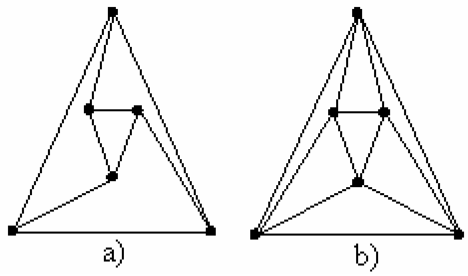
ATRISINĀJUMI
1994./95. mācību gads
1. kārta

3.1.1. ***Atbilde:*** 53 svētdienas.

Risinājums. Šajā risinājumā par pilnu nedēļu sauksim 7 pēc kārtas ņemtas dienas. Vienā gadā ir 365 vai 366 (garajā gadā) dienas, tātad ir pilnas 52 nedēļas un vēl 1 vai 2 dienas. Katrā nedēļā ir viena svētdiena, un vēl viena svētdiena var būt starp atlikušajām 1 vai 2 dienām (starp atlikušajām 2 dienām var būt tikai viena svētdiena, jo tās ir pēc kārtas sekojošas dienas). Tātad gadā kopā var būt ne vairāk par 53 svētdienām.

Piemēram, 2006.gada 1.janvāris bija svētdiena, un arī 31.decembris bija svētdiena, līdz ar to 2006.gadā pavisam bija 53 svētdienas.

3.1.2. ***Atbilde:*** jā var, skat., piemēram, A32. zīm. **a)** un **b)**.



A32. zīm.

3.1.3. ***Atbilde:*** ir 16 *skaistie skaitļi* un to summa ir 53328; ir 64 *lieliskie skaitļi* un to summa ir 21333312.

Risinājums. *Skaistie skaitļi* ir četrciparu skaitļi, pie tam to pierakstā var tikt izmantoti tikai divi cipari – 2 vai 4. Tātad *skaisto skaitļu* pirmais cipars var būt jebkurš no šiem diviem cipariem; katram izvēlētajam pirmajam ciparam otro ciparu varam izvēlēties arī divos veidos – 2 vai 4; kopā pirmo un otro ciparu varam izvēlēties $2\cdot2=4$ veidos. Līdzīgi, katram pirmo divu ciparu pārim trešo ciparu varam izvēlēties arī divos veidos, tātad pirmos trīs ciparus varam izvēlēties $4\cdot2=8$ veidos, un katram pirmo trīs ciparu trijniekam ceturto ciparu varam izvēlēties divos veidos – 2 vai 4. Tātad pavisam *skaisto skaitļu* ir $8\cdot2=16$.

Lai noskaidrotu to summu, sadalīsim visus šos skaitļus pāros tā, lai katra pāra summa būtu 6666. Katrs *skaistais skaitlis* ietilpst ne vairāk kā vienā pārī. Pieņemsim, ka tas tā nav, t.i., eksistē kāds skaistais skaitlis a, kas ietilpst divos pāros (a; b) un (a; c). Tad $b=6666-a$ un $c=6666-a$ jeb $b=c$, tātad skaisto skaitļu pāri (a; b) un (a; c) īstenībā ir viens un tas pats pāris. Visus *skaistos skaitļus* varam apvienot šādos 8 pāros, kur katra pāra summa ir 6666: (2222; 4444), (2224; 4442), (2242; 4424), (2244; 4422), (2422; 4244), (2424; 4242), (2442; 4224), (2444; 4222). Tātad visu *skaisto skaitļu* summa ir visu šo 8 skaitļu pāru summu summa, t.i., visu *skaisto skaitļu* summa ir $8\cdot6666=53328$.

Līdzīgi spriežot, varam secināt, ka *lielisko skaitļu* ir $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=64$. Lai noskaidrotu visu *lielisko skaitļu* summu, visus šos skaitļus sadalām pāros, kur katra pāra summa ir 666666. Tātad visu *lielisko skaitļu* summa ir $32\cdot666666=21333312$.

3.1.4. ***Atbilde:*** velosipēdists.

Risinājums. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka velosipēdists $\frac{1}{3}$ ceļa starp pilsētām A un B veic ātrāk nekā motociklists veic $\frac{2}{3}$ no šī ceļa (tas seko no šādiem vārdiem uzdevuma tekstā: „*kad velosipēdists bija nobraucis trešo daļu ceļa, viņš apstājās un gaidīja, kamēr motociklistam līdz pilsētai B paliks trešā daļa ceļa*", t.i., kamēr motociklists būs nobraucis divas trešdaļas ceļa). Pēc tam, kad velosipēdists atsāka ceļu, viņam atlika nobraukt tikai $\frac{1}{3}$ ceļa, jo viņš atradās šādā attālumā no pilsētas A un sāka braukt atpakaļ uz šo pilsētu. Taču motociklistam atlika nobraukt $\frac{1}{3}$ ceļa līdz pilsētai B un pēc tam vēl visu ceļu atpakaļ līdz pilsētai A, tātad pavisam $\frac{4}{3}$ ceļa. Tā kā velosipēdists $\frac{1}{3}$ ceļa veic ātrāk nekā motociklists $\frac{2}{3}$ no šī ceļa, tad, protams, $\frac{1}{3}$ ceļa velosipēdists veiks ātrāk nekā motociklists veiks $\frac{4}{3}$ ceļa, un velosipēdists pilsētā A nonāks ātrāk.

3.1.5. ***Risinājums.*** Katram uzzīmētajam kaķītim pierakstīsim skaitli 1, bet katram sunītim – skaitli 2. Tad sākumā uz tāfeles uzrakstīto skaitļu summa ir $6 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 6 + 14 = 20$.

Apskatīsimies, kā mainās šī summa, veicot atļautās darbības:

1) ja no tāfeles nodzēšam vienu sunīti, t.i., nodzēšam skaitli 2, tad uzrakstīto skaitļu summa samazinās par 2;

2) ja no tāfeles nodzēšam divus kaķīšus un uzzīmējam vietā vienu sunīti (t.i., nodzēšam divus skaitļus 1 un uzrakstām vietā vienu skaitli 2), tad uzrakstīto skaitļu summa nemainās ($-1-1+2=0$).

Tātad uzrakstīto skaitļu summa var vai nu nemainīties, vai samazināties par 2, t.i., par pāra skaitli. Tā kā sākumā uzrakstīto skaitļu summa ir 20 – pāra skaitlis, tad, veicot atļautās darbības, visu uzrakstīto skaitļu summa vienmēr būs pāra skaitlis. Tātad, ja uz tāfeles ir palicis nenodzēsts viens dzīvnieciņš (viens skaitlis), tas var būt tikai sunītis (skaitlis 2).

2. kārta

3.2.1. ***Atbilde:*** 9 dziesmas.

Risinājums. Tā kā Ieva nodziedāja 8 dziesmas – vairāk nekā pārējās, un Santa nodziedāja 5 dziesmas – mazāk ne pārējās meitenes, tad Aiga un Liene katra nodziedāja 6 vai 7 dziesmas. Tā kā zināms, ka katru dziesmu dziedāja tieši trīs meitenes, tad visu meiteņu kopējais uzstāšanos skaits dalās ar 3. Ievas un Santas kopējais uzstāšanos skaits ir $8+5=13$, Aigas un Lienes kopējais uzstāšanos skaits var būt $6+6=12$, $6+7=7+6=13$ vai $7+7=14$. Ja Aigas un Lienes kopējais uzstāšanos skaits ir 12, tad visu četru meiteņu kopējais uzstāšanos skaits ir $13+12=25$; 25 nedalās ar 3, tātad šāds gadījums neder. Ja Aigas un Lienes kopējais uzstāšanos skaits ir 13, tad visu meiteņu kopējais uzstāšanos skaits ir $13+13=26$, kas arī nedalās ar 3. Ja Aigas un Lienes uzstāšanos skaits ir 14, tad kopējais uzstāšanos skaits ir $13+14=27$, dalās ar 3. Tātad pavisam koncertā tika nodziedātas $27:3=9$ dziesmas, katru dziesmu dziedāja tieši trīs meitenes, Ieva nodziedāja 8 dziesmas, Aiga un Liene katra nodziedāja 7 dziesmas un Santa nodziedāja 5 dziesmas. Tas varēja notikt, piemēram, šādi:

Ieva nodziedāja 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7. un 8.dziesmu, Santa nodziedāja 1., 2., 3., 4. un 9. dziesmu, Aiga nodziedāja 2., 3., 4., 5., 6. un 9. dziesmu, Liene nodziedāja 1., 5., 6., 7., 8. un 9. dziesmu.

3.2.2. ***Atbilde:*** var būt izmantojamas 4 vai 5 kravas mašīnas.

Risinājums. Mazāk kā ar 4 mašīnām visu kravu aizvest noteikti nevarēs, jo vienā mašīnā var iekraut ne vairāk kā 3 *t*, bet $3\cdot 3\ t=9\ t<10\ t$. Taču arī ar 4 mašīnām var nebūt pietiekami. Piemēram, ja ir 13 kastes un katra kaste sver $\frac{10}{13}$ *t*, tad, lai visu kravu aizvestu ar 4 mašīnām, vismaz vienā kravas mašīnā būs jāiekrauj vismaz 4 kastes (jo $4\cdot 3=12<13$; *Dirihlē princips*, skat. 8.lpp.). Bet $4\cdot\frac{10}{13}t=\frac{40}{13}t=3\frac{1}{13}t>3t$, tas neatbilst uzdevuma nosacījumiem. Tātad ar četrām kravas mašīnām var nepietikt.

Pierādīsim, ka ar 5 kravas mašīnām noteikti pietiek. Patiešām, katrā mašīnā varam iekraut vismaz 2t kravas (ja kādā mašīnā būs iekrauts mazāk nekā 2t kravas, tad tur noteikti varēs iekraut vēl vienu kasti, jo kastes masa nepārsniedz 1 *t* un mašīnā pavisam var iekraut 3 *t*). Tātad 5 mašīnās var iekraut vismaz $5\cdot 2\ t=10\ t$, t.i., piecās mašīnās noteikti var iekraut un uzreiz aizvest visu kravu.

3.2.3. ***Atbilde:*** **a)** nē, nevar; **b)** jā, var.

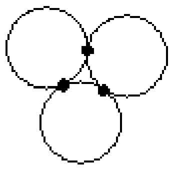
Risinājums. Risināsim šo uzdevumu sekojoši: mēģināsim noskaidrot, kādā veidā doto skaitli var sadalīt tādos reizinātājos, ka visu reizinātāju summa ir pats dotais skaitlis. Ja pamatosim, ka tas nav izdarāms, tad doto skaitli sadalīt atbilstoši uzdevuma prasībām nebūs iespējams.

a) Skaitlis 23 ir pirmskaitlis un vienīgais veids, kā šo skaitli var izteikt ar vairāku naturālu skaitļu reizinājumu, ir šo pašu skaitli 23 reizināt ar vienu vai vairākiem vieniniekiem. Taču uzdevumā prasīts, lai šo reizinātāju summa būtu 23. Jau gadījumā, ja 23 izsakām kā divu skaitļu reizinājumu $23\cdot 1$ (citā veidā skaitli 23 divu skaitļu reizinājumā izteikt nevar!), reizinātāju 23 un 1 summa ir 24>23. Tātad skaitli 23 atbilstoši uzdevuma prasībām izteikt nevar.

b) Skaitlis 203 nav pirmskaitlis un ir izsakāms kā $203=7\cdot 29$, bet reizinātāju summa $7+29=36<203$. Tātad skaitlim $7\cdot 29$ vēl jāpiereizina vajadzīgais skaits vieninieku (reizinājums no tā nemainās). Ievērojam, ka 203–36=167, tātad skaitli 203 atbilstoši uzdevuma prasībām varam izteikt sekojoši: $203=7\cdot 29\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{167\,\text{vieninieki}}$ un $203=7+29+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{167\,\text{vieninieki}}$.

3.2.4. ***Atbilde:*** nē, nav iespējams.

Risinājums. Pieņemsim, ka tas tomēr ir iespējams un mums ir izdevies to izdarīt. Tad katru saskaršanās punktu uz abām monētām nokrāsosim sarkanu. Tātad pavisam ir nokrāsoti $3\cdot 25=75$ sarkani punkti (jo katra monēta pieskaras tieši 3 citām, tāpēc uz katras monētas nokrāsoti ir tieši 3 punkti). Taču katrā pieskaršanās punktā var saskarties tikai divas monētas (tas ir monētas apaļās formas dēļ, skat. A33. zīm.).



A33. zīm.

Tātad pavisam kopā nokrāsotiem jābūt pāra skaitam punktu (*invariants*). Skaitlis 75 nav pāra skaitlis, tātad esam ieguvuši pretrunu: skaitot vienus un tos pašus objektus divos dažādos veidos, katrreiz ieguvām citādu rezultātu, kas nevar būt. Tātad uzdevuma prasības nav izpildāmas.

3.2.5. ***Atbilde.*** Lielākais iespējamais šādu kvadrātu skaits ir 77. Šāds sadalījums ir, piemēram, dotā taisnstūra sadalījums rūtiņās.

Risinājums. Apskatīsim katra uzzīmētā kvadrāta **augšējo kreiso rūtiņu**. Šī rūtiņa nevar būt kopīgā kreisā augšējā rūtiņa vairākiem atzīmētajiem kvadrātiem (pretējā gadījumā lielākais kvadrāts pilnībā pārklās mazāko vai arī abi kvadrāti sakritīs jeb būs viens un tas pats kvadrāts). Tā kā pavisam taisnstūrī 7×11 ir 77 rūtiņas, tad nevar būt atzīmēti vairāk kā 77 kvadrāti.

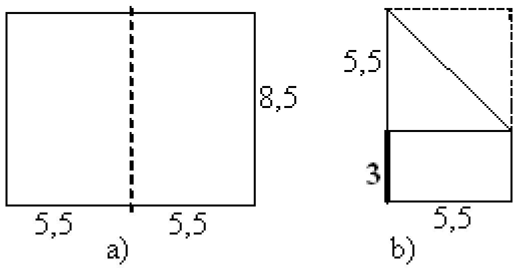
3. kārta

3.3.1. ***Atbilde:*** piemēram, $\frac{1}{1995}=1994:(1994\cdot1994+1994)$

Risinājums. Ievērosim, ka 1995=1994+1, tātad

$$\frac{1}{1995}=\frac{1}{1994+1}=\frac{1994}{1994(1994+1)}=\frac{1994}{1994\cdot1994+1994} \text{ jeb } \frac{1}{1995}=1994:(1994\cdot1994+1994).$$

3.3.2. ***Risinājums.*** Vispirms pārliecam papīra lapu, 11 *cm* garo malu pārlokot uz pusēm (A34. a) zīm.); iegūstam taisnstūri 8,5 *cm*×5,5 *cm*. Šim taisnstūrim atlokām vienu stūri tā, kā parādīts A34. b) zīm. Locījuma līnija ir kvadrāta 5,5 *cm*×5,5 *cm* diagonāle, tātad iezīmētās joslas platums ir 8,5 *cm*–5,5 *cm*=3 *cm*, kas arī bija jāatliek.



A34. zīm.

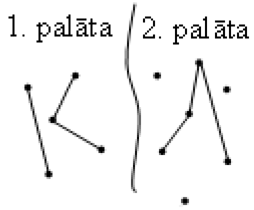
3.3.3. ***Atbilde:*** N=19.

Risinājums. Lai vairāku naturālu skaitļu reizinājums dalītos ar kādu naturālu skaitli A, starp reizinātājiem vismaz vienu reizi jābūt visiem skaitļa A pirmreizinātājiem vai skaitļiem, kas dalās ar skaitļa A pirmreizinātājiem. Skaitļa 1995 sadalījums pirmreizinātājos ir $1995=3\cdot5\cdot7\cdot19$. Tātad, lai reizinājums $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot N$ dalītos ar 1995, N ir jābūt vismaz 19. Ja N būs mazāks par 19, tad neviens no reizinātājiem nedalīsies ar 19 (tas ir pirmskaitlis, tātad vairāku citu skaitļu reizinājums arī nevar būt 19), līdz ar to viss reizinājums nedalīsies ar 1995. Ja N=19, tad reizinājums $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot\ldots\cdot18\cdot19$ dalās ar 1995, jo $3\cdot5\cdot7\cdot19=1995$ un doto reizinājumu varam pārrakstīt kā $1995\cdot1\cdot2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9\cdot\ldots\cdot17\cdot18$, kas acīmredzami dalās ar 1995.

3.3.4. ***Atbilde:*** spēlējot pareizi, vienmēr uzvarēs pirmais spēlētājs.

Risinājums. Pirmajam spēlētājam jārīkojas sekojoši: pirmajā gājienā no lielākās kaudzes ir jāpaņem 1000 rieksti; tad abās kaudzēs paliks pa 995 riekstiem. Turpmākajos gājienos pirmais spēlētājs izdara simetrisku gājienu otrā spēlētāja gājienam, t.i., ja otrais spēlētājs no vienas kaudzītes paņem n riekstus, tad pirmais spēlētājs no otras kaudzītes arī paņem n riekstus. To viņš noteikti izdarīt var, jo pirms šī gājiena abās kaudzītēs bija vienāds skaits riekstu un otrais spēlētājs drīkst ņemt riekstus tikai no vienas kaudzītes. Pēc pirmā spēlētāja gājiena abās kaudzītēs atkal ir vienāds riekstu skaits, tātad pirmais spēlētājs arī turpmākajos gājienos var pielietot šo pašu stratēģiju. Tikmēr, kamēr otrajam spēlētājam būs ko paņemt, būs ko paņemt arī pirmajam spēlētājam, bet, ja otrajam spēlētājam vairs nebūs ko paņemt, tas nozīmē, ka iepriekšējā gājienā viņš ir paņēmis visu no vienas kaudzītes un pirmais spēlētājs ir paņēmis visu no otras kaudzītes. Tātad otrais spēlētājs zaudē.

3.3.5. ***Risinājums.*** Vispirms visus parlamentāriešus patvaļīgi sadalīsim divās palātās. Attēlosim parlamentāriešus ar punktiem P_1, P_2, …, P_k; ja divi parlamentārieši ir ienaidnieki, tad atbilstošos savienosim ar nogriezni (skat., piem., A35. zīm.)



A35. zīm.

Saskaitīsim, cik ir savstarpējo ienaidnieku pāru, t.i., cik nogriežņi ir novilkti katrā palātā atsevišķi. Apzīmēsim šo skaitu pirmajā palātā ar N_1, bet otrajā palātā – ar N_2. Ar N apzīmēsim šo skaitļu summu $N=N_1+N_2$. Apskatīsim visus parlamentāriešus P_1, P_2, P_3, …, P_k (k – visu parlamentāriešu skaits). Ja parlamentārietim P_1 savā palātā (pieņemsim, pirmajā; ja P_1 ir otrajā palātā, spriedums analoģisks) ir 2 vai 3 ienaidnieki, tad, pārejot uz otru palātu, ienaidnieku skaits viņam tur būs ne vairāk kā 1 (jo pavisam kopā viņam ir ne vairāk kā 3 ienaidnieki, un pārējie parlamentārieši šajā brīdī savas palātas nemaina). Šāda gājiena rezultātā skaitlis N_1 samazinās vismaz par 2 (jo P_1 šajā palātā bija ienaidnieks vismaz diviem citiem parlamentāriešiem un bija savienots ar nogriezni ar vismaz diviem citiem parlamentāriešiem) jeb $N_1' \le N_1 - 2$ (ar N_1', N_2', N' apzīmēsim nogriežņu skaitu katrā no palātām un kopā pēc P_1 pāriešanas uz otru palātu). Pēc P_1 pāriešanas uz otro palātu nogriežņi, kas pirmajā palātā P_1 savienoja ar viņa ienaidniekiem, tiek izdzēsti, tātad to skaits samazinās vismaz par 2. Palātas ietvaros nekas cits nemainās, tātad pārējo nogriežņu skaits paliek nemainīgs. Savukārt otrajā palātā pēc P_1 pāriešanas uz to var rasties ne vairāk kā 1 jauns nogrieznis (jo parlamentārietim P_1 šajā palātā ir ne vairāk kā 1 ienaidnieks), tātad N_2 var palielināties ne vairāk kā par 1 jeb $N_2' \le N_2 + 1$. Tātad $N' = N_1' + N_2' \le N_1 - 2 + N_2 + 1 = (N_1 + N_2) - 1 = N - 1$ jeb $N' < N$, t.i., kopējais nogriežņu skaits pēc P_1 pāriešanas uz citu palātu noteikti samazinās vismaz par vienu.

Pēc tam līdzīgi rīkojamies ar pārējiem parlamentāriešiem P_2, P_3, P_4, …, P_k, līdz iegūsim vajadzīgā veida palātas. Šis process nevar turpināties bezgalīgi, jo N ir vesels nenegatīvs skaitlis un ar katru gājienu tas samazinās vismaz par 1, tātad kādreiz šo procesu vairs nevarēs turpināt. Šai brīdī nevienam parlamentārietim viņa palātā nav vairāk par 1 ienaidnieku.

4. kārta

3.4.1. ***Atbilde:*** jā, var. Piemēram, viena zilā atzīme būs pēc 324 *cm*, bet sarkanā – pēc 325 *cm*; starp tām attālums ir 1 *cm*.

Risinājums. Vispirms noskaidrosim, kādā attālumā no lentas sākuma ir izdarītas atzīmes ar zilu zīmuli : 36 *cm*, 72 *cm*, 108 *cm*, 144 *cm*, 180 *cm*, 216 *cm*, 252 *cm*, 288 *cm*, 324 *cm*, 360 *cm*, … un kādā attālumā no lentas sākuma ir izdarītas atzīmes ar sarkanu zīmuli: 25 *cm*, 50 *cm*, 75 *cm*, 100 *cm*, 125 *cm*, 150 *cm*, 175 *cm*, 200 *cm*, 225 *cm*, 250 *cm*, 275 *cm*, 300 *cm*, 325 *cm*, 350 *cm*, …. Redzam, ka pēc kārtas devītā zilā atzīme (324cm) un trīspadsmitā sarkanā atzīme (325cm) atrodas 1cm attālumā viena no otras.

3.4.2. ***Atbilde:*** **a)** piemēram, 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46; **b)** izvēlas 10 skaitļus, kas dod vienādus atlikumus, dalot ar 5.

Risinājums. Divu naturālu skaitļu a un b starpība $a–b$ dalās ar kādu skaitli m, ja skaitļi a un b, dalot tos ar m, dod vienādus atlikumus. Ja skaitlis a, dalot ar m, dod atlikumu r, tad to var uzrakstīt $a = m \cdot k + r$ (k – vesels skaitlis), līdzīgi $b = m \cdot l + r$ (l – vesels skaitlis). Tad

$a-b=(m\cdot k+r)-(m\cdot l+r)=mk-ml+r-r=m(k-l)$, tātad *a–b* dalās ar *m,* ja *a* un *b* dalot ar m dod vienādus atlikumus.

a) Par meklētajiem skaitļiem der skaitļi 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46. Katru divu šo skaitļu starpība tiešām dalās ar 5, jo katrs no šiem skaitļiem, dalot to ar 5, dod atlikumu 1.

b) Lai pierādītu uzdevumā formulēto faktu, izmantosim *Dirihlē principu* (skat. 8.lpp.).

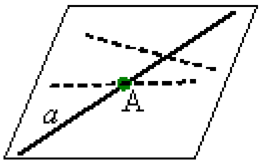
Naturāls skaitlis, dalot ar 5, var dot atlikumu 0, 1, 2, 3 vai 4 (pavisam 5 dažādas iespējas). Šos atlikumus iztēlosimies kā "*būrus*", kuros jāizvieto "*truši*" – dotie 46 skaitļi. Tātad mums ir 5 "*būrī*" un $46=5\cdot9+1$ "*truši*". Pamatojoties uz *Dirihlē principu*, varam secināt, ka būs vismaz viens "*būris*", kurā būs vismaz 9+1=10 "*truši*", t.i., starp dotajiem skaitļiem ir vismaz 10 tādi, kurus dalot ar 5, iegūst vienādus atlikumus. Tātad katru divu šo skaitļu starpība dalās ar 5 un šie skaitļi der par meklētajiem 10 skaitļiem.

3.4.3. ***Risinājums.*** Arī šī uzdevuma risinājums balstās uz *Dirihlē principu*.

Ja kompānijā ir *k* cilvēki, tad šajā kompānijā var būt cilvēki, kuriem ir 0 paziņu (nav neviena paziņas), ir 1 paziņa, 2, paziņas, 3 paziņas, …, *k*–2 paziņas vai *k*–1 paziņas. (Nevienam cilvēkam nevar būt *k* paziņas, jo tad viņš būtu paziņa pats sev, bet pašu sev par paziņu neuzskata.) Tāpat ievērosim, ka, ja šajā kompānijā ir kāds cilvēks, kuram nav neviena paziņas, tad nevar būt neviens cilvēks, kuram būtu *k*–1 paziņa, un, ja kompānijā ir kāds cilvēks, kuram ir *k*–1 paziņa, tad nevar būt neviens cilvēks, kuram nebūtu neviena paziņas, t.i., ja šajā kompānijā kāds cilvēks A pazītu visus pārējos cilvēkus šajā kompānijā (viņam būtu *k*–1 paziņa), tad, tā kā pazīšanās ir abpusējas, katram šīs kompānijas loceklim būtu vismaz viens paziņa – cilvēks A.

Šajā uzdevumā par "*būriem*" uzskatīsim paziņu skaitu vienam cilvēkam. Tātad pavisam ir *k*–1 "būri" – 0, 1, 2, 3, …, *k*–3, *k*–2 paziņas vai 1, 2, 3, …, *k*–2, *k*–1 paziņa. Bet "*trušu*" – cilvēku – kompānijā ir *k* – par 1 vairāk nekā "*būru*". Tātad, izvietojot visus "*trušus*" pa "*būriem*", vismaz vienā "*būrī*" nonāks vismaz divi "*truši*", t.i., vismaz diviem cilvēkiem šajā kompānijā ir vienāds paziņu skaits, kas arī bija jāpierāda.

3.4.4. ***Atbilde:*** piemēram, plaknē vienu taisni *a* nokrāsojam melnu, vienu punktu A uz tās nokrāsojam zaļu, bet pārējo plakni atstājam baltu (skat. A36. zīm.).



A36. zīm.

Risinājums. Patiešām, katra taisne, kas atrodas šajā plaknē, nav nokrāsota vairāk kā divās krāsās: taisne *a* nokrāsota melnā un zaļā krāsā, taisnes, kas krustojas ar taisni *a* punktā A, ir nokrāsotas baltā un zaļā krāsā, taisnes, kas krustojas ar taisni *a* punktos, kas nesakrīt ar A, ir nokrāsotas baltā un melnā krāsā, taisnes, kas nekrusto taisni *a* ir nokrāsotas vienā krāsā – baltas. Lai kāda taisne šajā plaknē būtu nokrāsota vairāk nekā divās krāsās, tai būtu jākrusto taisne *a* gan punktā A, gan vēl kādā citā punktā. Taču, ja divas taisnes krustojas, tās var krustoties tikai vienā punktā; ja divām taisnēm ir vismaz divi kopīgi punkti, tad tās sakrīt, t.i., ir viena un tā pati taisne. Tātad tāds gadījums, ka kāda taisne būtu nokrāsota trīs dažādās krāsās, pie šāda krāsojuma nav iespējams.

3.4.5. ***Risinājums.*** Izņemsim no kastītes divus dažāda garuma zīmuļus Z_1 un Z_2; to var izdarīt, jo teikts, ka kastītē ir dažāda garuma zīmuļi. Ja to krāsas jau ir dažādas, tad Z_1 un Z_2 ir meklētie zīmuļi, taču, ja zīmuļi Z_1 un Z_2 ir vienā krāsā, tad izņemsim no kastītes vēl trešo zīmuli Z_3, kura krāsa ir atšķirīga no zīmuļu Z_1 un Z_2 krāsas; tādu zīmuli noteikti atrast var, jo teikts, ka kastītē ir dažādu krāsu zīmuļi. Ja Z_3 un Z_1 ir dažāda garuma, tad tie ir meklētie zīmuļi, taču, ja Z_3 ir vienāda garuma ar Z_1, tad Z_3 noteikti nav vienāda garuma ar Z_2 (jo $Z_3=Z_1$ un $Z_1\neq Z_2$, tātad

$Z_3 \neq Z_2$). Tā kā zīmuļi Z_1 un Z_2 ir vienādās krāsās, bet Z_3 ir no tiem atšķirīgā krāsā, tad Z_2 un Z_3 būs gan atšķirīgās krāsās, gan atšķirīga garuma.

5. kārta

3.5.1. ***Atbilde:*** meloja Didzis, sacensībās uzvarēja Pēcis.

Risinājums. Par katru zēnu pēc kārtas pieņemsim, ka viņš meloja.

1) Pieņemsim, ka meloja Aldis un pārējie zēni teica taisnību. Tad no zēnu teiktā seko, ka īstenībā Aldis bija pirmais vai pēdējais (jo viņš meloja), Pēcis bija pirmais, otrais vai trešais (viņš nemeloja), Didzis bija pirmais (viņš nemeloja) un Mārcis bija pēdējais (viņš arī nemeloja). Taču nevar būt, ka Aldis bija pirmais vai pēdējais, jo pirmais bija Didzis un pēdējais bija Mārcis. Tātad īstenībā Aldis nav melojis.

2) Pieņemsim, ka meloja Pēcis un pārējie zēni teica taisnību. Tad sanāk, ka īstenībā Aldis bija otrais vai trešais (viņš nemeloja), Pēcis bija pēdējais (viņš meloja), Didzis bija pirmais (viņš nemeloja) un Mārcis bija pēdējais (viņš arī nemeloja). Taču tagad sanāk, ka gan Pēcis, gan Mārcis skriešanās sacensībās bija pēdējie, taču tā nevar būt, jo pēdējais bija tikai viens no zēniem.

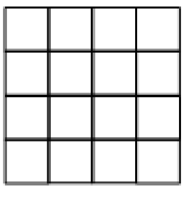
3) Pieņemsim, ka meloja Didzis un pārējie zēni teica taisnību. Tad sanāk, ka īstenībā Aldis bija otrais vai trešais (viņš nemeloja), Pēcis bija pirmais, otrais vai trešais (viņš nemeloja), Didzis bija otrais, trešais vai pēdējais (viņš meloja) un Mārcis bija pēdējais (viņš arī nemeloja). Šajā gadījumā nekādas pretrunas nerodas un sacensību rezultāts varēja būt sekojošs: Pēcis bija pirmais, Mārcis bija pēdējais (kā viņš pats to apgalvo), bet Aldis un Didzis viens finišēja otrais un otrs – trešais.

4) Pieņemsim, ka meloja Mārcis un pārējie zēni teica taisnību. Tad sanāk, ka īstenībā Aldis bija otrais vai trešais (viņš nemeloja), Pēcis bija pirmais, otrais vai trešais (viņš nemeloja), Didzis bija pirmais (viņš nemeloja) un Mārcis bija pirmais, otrais vai trešais (viņš meloja, teikdams, ka ir pēdējais). Taču tagad sanāk, ka neviens nav bijis pēdējais, tātad šāds gadījums arī neder.

Esam izskatījuši visus gadījumus, un vienīgais gadījums, kas atbilst uzdevuma prasībām (ka viens zēns ir melojis un pārējie teikuši patiesību) ir 3), ir: meloja Didzis, teikdams, ka ir pirmais, bet patiesībā sacensībās uzvarēja Pēcis.

3.5.2. ***Atbilde:*** jā, varēs.

Risinājums. Domās sadalīsim visu 4×4 metrus lielo paklāju mazākos 1×1 metrus lielos kvadrātiņos (skat. A37. zīm.). Iegūsim 16 mazos kvadrātiņus. Tā kā kodes ir izgrauzušas 15 punktveida caurumiņus (viens caurumiņš atrodas augstākais vienā mazajā kvadrātiņā un nevar būt tā, ka viens caurumiņš būtu sabojājis uzreiz divus vai vairāk mazos kvadrātiņus), tad pavisam sabojāti var būt, augstākais, 15 mazie kvadrātiņi (katrs caurumiņš citā kvadrātiņā). Tātad vismaz viens kvadrātiņš ar izmēriem 1×1 metri palicis nesabojāts, kas arī bija jāpierāda.



A37. zīm.

3.5.3. ***Atbilde:*** 143 skaitļi.

Risinājums. Tā kā tiek apskatīti desmitciparu skaitļi, tad meklējamajos skaitļos katrā nevar būt vairāk par pieciem divniekiem. Ja desmitciparu skaitlī būtu seši divnieki, tad starp šiem divniekiem piecās vietās jābūt ierakstītam ciparam 5 (pretējā gadījumā blakus atradīsies divi cipari 2). Bet tad skaitlī kopā būs vismaz 6+5=11 cipari. Tālāk skaitīsim, cik ir vajadzīgo skaitļu, kuros ir 1 divnieks, 2 divnieki, 3 divnieki, 4 divnieki vai 5 divnieki (vajadzīgajā skaitlī ir vismaz viens divnieks, jo uzdevumā teikts, ka tie sastāv no cipariem 2 un 5).

1 divnieks: tā kā ir viens divnieks, tad nevienā vietā nevarēs būt blakus divi divnieki (jo otra divnieka vienkārši nav), tātad vienu divnieku varam ievietot jebkurā no desmit vietām (desmitciparu skaitlī ir 10 "vietiņas" vienam ciparam), pārējie cipari šādā skaitlī būs piecinieki. Tātad pavisam ir **10** desmitciparu skaitļi, kuros ir viens divnieks un 9 piecinieki, un visi šie skaitļi apmierina uzdevuma nosacījumus.

2 divnieki: ja vajadzīgā skaitļa pirmais cipars ir 2, tad otrajam ciparam jābūt 5 (savādāk skaitlī divi divnieki būs blakus). Tad paliek 8 vietiņas, kur var būt ielikts otrs divnieks (nekādu citu ierobežojumu nav). Tātad vajadzīgo skaitļu, kas sākas ar cipariem 25.., un kuros ir 2 divnieki, ir 8. Līdzīgi varam saskaitīt, ka vajadzīgo skaitļu, kuros ir divi divnieki un: kuri sākas ar cipariem 525..., ir 7; kuri sākas ar cipariem 5525..., ir 6; kuri sākas ar cipariem 55525..., ir 5; kuri sākas ar cipariem 555525..., ir 4; kuri sākas ar cipariem 5555525..., ir 3; kuri sākas ar cipariem 55555525..., ir 2, un 1 vajadzīgais skaitlis sākas ar cipariem 555555525... Tātad kopā šādu skaitļu ir 8+7+6+5+4+3+2+1=**36**.

3 divnieki: skaitīsim līdzīgā veidā kā skaitļus, kas satur 2 divniekus. Ja šāds skaitlis sākas ar 2, tad otrais cipars noteikti ir 5. Atlikušajās 8 vietās ir jāizvieto 2 divnieki, to var izdarīt 6+5+4+3+2+1=21 veidos (skaitīšana notika pēc paņēmiena, kā tika skaitīti skaitļi ar 2 divniekiem). Līdzīgi, ja šāds skaitlis sākas ar 525..., tad vajadzīgo skaitļu ir 5+4+3+2+1=15, ja tas sākas ar 5525..., tad vajadzīgo skaitļu ir 4+3+2+1=10, ja šāds skaitlis sākas ar 55525..., tad vajadzīgo skaitļu ir 3+2+1=6, ja šāds skaitlis sākas ar 555525..., tad vajadzīgie skaitļi ir 2+1=3, un vēl ir 1 skaitlis 5555525252. Tātad vajadzīgo skaitļu, kas satur 3 divniekus, ir 21+15+10+6+3+1=**56**.

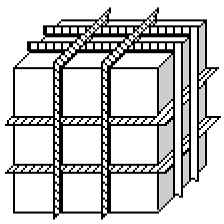
4 divnieki: skaitām līdzīgi: ja skaitlis satur 4 divniekus un sākas ar cipariem 25..., tad 8 vietās izvietot trīs divniekus var 10+6+3+1=20 veidos, ja šāds skaitlis sākas ar cipariem 525..., tad trīs divniekus atlikušajās 7 vietās var izvietot 6+3+1=10 veidos, ja skaitlis sākas ar 5525..., tad šādu skaitļu ir 3+1=4, un vēl ir 1 skaitlis 5552525252. Pavisam vajadzīgo skaitļu, kas satur 4 divniekus, ir 20+10+4+1=**35**.

5 divnieki: šādu skaitļu pavisam ir **6**: skaitlis 2525252525, skaitlis 5252525252 un četri skaitļi, kas sākas un beidzas ar 2 (četri tāpēc, ka starp pieciem divniekiem ir 4 vietas, kur kopā jāievieto pieci piecinieki, tātad vienā vietā divi piecinieki būs blakus un ir četras iespējas, kad divi piecinieki ir blakus – katrā vietiņā starp diviem divniekiem).

Tātad pavisam ir 10+36+56+35+6=143 desmitciparu skaitļi, kas sastāv no cipariem 2 un 5 un kuros divi cipari 2 neatrodas blakus.

3.5.4. ***Atbilde:*** 6 griezieni.

Risinājums. Sagriežot kubu 3×3×3 mazākos kubiņos 1×1×1, iegūto kubiņu dažas skaldnes atradās uz lielā kuba virsmas, bet citas – kuba iekšpusē. Taču vienam kubiņam 1×1×1 visas sešas skaldnes atradās lielā kuba iekšpusē (tas ir "*vidējais*" kubiņš), tātad šim kubiņam katra skaldne bija kopīga ar cita iegūstamā kubiņa vienu skaldni un kādai griezuma plaknei ir jāiet caur šo skaldni. Tā kā kubam ir 6 skaldnes, tad, lai izgrieztu "*vidējo*" kubiņu, ir vajadzīgi vismaz 6 taisni griezieni, jo nekādas divas kuba skaldnes neatrodas vienā plaknē, tātad nekādas divas skaldnes nevar izgriezt ar vienu taisnu griezienu. Kubu 3×3×3 var sagriezt mazākos kubos 1×1×1 ar sešiem taisniem griezieniem, piemēram, tā, kā parādīts A38. zīm.. Pie tam sagrieztās daļas pārvietot nav nepieciešams.



A38. zīm.

3.5.5. ***Risinājums.*** Rūķītis var rīkoties sekojoši. Rūķītis nostājas pie sienas tā, lai siena būtu viņam kreisajā pusē, atstāj savā pašreizējā atrašanās vietā savu sarkano cepurīti un sāk iet gar sienu tā, lai siena visu laiku būtu viņam no kreisās puses. Ceļa laikā rūķītis saskaita, cik reizes viņam bija jāpagriežas pa labi (pulksteņrādītāja kustības virzienā, A39. zīm. a)) un cik reizes bija jāpagriežas pa kreisi (pretēji pulksteņrādītāja kustības virzienam, A39. zīm. b)).

A39. zīm.

Rūķītis turpina ceļu tik ilgi, kamēr atgriežas vietā, no kuras sāka ceļu (šajā vietā rūķītis atstāja savu sarkano cepuri). Šajā brīdī rūķītis kopā ir pagriezies pa kreisi vai pa labi par 360° (veicis vienu pilnu apgriezienu). Ja rūķītis atrodas sienas iekšpusē, tad, ejot gar sienu tā, ka siena visu laiku atrodas pa kreisi, pagriezienu pa labi būs tieši par 4 vairāk nekā pagriezienu pa kreisi, ja rūķītis atrodas sienas ārpusē, tad pagriezienu pa kreisi būs par 4 vairāk nekā pagriezienu pa labi. Ja rūķītis ir saskaitījis, cik visā ceļā bija viena un otra veida pagriezienu, tad, nosakot, kurš no šiem skaitļiem lielāks, rūķītis secina, kur viņš atrodas.