ATRISINĀJUMI
1993./94. mācību gads
1. kārta

2.1.1. ***Atbilde:*** Annas tantei var būt divi vai trīs dzīvnieki.

Risinājums. Apzīmēsim suņu, kaķu, papagaiļu un tarakānu skaitu atbilstoši ar *s, k, p, t*. Iegūstam vienādības

$$k+p+t=2$$
$$s+k+t=2 \qquad \textbf{(1)}$$
$$s+p+t=2$$

Tās saskaitot, iegūstam

$$2(k+s+p)+3t=6 \qquad \textbf{(2)}$$

Ievērosim, ka $t\geq 0$ un t – vesels skaitlis. Ja $t>2$, tad no **(2)** seko, ka

$$2(k+s+p)=6-3t<0.$$

Tā nevar būt, jo $k\geq 0$, $s\geq 0$ un $p\geq 0$, tātad arī $k+s+p\geq 0$. Tāpēc *t* var pieņemt tikai vērtības 0; 1; 2. Apskatīsim šīs iespējas.

A. Ja $\boldsymbol{t=2}$, no **(2)** seko $k+s+p=0$; tā kā *k, s, p* nav negatīvi, tad *k*=*s*=*p*=0. Iznāk, ka Annas tantei ir 2 tarakāni un nav citu dzīvnieku. Vai šāda iespēja apmierina uzdevuma nosacījumus? Vārdi "visi dzīvnieki, izņemot divus" šai gadījumā nozīmē "visi, izņemot abus tarakānus". No formālās loģikas viedokļa viss ir kārtībā: katrs dzīvnieks, kas ir Annas tantei, izņemot abus tarakānus, ir gan kaķis, gan suns, gan papagailis, jo šādu dzīvnieku nemaz nav! Tātad ir iespējams, ka Annas tantei ir 2 dzīvnieki – 2 tarakāni.

B. Ja $\boldsymbol{t=1}$, tad no **(2)** iznāk $2(k+s+p)=3$. Tas nav iespējams, jo $2(k+s+p)$ ir pāra skaitlis, bet 3 – nepāra skaitlis.

C. Ja $\boldsymbol{t=0}$, tad no **(2)** seko

$$k+s+p=3 \qquad \textbf{(3)}$$

Atgriežoties pie sākotnējām vienādībām **(1)** un ievietojot $t=0$, iegūstam

$$k+p=2$$
$$s+k=2 \qquad \textbf{(4)}$$
$$s+p=2$$

Atņemot no **(3)** pa vienai visas trīs vienādības **(4)**, iegūstam $s=1$, $k=1$, $p=1$, t.i., Annas tantei ir viens suns, viens kaķis un viens papagailis. Viegli pārbaudīt, ka arī šis gadījums apmierina uzdevuma prasības.

2.1.2. ***Atbilde:*** **a)** 77192329; **b)** 11111229

Risinājums. Uzrakstot rindā augošā secībā pirmos desmit pirmskaitļus, iegūstam skaitli

$$S=2357111317192329.$$

No tā jāizsvītro 8 cipari.

Uzdevuma risinājumā balstīsimies uz diviem faktiem.

A Ja diviem naturāliem skaitļiem ir vienāds ciparu skaits, tad lielāks ir tas skaitlis, kam lielāks pirmais cipars (vai lielāks *n*–tais cipars, ja abiem skaitļiem pirmie, otrie, trešie, …, (*n*-1)–ie cipari sakrīt).

B Pieņemsim, ka kādā ciparu virknē vairākās vietās sastopams cipars *a*. Ja, izsvītrojot vairākus ciparus, no virknes X var iegūt virkni Y, kas sākas ar ciparu a, tad virkni Y noteikti var iegūt šādas izsvītrošanas ceļā, atstājot neizsvītrotu pašu pirmo a eksemplāru virknē X.

(Piemēram, no 12020354 var iegūt virkni 234 sekojošā ceļā: ~~120~~2~~0~~3~~5~~4, bet to pašu var iegūt arī kā ~~1~~2~~020~~3~~5~~4).

Tiešām, ja virkne Y jau sākas ar cipara *a* pirmo eksemplāru, viss kārtībā. Ja virkne Y sākas ar cipara *a* kādu tālāku eksemplāru, tad tādu pašu Y varam iegūt, izsvītrojot šo tālāko *a* eksemplāru, neizsvītrojot pirmo *a* eksemplāru, bet pārējā daļā svītrošanu nemainot.

Pamatojoties uz **B**, varam secināt: ja mums kādu apsvērumu dēļ virknē jāatstāj cipars *a*, tad mēs to noteikti varam darīt, atstājot vistālāk pa kreisi esošo pieejamo *a* eksemplāru, un šāda rīcība mūsu tālākās iespējas nesašaurinās.

Tagad pārejam pie uzdevuma risinājuma.

a) Pēc svītrošanas iegūstamajā 8–ciparu skaitlī (apzīmēsim to ar $x = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8}$) pirmo ciparu jācenšas atstāt iespējami lielu – atcerieties faktu **A**! Lielākie mums pieejamie cipari ir 9 un 7. Ja $x_1=9$, tad virknē x nevar būt 8 cipari, tāpēc $x_1=7$. Pamatojoties uz faktu **B**, svītrojam virknē *S* trīs pirmos ciparus; paliek virkne

$S_1=7111317192329$

Pamatojoties uz faktu **A**, otrais cipars jāizvēlas iespējami liels. Atkal redzam, ka nevaram izvēlēties ciparu 9 (tad skaitlī x nevarēs būt vairāk par 6 cipariem), tāpēc jābūt $x_2=7$; to varam izvēlēties tikai vienā veidā. Svītrojot ciparus starp abiem septītniekiem, iegūstam

$S_2=77192329$

Redzam, ka palikuši tikai 8 cipari, tātad tālāka svītrošana nav iespējama, un meklējamais skaitlis *x* jau ir iegūts.

b) Līdzīgi cenšoties pirmos ciparus atstāt iespējami mazus, iegūstam, ka meklējamo svītrošanu jārealizē kā

~~2357~~111~~3~~1~~7~~1~~9~~2~~3~~29,

iegūstot skaitli 11111229.

2.1.3. ***Atbilde:*** 2100010006.

Risinājums. Viegli pārliecināties, ka par uzdevumā prasīto skaitli der skaitlis 2100010006. To var atrast, piemēram, mēģinājumu ceļā.

Parādīsim, kā šo skaitli varēja atrast loģisku spriedumu ceļā, un vienlaikus parādīsim, ka citu šādu skaitļu nav.

Ciparus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sauksim par zīmīgiem cipariem. Tā kā mums jāatrod desmitciparu skaitlis, tad pirmajam ciparam noteikti jābūt zīmīgajam ciparam.

Mēģināsim noskaidrot, cik nuļļu var būt meklējamajā skaitlī.

Skaidrs, ka visi cipari nevar būt nulles, jo pēdējam ciparam jānorāda, cik nulles ir skaitlī, tātad tas nav nulle.

Šādā skaitlī nevar būt arī deviņas nulles jeb tikai viens zīmīgais cipars, jo zīmīgiem jābūt gan pirmajam ciparam, gan pēdējam (kas norāda nuļļu skaitu).

Tāpat meklējamajā skaitlī nevar būt tieši astoņas nulles, jo jābūt vismaz trīs zīmīgajiem cipariem: pirmajam, pēdējam (tas būtu 8) un astotajam (jo būs vismaz viens astotnieks – pēdējais cipars).

Neviens zīmīgais cipars šajā skaitlī nevar atkārtoties 6 vai vairāk reizes, t.i., šajā skaitlī neviens cipars (varbūt vienīgi izņemot pēdējo ciparu) nav 6, 7, 8 vai 9. Pierādīsim šo faktu. Pieņemsim, ka meklējamā skaitlī *k*–tais cipars (*k*=1, 2, …, 9) nav mazāks par 6. Tas nozīmē, ka meklējamā skaitlī ir vismaz 6 (cipars *k*, kurš atkārtojas vismaz 6 reizes) + $5 \cdot k$ ($k \neq 0$, tāpēc jābūt vismaz pieciem citiem dažādiem cipariem, katrs no kuriem atkārtojas tieši *k* reizes) ciparu. Bet *k* mazākā iespējamā vērtība ir 1, tāpēc $6+5k \geq 6+5 \cdot 1=11$. Tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumu, ka meklējamajā skaitlī ir desmit ciparu, tātad mūsu pieņēmums bija aplams un neviens zīmīgais cipars nevar atkārtoties vairāk kā piecas reizes.

Pieņemsim, ka meklējamā skaitlī k–tais cipars ir 5. Spriežot līdzīgi kā iepriekš, iegūstam, ka šajā skaitlī būs vismaz $5+4k$ cipari. Ja $k\geq 2$, tad $5+4k\geq 5+4\cdot 2=13$, kas arī neatbilst uzdevuma nosacījumiem. Ja $k=1$, tad $5+4k=5+4\cdot 1=9$. Taču šis rezultāts vēl nenozīmē, ka šāds skaitlis, kura pirmais cipars ir 5 un vieninieks atkārtojas 5 reizes, patiešam eksistē. Mēģināsim izveidot šādu skaitli. Ja pirmais cipars ir 5, tad skaitlī vēl ir pieci vieninieki. Tas nozīmē, ka vēl vismaz 3 citi zīmīgie cipari a, b, c (izņemot 1 un 5) šajā skaitlī parādās vienu reizi. Bet tas savukārt nozīmē, ka šajā skaitlī ir vēl trīs citi no 1, 5, a, b, c atšķirīgi cipari p, m, n, katrs no kuriem skaitlī atkārtojas attiecīgi a, b, c reizes. Tātad šajā skaitlī pavisam kopā ir vismaz $1+5+p\cdot a+m\cdot b+p\cdot n$ cipari. Tā kā starp p, m, n vismaz divi ir zīmīgie cipari(t.i., nav nulle) un no cipariem a, b, c arī neviens nav 0 vai 1 (tātad tie visi ir lielāki nekā 1), tad $6+p\cdot a+m\cdot b+p\cdot n>6+2\cdot 2+2\cdot 2>10$. Atkal ieguvām pretrunu uzdevuma nosacījumiem, tātad neviens zīmīgais cipars šajā skaitlī nevar atkārtoties arī 5 reizes.

Līdzīgi pierāda, ka neviens zīmīgais cipars nevar atkārtoties arī 4 vai 3 reizes.

Mēģināsim izveidot skaitli, kurā kāds zīmīgais cipars atkārtojas 2 reizes. Šis cipars nevar būt 2 vai lielāks, jo tādā gadījumā meklējamā skaitlī būtu jābūt vairāk nekā 10 cipariem (izspriež līdzīgi kā iepriekšējā pierādījumā). Tātad veidosim skaitli, kurš atbilstu uzdevuma nosacījumiem un kurā cipars 1 atkārtojas 2 reizes. Tātad šī skaitļa pirmais cipars ir 2 un otrais cipars ir 1 (otrais cipars nevar būt 2 vai lielāks, tas seko no iepriekš pierādītā). Tātad šajā skaitlī vēl ir viens vieninieks, nulles un viens zīmīgais cipars, kas parāda nuļļu skaitu (nevar būt tikai viena nulle, jo tad skaitlī būtu jābūt vismaz 8 zīmīgiem cipariem, bet tad šis skaitlis neatbilstu uzdevuma prasībām). Tātad šajā skaitlī pavisam ir 4 zīmīgie cipari: abi vieninieki, divnieks un pēdējais cipars. Tātad pārējie seši cipari ir nulles un meklējamais skaitlis ir 2100010006.

Esam apskatījuši visus iespējamos gadījumus, tātad neviena cita skaitļa, kas atbilstu uzdevuma nosacījumiem, nav.

2.1.4. ***Atbilde:*** jā, var, piemēram, vienā kaudzītē liekot atsvarus ar masām 10 g, 11 g, ..., 18 g, 20 g, 21 g, ..., 35 g, 68 g, 69 g, ..., 92 g, bet otrā kaudzītē visus pārējos atsvarus.

Risinājums. Vispirms noskaidrosim, vai vispār iespējams atlikušos atsvarus sadalīt divās kaudzēs tā, lai atsvaru masas abās kaudzēs būtu vienādas, t.i., vai atlikušo atsvaru kopējā masa ir pāra skaitlis.

Aprēķināsim, cik ir visu atsvaru kopējā masa. Atsvaru masas ir 1 g, 2 g, 3 g, …, 100 g, 101 g, t.i., katrs nākamais atsvars ir tieši par vienu gramu smagāks nekā iepriekšējais. Šādu skaitļu virkni, kur katrs nākamais skaitlis iegūstams iepriekšējam skaitlim pieskaitot vienu un to pašu skaitli, sauc par ***aritmētisko progresiju***. *Aritmētiskās progresijas* pirmo locekli apzīmē ar a_1, otro – ar a_2, …, n–to locekli – ar a_n, bet skaitli, kuru pieskaita (par kuru atšķiras katrs nākamais loceklis no iepriekšējā), sauc par diferenci un apzīmē ar d. Aritmētiskās progresijas pirmo n locekļu summu S_n aprēķina pēc formulas $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$. Tātad uzdevumā doto visu atsvaru kopējā masa ir $\dfrac{(1+101)\cdot 101}{2}=51\cdot 101=5151\,(g)$. No šī komplekta izņemot atsvaru ar masu 19 g, atlikušo atsvaru masa ir 5151–19=5132 (g). Tas ir pāra skaitlis, tātad varētu būt iespējami sadalīt šos atsvarus divās kaudzēs ar vienādām masām, taču, kā saka matemātiķi, tas ir tikai *nepieciešamais* nosacījums un negarantē uzdevuma prasību izpildi.

Ja dotos atsvarus var sadalīt atbilstoši uzdevuma prasībām tad vienā kaudzē ievietoto atsvaru kopējai masai jābūt $5132:2=2566$ g.

Apvienosim atsvarus pa pāriem (1 g; 101 g), (2 g; 100 g), (3 g; 99 g), …, (17 g; 85 g), (18 g; 84 g) (18 pāri; katra pāra masa ir 102 g) un (20 g; 83 g), (21 g; 82 g), …, (50 g; 53 g), (51 g; 52 g) (32 pāri; katra pāra masa ir 103 grami). Vienā kaudzē izvēloties 9 pirmā veida pārus un 16 otrā veida pārus, bet pārējos atsvarus atstājot otrā kaudzē, būsim izpildījuši uzdevuma prasības.

Patiešām, katrā kaudzē ir 9+16=25 atsvaru pāri, tātad 25·2=50 atsvari, un katras kaudzes masa ir $9 \cdot 102 + 16 \cdot 103 = 2566$ (g).

2.1.5. ***Atbilde:*** $d<a<c<b$.

Risinājums. Pārveidosim dotos skaitļus:

$$a = 2^{45} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2}_{45\ reizes} = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{9\ reizes} = \left(2^5\right)^9 = 32^9$$

$$b = 3^{36} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 3}_{36\ reizes} = \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot \ldots \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{9\ reizes} = \left(3^4\right)^9 = 81^9$$

$$c = 4^{27} = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 4}_{27\ reizes} = \underbrace{(4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot \ldots \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4)}_{9\ reizes} = \left(4^3\right)^9 = 64^9$$

$$d = 5^{18} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 5}_{18\ reizes} = \underbrace{(5 \cdot 5) \cdot \ldots \cdot (5 \cdot 5)}_{9\ reizes} = \left(5^2\right)^9 = 25^9$$

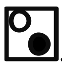
Lai salīdzinātu skaitļus 32^9, 81^9, 64^9, 25^9, jāsalīdzina skaitļi 32, 81, 64, 25; rezultāts būs lielāks, ja lielāku skaitli reizinās pašu ar sevi 9 reizes. Tā kā 25<32<64<81, tad arī $25^9 < 32^9 < 64^9 < 81^9$ jeb $d<a<c<b$.

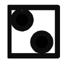
2. kārta

2.2.1. ***Risinājums.*** Tā kā zemniekam ir 12 *l* piena, tad, sadalot to divās vienādās daļās, jāiegūst divos traukos katrā pa 6 *l* piena. Kā zemnieks var rīkoties, parādīts sekojošā tabulā (skat. A14.zīm.):

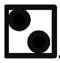
	12*l* kannā	**8*l* spainī**	**5*l* kannā**	
Sākumā	12 *l*	0 *l*	0 *l*	piepilda 8*l* spaini
pēc 1.liešanas	4 *l*	8 *l*	0 *l*	no 8*l* spaiņa piepilda 5*l* kannu
pēc 2.liešanas	4 *l*	3 *l*	5 *l*	5*l* kannas saturu salej 12*l* kannā
pēc 3.liešanas	9 *l*	3 *l*	0 *l*	8*l* spaini iztukšo 5*l* kannā
pēc 4.liešanas	9 *l*	0 *l*	3 *l*	no 12*l* kannas piepilda 8*l* spaini
pēc 5.liešanas	1 *l*	8 *l*	3 *l*	no 8*l* spaiņa piepilda pilnu 5*l* kannu
pēc 6.liešanas	1 *l*	6 *l*	5 *l*	5*l* kannas saturu salej 12*l* kannā
pēc 7.liešanas	6 *l*	6 *l*	0 *l*	

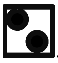
A14. zīm.

2.2.2. ***Atbilde:*** jāizņem viena cepure no atvilktnes ar zīmīti .

Risinājums. Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, atvilktnē ar zīmīti  var atrasties vai nu divas melnas cepures, vai viena balta un viena melna cepure; izvelkot tikai vienu cepuri no šīs atvilktnes, nevar viennozīmīgi pateikt, kādas cepures tur atrodas. Atvilktnē ar zīmīti  var atrasties vai nu divas baltas cepures, vai viena balta un viena melna cepure; arī šajā gadījumā, izvelkot tikai vienu cepuri, nevar viennozīmīgi pateikt, kādas cepures atrodas šajā atvilknē. Atvilktnē ar zīmīti  var atrasties vai nu divas baltas, vai divas melnas cepures; izvelkot vienu cepuri no šīs atvilktnes, varam viennozīmīgi pateikt, kādas cepures īstenībā atrodas šajā atvilktnē: ja izvilktā cepure ir balta, tad šajā atvilktnē ir divas baltas cepures, ja melna – tad divas melnas cepures. Tagad noskaidrosim, kā pareizi ir jāsaliek zīmītes uz pārējām atvilktnēm, kad esam noskaidrojuši atvilktnes  saturu.

Ja sākumā uz atvilktnēm bija zīmītes šādā secībā , ,  un

1) no atvilktnes  izņemtā cepure ir balta, tad patiesībā pie otrās atvilktnes jābūt zīmītei ; tā kā nevienā atvilktnē cepuru krāsa neatbilst zīmītei, tad zīmītei  jābūt pie pirmās atvilktnes un pie trešās atvilktnes jābūt zīmītei .

Pareizā zīmīšu secība ir , , .

2) no atvilktnes  izņemtā cepure ir melna, tad patiesībā pie otrās atvilktnes jābūt zīmītei ; tā kā nevienā atvilktnē cepuru krāsa neatbilst zīmītei, tad zīmītei  jābūt pie trešās atvilktnes un pie pirmās atvilktnes jābūt zīmītei .

Pareizā zīmīšu secība ir , , .

2.2.3. ***Atbilde:*** 3.

Risinājums. Jebkurš naturāls skaitlis, tātad arī pirmskaitlis, var vai nu

1) dalīties ar 3; tad to var uzrakstīt formā $p=3k$, k – naturāls. Vienīgais pirmskaitlis, kas dalās ar 3, ir 3. Pārbaudīsim, vai pirmskaitlis p=3 atbilst uzdevuma prasībām: $2p+1=2\cdot3+1=7$ ir pirmskaitlis un $4p+1=4\cdot3+1=13$ ir pirmskaitlis. Tātad pirmskaitlis p=3 apmierina uzdevuma prasības.

2) dot atlikumu 1, dalot ar 3; tad to var uzrakstīt formā $p=3k+1$, k – naturāls. Tā kā p ir pirmskaitlis un mazākais pirmskaitlis ir 2, tad $k\geq1$. Tad

$2p+1=2\cdot(3k+1)+1=6k+3=3\cdot(2k+1)\geq3\cdot(2\cdot1+1)=9$ un dalās ar 3, tātad $2p+1$ nav pirmskaitlis un uzdevuma prasības neapmierina neviens pirmskaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1.

3) dot atlikumu 2, dalot ar 3; tad to var uzrakstīt formā $p=3k+2$, k – naturāls vai 0. Tad

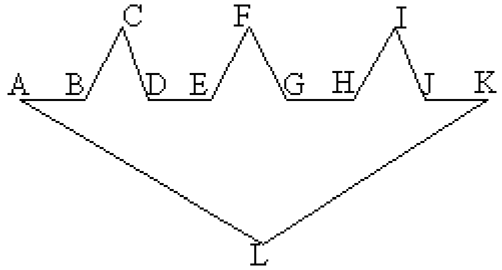
$4p+1=4\cdot(3k+2)+1=12k+9=3\cdot(4k+3)\geq9$ un dalās ar 3, tātad $4p+1$ nav pirmskaitlis. Tātad uzdevuma prasības neapmierina neviens pirmskaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2.

Esam aplūkojuši visas iespējas, un vienīgais pirmskaitlis, kas apmierina uzdevuma prasības, ir skaitlis 3.

2.2.4. ***Atbilde:*** 8 virsotnes.

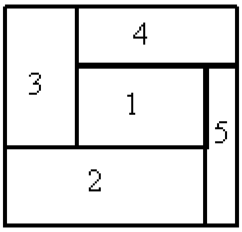
Risinājums. Pieņemsim, ka dots 12–stūris ABCDEFGHIJKI.

Sadalīsim šī daudzstūra virsotnes četrās grupās pa trim virsotnēm katrā: A, B, C; D, E, F; G, H, I; J, K, L. Katrā grupā apvienotas blakus virsotnes, t.i., uz vienas taisnes no šiem trīs punktiem var atrasties tikai divi punkti. Ja kādā grupā uz vienas taisnes atrastos visi trīs punkti no vienas grupas, tad daudzstūrim būtu mazāk nekā 12 virsotņu un tas nebūtu 12-stūris. Tātad 12-stūrī uz vienas taisnes var atrasties ne vairāk kā 2·4=8 virsotnes. A15. zīmējumā parādīts 12-stūris, kuram 8 virsotnes atrodas uz vienas taisnes.

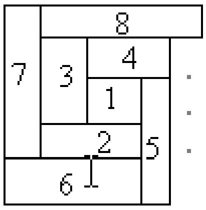


A15. zīm.

2.2.5. ***Atbilde:*** **a)** skat. A16. zīm., **b)** skat. A17. zīm.



A16. zīm.

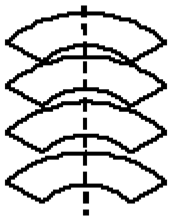


A17. zīm.

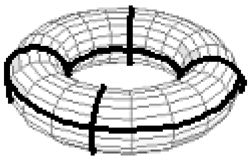
Risinājums. **b)** Tā kā 1993 ir pietiekami liels taisnstūru skaits, visus tos zīmējumā neparādīsim. Uzdevumu veiksim "*no otra gala*" – nevis sagriezīsim doto taisnstūri mazākās daļās, bet no mazākiem taisnstūriem liksim kopā doto taisnstūri. Tā kā nav nekādu nosacījumu par taisnstūru izmēriem, tad mazajiem taisnstūriem varam izvēlēties izmērus tā, lai beigās iegūtu doto taisnstūri. A17. zīmējumā parādīts dotā taisnstūra veidošanas (sagriešanas) princips – sākam ar vienu mazāku taisnstūri, un tam apkārt pa vienam liekam klāt citus taisnstūrus, atbilstoši uzdevuma prasībām, lai nekādi divi taisnstūri kopā neveidotu vienu taisnstūri; ar skaitļiem taisnstūros ir parādīta to pievienošanas secība.

3. kārta

2.3.1. ***Risinājums.*** Ja griešanas laikā gabalus būtu atļauts izkustināt, tad baranku varētu sagriezt 8 vienādos gabalos ar trīs taisniem naža griezieniem sekojoši: vispirms ar diviem griezieniem sagriež baranku 4 gabalos, bet tad iegūtos gabalus novieto tā kā parādīts A18. zīmējumā, un ar vienu naža griezienu pārgriež visus gabalus uz pusēm.



A18. zīm.



A19. zīm.

Bet uzdevumā teikts, ka gabalus griešanas laikā izkustināt nedrīkst. Tad šādā veidā (griežot tikai vertikāli; sadalot vajadzīgā skaitā daļu barankas "augšu") uzdevuma prasības izpildīt nevar. Atcerēsimies, ka barankai ir arī biezums un baranku var griezt arī horizontāli. Tātad uzdevuma prasības ir izpildāmas sekojošā veidā: vispirms sagriežam baranku uz pusēm ar horizontālu griezienu, pēc tam ar diviem vertikāliem griezieniem sagriežam barankas "augšu" un "apakšu" 4 vienādās daļās; kopā ir iegūti 8 vienādi gabali (skat. A19. zīm.).

2.3.2. ***Atbilde:*** 681.

Risinājums. Varam ievērot, ka tabulā skaitļi tiek ierakstīti sekojoši: augšējā rindā un kreisajā kolonnā tiek ierakstīti naturālie skaitļi pēc kārtas; pārējās rūtiņās ierakstītos skaitļus iegūst šādi: rūtiņā A ierakstīta rūtiņās B, C un D ierakstīto skaitļu summa (skat. A20. zīm.). Tātad jautājuma zīmes vietā jāieraksta skaitlis 129+276+276=681 (skat. A21. zīm.)

B	C	
D	A	

A20. zīm.

1	2	3	4	5
2	5	10	17	26
3	10	25	52	95
4	17	52	129	276
5	26	95	276	

A21. zīm.

Piezīme. Šāda tipa uzdevumos atbilde principā varētu būt jebkāda: uzdevuma autors varētu būt iedomājies, ka tabulas sākuma daļa aizpildās pēc viena noteikta likuma, bet sākot ar kādu vietu – pēc cita likuma, vtml. (skat. skaidrojumus 1.1.5. uzdevuma risinājumā).

2.3.3. ***Atbilde:*** zivs sver 32 *kg*.

Risinājums. Apzīmēsim zivs ķermeņa masu ar *x kg* un galvas masu ar *y kg*, astes masa ir 4 *kg*. Pēc uzdevuma nosacījumiem varam sastādīt sekojošus vienādojumus:

$$y = 4 + \frac{1}{2}x \qquad \textbf{(1)}$$

$$x = y + 4 \qquad \textbf{(2)}$$

No šiem vienādojumiem seko

$$x = \left(4 + \frac{1}{2}x\right) + 4 \quad \text{jeb} \quad x - \frac{1}{2}x = 8 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 8 \Rightarrow x = 16\ (kg)$$

$$y = 4 + \frac{1}{2}\cdot 16 = 4 + 8 = 12\ (kg).$$

Tātad zivs ķermenis sver 16 *kg*, galva sver 12 *kg* un visa zivs sver 16+12+4=32 (*kg*).

2.3.4. ***Atbilde:*** Saldumiņš mājās nokļuva ātrāk nekā Rūgtumiņš.

Risinājums. Rūķītis Rūgtumiņš noskrēja un nogāja vienādu ceļa gabalu, taču, tā kā skriešanas ātrums ir lielāks nekā iešanas ātrums, tad viņš skrēja mazāku laika sprīdi nekā gāja. Savukārt Saldumiņš skrēja un gāja vienādu laika sprīdi, tātad skrienot viņš veica lielāku ceļa gabalu nekā ejot, jo skriešanas ātrums ir lielāks par iešanas ātrumu. Sekojoši Saldumiņš noskrēja lielāku gabalu nekā Rūgtumiņš un gāja īsāku gabalu nekā Rūgtumiņš, tādējādi Saldumiņš mājās nokļuva ātrāk nekā Rūgtumiņš.

2.3.5. ***Risinājums.*** Sverot ar sviras svariem, varam salīdzināt divas kaudzītes, t.i., secināt, ka tās sver vienādi, vai arī noskaidrot, kura no kaudzītēm ir smagāka. Ja uz abiem svaru kausiem uzliksim vienādu skaitu riekstu, tad tā kaudzīte, kurā ir vieglākais rieksts, būs vieglāka par otro kaudzīti. Ja abas kaudzītes svērs vienādi, tad vieglākais rieksts nebūs uzlikts ne uz viena svaru kausa.

Vāverīte visus riekstus sadala 3 vienādās kaudzītēs, katrā pa 27 riekstiem. Pirmajā svēršanā salīdzina divas no šīm kaudzītēm. Ja viena kaudzīte ir vieglāka pa otru, tad šajā kaudzītē ir vieglākais rieksts; ja abas šīs kaudzītes ir vienādā svarā, tad vieglākais rieksts ir trešajā, nesvērtajā kaudzītē.

Tālāk apskatīsim tikai to kaudzīti, kurā ir vieglākais rieksts (pārējos 54 riekstus atliekam malā). Sadalīsim šos 27 riekstus trīs kaudzītēs, katrā pa 9 riekstiem. Ar otro svēršanu noskaidrosim, kurā no šīm kaudzītēm ir vieglākais rieksts. (Spriežam līdzīgi kā pirmajā svēršanā.)

Pēc tam tos 9 riekstus, starp kuriem ir vieglākais rieksts, sadalām trīs kaudzītēs pa trīs riekstiem katrā, un trešajā svēršanā noskaidrojam, starp kuriem 3 riekstiem ir vieglākais.

Ceturtajā svēršanā noskaidrojam, kurš rieksts ir vieglāks par pārējiem: uz svaru kausiem liekam pa vienam riekstam no tiem 3, starp kuriem ir vieglākais rieksts. Ja viens svaru kauss ir vieglāks nekā otrs, tad uz tā ir vieglākais rieksts, ja abi svaru kausi ir līdzsvarā, tad vieglākais rieksts ir tas, kas šoreiz palika nesvērts.

4. kārta

2.4.1. ***Atbilde:*** 1994·7=13958

Risinājums. Uzrakstīsim doto reizināšanas piemēru, viencipara reizinātāju apzīmējot ar burtu a: $1994 \cdot a = *****$.

Tā kā 1994·5=9970, t.i., reizinājums ir tikai četrciparu skaitlis, bet dotā piemēra reizinājums ir piecciparu skaitlis, tad $a>5$. Pārbaudīsim visas iespējas

a=6: 1994·6=11964, neder, jo ir divi cipari 1;

a=7: 1994·7=13958, apmierina uzdevuma prasības;

a=8: 1994·8=15952, neder, jo ir divi cipari 5;

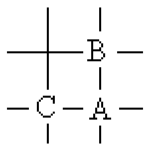
a=9: 1994·9=17946, neder, jo ir divi cipari 9.

Vienīgais gadījums, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem, ir 1994·7=13958.

2.4.2. ***Atbilde:*** pa 3432 dažādiem ceļiem.

Risinājums. Ievērosim, ka

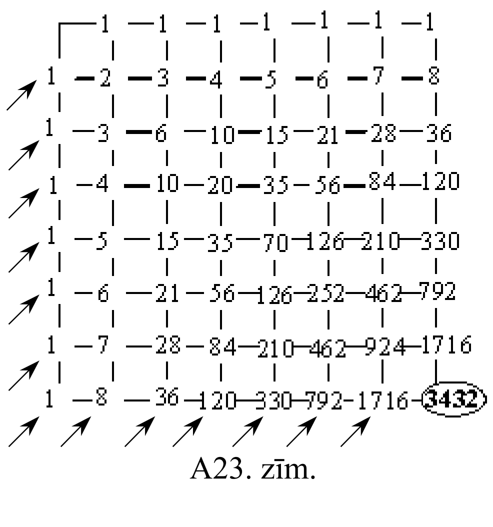
(*) skudriņa Tipa uz katru augšējās rindas virsotni var nokļūt tikai vienā veidā: ejot tikai pa labi; tāpat uz katru kreisās kolonnas virsotni var nokļūt tikai vienā veidā: ejot tikai uz leju.



A22. zīm.

(**) Tagad apskatīsim cik dažādos veidos Tipa var nokļūt uz virsotni A, ja zināms, ka uz virsotni B (kas atrodas vienu rūtiņu virs A) var nokļūt pa b dažādiem ceļiem, bet uz virsotni C (kas atrodas vienu rūtiņu pa kreisi no A) var nokļūt pa c dažādiem (skat. A22. zīm.). Uz virsotni A ar gājienu vienas rūtiņas garumā var nokļūt tikai no virsotnes B vai virsotnes C (citu iespēju nav, jo drīkst pārvietoties tikai pa kvadrāta rūtiņu līnijām). Tā kā no augšējā kreisā stūra uz virsotni B var nokļūt pa b dažādiem ceļiem, tad no augšējā kreisā stūra uz virsotni A caur virsotni B arī var nokļūt pa b dažādiem ceļiem, savukārt, uz virsotni C no augšējā kreisā stūra var nokļūt c dažādos veidos, tātad arī uz virsotni A caur virsotni C var nokļūt pa c dažādiem ceļiem. Pavisam no augšējā kreisā stūra uz virsotni A var nokļūt pa $b+c$ dažādiem ceļiem.

Izmantojot secinājumus **(*)** un **(**)**, izveidosim tabulu (A23. zīm.), katrā rūtiņu virsotnē ierakstot skaitli, pa cik dažādiem ceļiem skudriņa Tipa var nokļūt uz šo virsotni. Tabulā aizpildām vispirms kreiso kolonnu un augšējo rindu. Aizpildīšanu turpinām pa diagonālēm. Kā redzam, uz labo apakšējo stūri Tipa var nokļūt pa 3432 dažādiem ceļiem.



A23. zīm.

2.4.3. ***Risinājums.*** Ja preces cena ir 8 tilleri, tad par to var samaksāt ar vienu 3 tilleru monētu un vienu 5 tilleru monētu (3+5=8); ja prece maksā 9 tillerus, tad par to var samaksāt ar trijām 3 tilleru monētām (3+3+3=9); ja preces cena ir 10 tilleru, tad par to var samaksāt ar divām 5 tilleru monētām (5+5=10).

Jebkurš naturāls skaitlis, dalot to ar 3, var

I dot atlikumu 0 (izdalīties bez atlikuma),

II dot atlikumu 1 vai

III dot atlikumu 2.

Citu iespēju nav.

Apskatīsim katru gadījumu atsevišķi un ievērosim, ka skaitlis 8, dalot ar 3, dod atlikumu 2, skaitlis 9 dalās ar 3 bez atlikuma un skaitlis 10, dalot ar 3, dod atlikumu 1.

I Ja preces cena dalās ar 3, tad par to var samaksāt ar vajadzīgo skaitu 3 tilleru monētām.

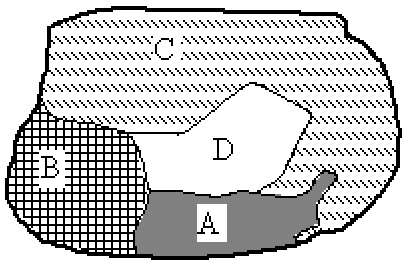
II Ja preces cena, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad par to var samaksāt, maksājot 10 tillerus (to var izdarīt, skat. augstāk) un vēl vajadzīgā skaitā 3 tilleru monētas; šādā veidā samaksātā summa, dalot ar 3, dod atlikumu 1, jo 10, dalot ar 3, dod atlikumu 1, un pieskaitot veselu skaitu 3 tilleru monētas, kopēja summa, dalot ar 3, dod to pašu atlikumu, t.i., 1.

III Ja preces cena, dalot ar 3, dod atlikumu 2, tad par to varam samaksāt maksājot 8 tillerus (iepriekš parādīts, ka to var izdarīt) un vēl vajadzīgā skaitā 3 tilleru monētas. Šādā veidā samaksātā summa, dalot ar 3, dod atlikumu 2, jo šādu atlikumu dod skaitlis 8, dalot ar 3, bet summa, ko var samaksāt ar veselu skaitu 3 tilleru monētām, dalot ar 3, dod atlikumu 0.

Esam apskatījuši visas iespējas, līdz ar to parādījuši, kā ar pieejamajām monētām var samaksāt jebkuru summu, kas nav mazāka par 8 tilleriem.

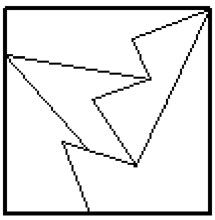
2.4.4. ***Atbilde:*** skat., piemēram, A24. zīm.

Risinājums. Katrām divām no valstīm A, B, C, D ir kopīgs robežas gabals, tāpēc katrai no tām vajadzīga cita krāsa.

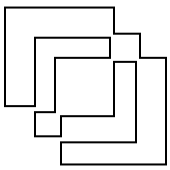


A24. zīm.

2.4.5. ***Atbilde:*** jā var; skat., piem., A25. zīm.



A25. zīm.



A26. zīm.

5. kārta

2.5.1. ***Atbilde:*** jā, var; skat., piem., A26. zīm.

2.5.2. ***Atbilde:*** jā, var; skat. risinājumu.

Risinājums. Lai visi kungi un dāmas nokļūtu otrā upes krastā, ievērojot visus uzdevumā dotos nosacījumus, var rīkoties sekojoši.

Vispirms viens kungs pārved pāri upei vienu dāmu, atstāj to otrā upes krastā un pats atbrauc atpakaļ. (Laivā brauca ne vairāk kā divi cilvēki, un dāma viena pati var palikt upes krastā). Pēc tam kungs pārved vēl vienu dāmu uz otru krastu un pats atgriežas atpakaļ. Tagad otrā krastā jau ir divas dāmas, bet pirmajā krastā vēl ir divas dāmas un trīs kungi; tas arī nav pretrunā ar uzdevuma b) nosacījumu. Nākamajos trijos braucienos viens kungs pārved pāri upei visus trīs pārējos kungus (katrā braucienā vienu kungu un pats atgriežas atpakaļ). Tad otrā krastā jau ir divas dāmas un trīs kungi, bet pāri upei vēl jātiek divām dāmām. Tāpēc tagad kungs pārved pāri upei vienu dāmu, atgriežas atpakaļ un kopā ar pēdējo palikušo dāmu aizbrauc uz otru krastu. Tā visi 8 ceļotāji ir nokļuvuši upes otrā krastā, ievērojot visus noteikumus.

2.5.3. ***Atbilde:*** 3 ābolus sadala 4 daļās katru un 4 ābolus sadala 3 daļās katru; katram bērnam iedod vienu *ceturtdaļu* un vienu *trešdaļu* ābola.

Risinājums. Tā kā 7 āboli ir jāsadala 12 bērniem vienādās daļās, tad katram bērnam ir jāsaņem $7:12=\frac{7}{12}$ ābola. Vienkāršākais veids, kā to izdarīt, ir katru ābolu sadalīt 12 vienādās daļās un katram bērnam iedot 7 šādas daļas. Taču šāds risinājums neder, jo katru ābolu nedrīkst sagriezt vairāk kā 4 daļās.

Ievērosim, ka $\frac{7}{12}=\frac{4+3}{12}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. Tātad katram bērnam ir jāsaņem viena *trešdaļa* no ābola un viena *ceturtdaļa* no ābola jeb visi āboli ir jāsagriež tā, lai kopā iegūtu 12 *trešdaļas* un 12 *ceturtdaļas*. Lai iegūtu 12 *trešdaļas*, 4 ābolus var sagriezt katru 3 vienādās daļās (4·3=12), un, lai iegūtu 12 *ceturtdaļas*, atlikušos 3 ābolus var sagriezt katru 4 vienādās daļās (3·4=12). Patiešām, esam sagriezuši kopā visus 4+3=7 ābolus un ieguvuši 12 *trešdaļas* un 12 *ceturtdaļas* – katram bērnam pa vienai ābola *trešdaļai* un *ceturtdaļai*. Pie tam neviens ābols netika sagriezts vairāk kā četrās daļās.

2.5.4. ***Atbilde:*** šādu blakus esošu naturālu skaitļu m un n nav.

Risinājums. Starp diviem blakus esošiem naturāliem skaitļiem viens noteikti ir pāra un otrs – nepāra skaitlis. Pāra skaitļa kvadrāts (reizinājums pašam ar sevi) arī ir pāra skaitlis, jo *pāra skaitlis×pāra skaitlis=pāra skaitlis*; nepāra skaitļa kvadrāts ir nepāra skaitlis: *nepāra skaitlis×nepāra skaitlis=nepāra skaitlis*. Tātad starp skaitļiem m^2 un n^2 viens noteikti ir pāra skaitlis un otrs – nepāra skaitlis. Taču pāra un nepāra skaitļu starpība (tāpat kā summa) ir nepāra skaitlis, t.i., m^2-n^2 noteikti ir nepāra skaitlis, ja m un n ir blakusesoši naturāli skaitļi. Bet 200 ir pāra skaitlis, tātad nav tādu divu blakusesošu naturālu skaitļu, kuru kvadrātu starpība ir 200.

2.5.5. ***Atbilde:*** cipars 0.

Risinājums. Ievērosim, ka ir 9 viencipara skaitļi no 1 līdz 9. Kad ir uzrakstīti rindā pēc kārtas visi šie skaitļi, tad ir uzrakstīti arī 9 cipari. No 10 līdz 99 pavisam ir 90 divciparu skaitļi, tātad šajos skaitļos kopā ir 90·2=180 ciparu, bet no 1 līdz 99 rindā ir uzrakstīti 9+180=189 cipari. No 100 līdz 199 ir 100 trīsciparu skaitļi, tātad tajos kopā ir 100·3=300 cipari. Līdzīgi skaitļos no 200 līdz 299 kopā ir 300 cipari, skaitļi no 300 līdz 399 arī satur 300 ciparus, …. Tātad no 1 līdz 699 pavisam ir uzrakstīti 9+180+6·300=1989 cipari, t.i., 1989. cipars šajā virknē ir cipars 9. Apskatīsim šīs virknes posmu no 699 līdz 701 un katram ciparam apakšā uzrakstīsim tā kārtas numuru šajā virknē, skaitot no sākuma:

$$\ldots \underset{1987.}{6}\ \underset{1988.}{9}\ \underset{1989.}{9}\ \underset{1990.}{7}\ \underset{1991.}{0}\ \underset{1992.}{0}\ \underset{1993.}{7}\ \underset{\mathbf{1994.}}{\mathbf{0}}\ \underset{1995.}{1}\ \ldots.$$

Kā redzam, mūs interesējošais 1994. cipars šajā virknē ir cipars 0 – otrais cipars skaitlī 701.

6. kārta

2.6.1. ***Atbilde:*** 3.

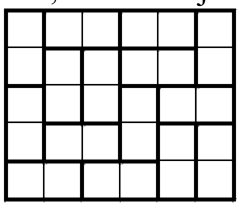
Risinājums. Risināsim šo uzdevumu "no otra gala".

Pēdējā darbība bija reizināšana ar 10 un rezultātā ieguva 50, tātad pirms tam bija iegūts skaitlis 50:10=5. Šādu rezultātu ieguva pēc izdalīšanas ar 5, tātad pirms tam dalīšanas rezultāts bija 5·5=25. Savukārt tas tika iegūts, iepriekšējam rezultātam pieskaitot 3, tātad pirms tam bija iegūts skaitlis 25–3=22. Skaitlis tika iegūts pēc reizināšanas ar 2, tātad pirms tam bija iegūts skaitlis 22:2=11. 11 ir iegūts, meklējamo skaitli pareizinot pašam ar sevi un pieskaitot 2, tātad meklējamo skaitli reizinot pašu ar sevi iegūst 11–2=9. Vienīgais naturālais skaitlis, kuru reizinot pašu ar sevi iegūst 9, ir 3.

Šo uzdevumu varēja atrisināt arī, apzīmējot meklējamo skaitli ar *x* un sastādot vienādojumu.

$$(((x\cdot x+2)\cdot 2+3):5)\cdot 10=50$$
$$((x\cdot x+2)\cdot 2+3):5=50:10$$
$$(x\cdot x+2)\cdot 2+3=5\cdot 5$$
$$(x\cdot x+2)\cdot 2=25-3$$
$$x\cdot x+2=22:2$$
$$x\cdot x=11-2=9=3\cdot 3$$
$$x=3$$

2.6.2. ***Atbilde:*** jā, var. Skatīt, piemēram, A27. zīmējumu.



A27. zīm.

2.6.3. ***Atbilde:*** g lielākā iespējamā vērtība ir 28.

Risinājums. Ja skaitļu a, b, c, d, e, f, g vidējais aritmētiskais ir 7 jeb $\frac{a+b+c+d+e+f+g}{7}=7$, tad $a+b+c+d+e+f+g=7\cdot 7=49$. No šīs vienādības izteiksim g: $g=49-(a+b+c+d+e+f)$. Skaitļa g lielākā vērtība būs tad, ja summas $a+b+c+d+e+f$ vērtība būs pēc iespējas mazāka. Tā kā visi skaitļi a, b, c, d, e, f, g ir atšķirīgi veseli pozitīvi skaitļi, tad summas $a+b+c+d+e+f$ mazākā iespējamā vērtība ir $a+b+c+d+e+f=1+2+3+4+5+6=21$. Tātad skaitļa g lielākā iespējamā vērtība ir 49–21=28.

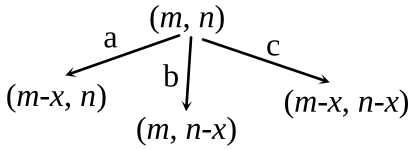
2.6.4. ***Atbilde:*** 0,48 dienās jeb11 st. 31 min. 12 sek.

Risinājums. Ja ūdens plūst tikai pa pirmo cauruli, tad 1 dienā tiek piepildīts viss baseins. Ja ūdens plūst tikai pa otro cauruli, tad 1 dienā tiek piepildīta $\frac{1}{2}$ baseina, jo viss baseins būtu piepildīts 2 dienās, tātad 1 dienā tiek piepildīts divreiz mazāk (uzskatām, ka ūdens tecēšanas ātrums katrā caurulē ir nemainīgs visu laiku). Ja ūdens plūst tikai pa trešo cauruli, tad vienā dienā tiek piepildīta $\frac{1}{3}$ baseina, ja tikai pa ceturto cauruli, tad 1 dienā tiek piepildīta $\frac{1}{4}$ baseina. Tātad, ja ūdens plūst pa visām četrām caurulēm reizē, tad vienā dienā būtu piepildīts $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}=2\frac{1}{12}$ no baseina jeb

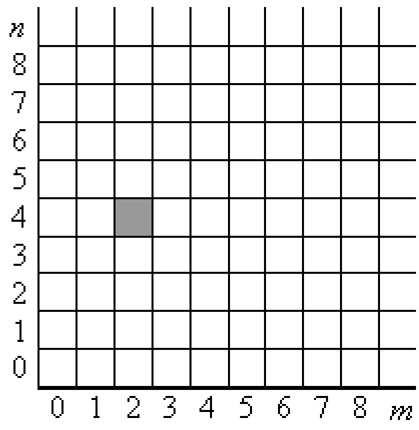
2 pilni šādi baseini un $\frac{1}{12}$ no šāda baseina. Tas nozīmē, ka, lai vienu šādu baseinu piepildītu visas četras caurules kopā, vajag mazāk nekā pusi dienas. Ja $2\frac{1}{12}$ baseinus var piepildīt 1 dienā, tad 1 baseinu var piepildīt $1:\frac{25}{12}=\frac{12}{25}$ dienās. Pieņemot, ka par dienu uzskatām visu diennakti – 24 stundas, lai piepildītu baseinu, ja ir atvērtas visas četras caurules, nepieciešams 11 stundas 31 minūte un 12 sekundes.

2.6.5. ***Atbilde:*** **a)** uzvarēs pirmais spēlētājs; **b)** uzvarēs otrais spēlētājs.

Risinājums. Akmentiņu skaitu vienā kaudzītē apzīmē ar *m*, otrā – ar *n*. Tagad situāciju var attēlot ar skaitļu pāriem. Pirmais skaitlis vienmēr būs akmentiņu skaits pirmajā kaudzītē (sākotnēji *m* akmentiņi), otrais – attiecīgi akmentiņu skaits otrajā kaudzītē (sākotnēji *n* akmentiņi). Spēles noteikumus shematiski var attēlot, kā parādīts A28. zīm.

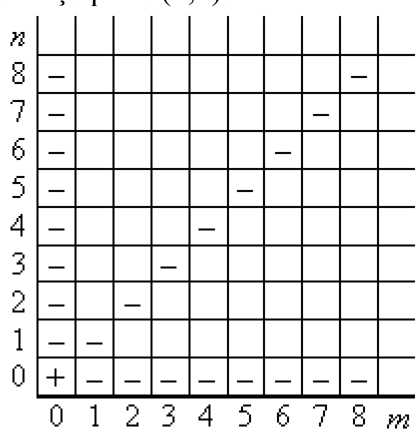


A28. zīm.



A29. zīm.

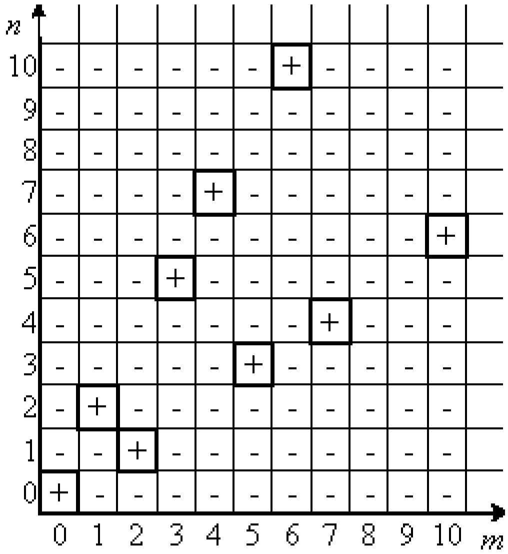
Aprakstīto spēles gaitu varam attēlot koordinātu plaknē. Rūtiņu plaknē novilksim divas pusasis. Uz O*x* ass atliek pirmās kaudzītes akmeņu skaitu *m*, uz O*y* – attiecīgi otrās kaudzītes akmeņu skaitu *n*. Tagad kārtējo spēles pozīciju raksturo rūtiņa (skat. A29. zīm.). Attēlā iekrāsotais vienības kvadrātiņš rāda, ka konkrētajā momentā pirmajā kaudzītē ir 2 akmentiņi, bet otrajā – 4 akmentiņi. Pozīciju raksturo skaitļu pāris (2,4).



A30. zīm.

Ir skaidrs, ka sākuma pozīcija ir (m,n), bet beigu pozīcija – (0,0). Spēles analīzi izdarīsim no beigām, tātad no pozīcijas (0,0). Ja pēc mūsu gājiena ir šāda pozīcija, tas nozīmē mūsu uzvaru. Tā ir uzvarošā pozīcija. Apzīmēsim to ar "+" koordinātu plaknē. Bet, ja pēc gājiena akmentiņu skaitu kaudzītēs nosaka skaitļu pāri (0,1), (0,2) utt. (0,*n*) vai (1,0), (2,0) utt. (*m*,0), tad visi uzvaras priekšnoteikumi ir pretiniekam. Gadījumos (0,1) un (1,0) pretinieka uzvara pat ir neizbēgama, jo spēlētāji nevar izlaist gājienu, pārējos gadījumos pretinieks var uzvarēt, paņemot visu kaudzīti. Vēlreiz pārskatot spēles noteikumus, ir skaidrs, ka mums zaudējošas ir arī pozīcijas (1,1), (2,2) utt. Visas iepriekš nosauktās pozīcijas ir mums sliktas pozīcijas, tās apzīmēsim ar "–" (skat. A30. zīm.).

Nākošā uzvarošā pozīcija ir (1,2).Tā ir simetriska pozīcijai (2,1). Lai kāds būtu pretinieka gājiens, viņš nespēs paņemt visus akmentiņus jeb nonākt pie pozīcijas (0,0). Iespējamās pozīcijas pēc pretinieka gājiena ir (0,2), (1,0), (1,1), (0,1), saskaņā ar to kādus gājienus var izdarīt spēlētājs (skat. A28. zīm.). Visas šīs pozīcijas ļauj mums uzvarēt. Tātad pozīcijas (2,1) un (1,2) jāatzīmē ar krustiņu. Visas pozīcijas (1,2+*x*), (1+*x*,2), kā arī tām simetriskās pozīcijas ir zaudējošās pozīcijas, jo, ja pēc mūsu gājiena paliek šāda pozīcija, pretinieks, ņemot no attiecīgās kaudzītes *x* akmentiņus, nonāks uzvarošajā pozīcijā (1,2) (vai (2,1)) un varēs uzvarēt spēli. Gluži tas pats attiecas uz pozīcijām (1+*y*,2+*y*) un tām simetriskajām pozīcijām (2+*y*,1+*y*). No šīm pozīcijām uzvarošo var iegūt, paņemot no abām kaudzēm *y* akmentiņus. Nākošā uzvarošā pozīcija būs (3,5) (un attiecīgi – (5,3)). Šo analīzi var turpināt un iegūt aizvien jaunas uzvarošās pozīcijas. Tādā veidā ir iegūti divi simetriski "labo" skaitļu pāru zari (skat. A31. zīm.).



A31. zīm.

Tātad uzvarēs tas spēlētājs, kurš panāks, ka pēc viņa gājiena kaudzītēs paliek attiecīgi vienā 1 un otrā 2 akmeņi, 3 un 5 akmeņi, 4 un 7 akmeņi, 6 un 10 akmeņi, utt. Tas spēlētājs, **pirms** kura gājiena jau ir šāds akmeņu skaits kaudzītēs, zaudēs, ja otrs spēlētājs spēlēs pareizi.

a) Ja sākumā vienā kaudzē ir 7 akmeņi, bet otrā – 5 akmeņi, tad pirmais spēlētājs ar pirmo gājienu no abām kaudzītēm paņem pa 2 akmeņiem, un pēc viņa gājiena paliek vienā kaudzē 5 akmeņi un otrā kaudzē 3 akmeņi, tātad, ņemot vērā iepriekš pamatoto, pirmais spēlētājs uzvarēs.

b) Ja sākumā vienā kaudzē ir 10 akmeņi, bet otrā – 6 akmeņi, kas jau ir spēles "uzvarošā pozīcija", tad pirmais spēlētājs, kuram ir jāsāk no šādas pozīcijas, zaudēs.

Piezīme: pirmais spēlētājs **a)** gadījumā var uzvarēt arī, ņemot vienu akmeni no 5 akmeņu kaudzes.