā saka „*nē*" un „*nē*" vietā saka „*jā*").

Ja mēs runāsim ar godīgu iezemieti, tad viņš teiks "**tip**", bet ja mēs runāsim ar meli, tad viņš atkal samelos un atbildēs pretējo – tātad "**top**". Tātad pēc saņemtās atbildes mēs viennozīmīgi varēsim secināt, vai mūsu sarunu biedrs ir godīgs vai melis.

4. kārta

1.4.1. ***Atbilde:*** 303.

Risinājums. Sagrupējam ietilpstošos locekļus sekojoši:

$$1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+(10-11-12+13)+\ldots+(298-299-300+301)+302$$

(Tā kā katrās iekavās ievietoti četri izteiksmes locekļi un, dalot locekļu skaitu 302 ar 4, atlikumā iegūstam 2, tad grupās neievietoti paliek divi locekļi: pirmais – vieninieks un pēdējais – skaitlis 302).

Apzīmējot katras grupas pirmo locekli ar a, iegūstam, ka iekavu vērtība ir

$$a-(a+1)-(a+2)+(a+3)=0.$$

Tāpēc visas izteiksmes vērtība ir 1+302=303.

Iesakām lasītājam atrisināt uzdevumu, grupējot locekļus arī citādi, piemēram,

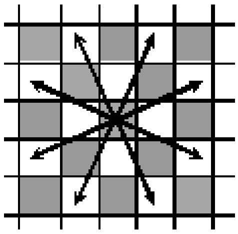
$$(1+2-3-4)+(5+6-7-8)+(9+10-11-12)+\ldots.$$

1.4.2. ***Atbilde:*** 352 lpp.

Risinājums. Ja izplīsušā fragmenta pirmās lappuses numurs ir 387. – nepāra skaitlis, tad pēdējam numuram noteikti jābūt pāra skaitlim, kas pie tam lielāks par 387. Līdz ar to pēdējās izplēstās lappuses numurs var būt tikai 738. Tātad izplīsušajā fragmentā ir 738–387+1=352 lappuses.

1.4.3. ***Atbilde:*** prasītais zirdziņa maršruts neeksistē ne **a)**, ne **b)** gadījumā.

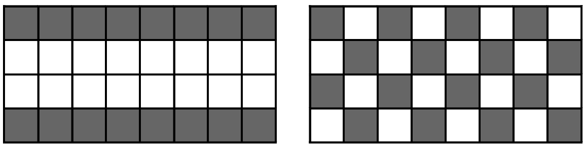
Risinājums. **a)** Izkrāsosim 7×9 lauciņu galdiņu parastā šaha galdiņa kārtībā, krāsojot lauciņus baltā un melnā krāsā. Uzdevumos par šaha zirdziņa gājieniem šī krāsojuma priekšrocības slēpjas faktā, ka šaha zirdziņš ar katru nākošo gājienu nokļūst pretējās krāsas lauciņā nekā tas, uz kura zirdziņš stāvēja pirms gājiena: no melnā uz balto un no baltā uz melno (skat. A12. zīm.).



A12. zīm.

Lai zirdziņš varētu apstaigāt galdiņu saskaņā ar uzdevumā prasīto, viņam jāizdara 63 gājieni – nepāra skaits. Viegli saprast, ka pēc 2., 4., 6., … – pēc jebkura pāra skaita gājienu zirdziņš atrodas tādas pašas krāsas lauciņā, kādā tas atradās kustības sākumā. Tāpēc pēc 63.gājiena tas atradīsies citas krāsas lauciņā nekā sākumā. Bet ar 63. gājienu zirdziņam vajadzētu atgriezties sākotnējā lauciņā. Saskaņā ar iepriekš sacīto tas nav izdarāms.

b) Lai noskaidrotu atbildi uz **b)** jautājumu, izkrāsosim 4×8 lauciņu galdiņu divos veidos (skat. A13. a) un b) zīm.).



a) b)

A13. zīm.

A13. a) zīm. iekrāsotos lauciņus nosauksim par *ārējiem*, bet neiekrāsotos par *iekšējiem*. Ievērosim, ka gadījumā, ja šaha zirdziņš atrodas uz *ārējā* lauciņa, tad ar savu nākošo gājienu tas var nonākt tikai *iekšējā* lauciņā. Un otrādi – zirdziņš var nokļūt *ārējā* lauciņā tikai no *iekšējā* lauciņa. Savukārt, ja zirdziņš atrodas *iekšējā* lauciņā, tad ar nākošo gājienu tas var nokļūt gan *iekšējā*, gan *ārējā* lauciņā.

Pierādīsim, ka patiesībā zirdziņam no *iekšējā* lauciņa noteikti jāiet uz *ārējo* lauciņu.

Kustības gaitā zirdziņam jāaiziet no visiem 16 ārējiem lauciņiem. Tā kā viņa "*piezemēšanās vietas*" šajos gadījumos var būt tikai *iekšējie* lauciņi un to skaits arī ir 16, tad katrs no tiem tiek izmantots kā "*piezemēšanās vieta*" vienu reizi, aizejot no kāda *ārējā* lauciņa (atceramies, ka katrā lauciņā drīkst nonākt tikai vienu reizi). Bet tad nevienu *iekšējo* lauciņu X nedrīkst izmantot kā "*piezemēšanās vietu*", aizejot no *iekšēja* lauciņa, jo tad lauciņā X zirdziņš nonāktu divas reizes, kas nav atļauts.

Secinām, ka *ārējie* un *iekšējie* lauciņi zirdziņa maršrutā var sakārtoties divējādi:

ie→ā→ie→ā→ie→ā→…→ie→ā→ie

(*) vai

ā→ie→ā→ie→ā→ie→…→ā→ie→ā

Aplūkojot A13. b) zīm., kur lauciņi krāsoti melnā un baltā krāsā, redzam, ka zirdziņa maršrutā krāsas mainās kā

b→m→b→m→b→m→…→b→m→b

(**) vai

m→b→m→b→m→b→…→m→b→m

No (*) un (**) seko, ka mūsu domājamā zirdziņa maršrutā visi apstaigātie ārējie lauciņi ir vienā un tai pašā krāsā. Tas nozīmē, ka otras krāsas ārējie lauciņi apstaigāti netiek. Tātad uzdevuma prasības netiek izpildītas.

Secinām, ka prasītā zirdziņa maršruta nav.

Piezīme: ja mēs būtu izmantojuši tikai A13. b) zīm. un mēģinājuši spriest tā kā **a)** uzdevuma risinājumā, mēs pie mērķa nenonāktu. Tiešām, mēs konstatētu, ka melno un balto lauciņu ir vienāds skaits, jāizdara pāra skaits gājienu un ar pēdējo gājienu jāatgriežas tās pašas krāsas lauciņā kā tas, no kura sākta kustība; tas it kā varētu būt iespējams. Situācija ir tāda pati kā 1.1.1. uzdevuma risinājumā: melno un balto rūtiņu skaitu vienādība ir ***nepieciešams***, bet ne ***pietiekams*** nosacījums tam, lai eksistētu slēgts šaha zirdziņa maršruts.

1.4.4. ***Atbilde:*** tādi skaitļi neeksistē.

Risinājums. Starp katriem diviem pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem viens ir pāra skaitlis; starp katriem pieciem pēc kārtas sekojošiem skaitļiem viens dalās ar 5. Tāpēc katru piecu (vai vairāk) pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums dalās gan ar 2, gan ar 5, tātad tas dalās ar 10, tātad beidzas ar ciparu 0.

Atliek noskaidrot, vai skaitlis, kas beidzas ar ciparu 8, var būt divu, triju vai četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums.

Risinājumā izmantosim faktu: *divu vai vairāku naturālu reizinātāju reizinājums beidzas ar tādu pašu ciparu, ar kādu beidzas reizinātāju pēdējo ciparu reizinājums*.

Aplūkosim, ar kādu ciparu var beigties divu pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu reizinājums. Apzīmēsim mazāko no tiem ar **n**; tad lielākais ir **n+1**. Apskatām visas iespējas:

n beidzas ar	**n+1** beidzas ar	**n(n+1)** beidzas ar
0	1	0
1	2	2
2	3	6
3	4	2
4	5	0
5	6	0
6	7	2
7	8	6
8	9	2
9	0	0

Redzam, ka **n(n+1)** nevienam naturālam n nebeidzas ar ciparu 8.

Līdzīgi pārbaudām, ka **n(n+1)(n+2)** var beigties tikai ar cipariem 0; 4; 6:

n beidzas ar	**n+1** beidzas ar	**n+2** beidzas ar	**n(n+1)(n+2)** beidzas ar
0	1	2	0
1	2	3	6
2	3	4	4
3	4	5	0
4	5	6	0
5	6	7	0
6	7	8	6
7	8	9	4
8	9	0	0
9	0	1	0

Reizinājums **n(n+1)(n+2)(n+3)** var beigties tikai ar cipariem 0; 4 (**n** – naturāls):

n beidzas ar	**n+1** beidzas ar	**n+2** beidzas ar	**n+3** beidzas ar	**n(n+1)(n+2)(n+3)** beidzas ar
0	1	2	3	0
1	2	3	4	4
2	3	4	5	0
3	4	5	6	0
4	5	6	7	0
5	6	7	8	0
6	7	8	9	4
7	8	9	0	0
8	9	0	1	0
9	0	1	2	0

Tātad tādu skaitļu, par kādiem runāts uzdevumā, nemaz nav.

1.4.5. ***Atbilde.*** Par uzdevumā prasīto līniju der jebkura noslēgta līnija, kas uzzīmēta uz lodes virsmas. Visi šīs līnijas punkti atrodas vienādā attālumā no lodes centra P.
Plaknē bez riņķa līnijas citu līniju ar šādu īpašību nav.