ATRISINĀJUMI
1995./96. mācību gads
1. kārta

4.1.1. ***Atbilde:* nē, nevar.**

Risinājums. Katra no 5 riņķa līnijām var krustot ne vairāk kā četras citas riņķa līnijas, katru augstākais divos punktos. Tātad uz visām piecām riņķa līnijām kopā var būt ne vairāk kā $5 \cdot 4 \cdot 2 = 20$ krustpunkti (šoreiz tiek skaitīti krustpunkti uz riņķa līnijām, t.i., katrs divu riņķa līniju krustpunkts tiek ieskaitīts divas reizes - pa vienai reizei uz katras riņķa līnijas), bet dažādo punktu, kuros krustojas šīs riņķa līnijas, kopā var būt ne vairāk kā $40 : 2 = 20$. Tātad uzdevumā prasīto piecu riņķa līniju novietojumu uzzīmēt nevar, jo 22>20.

4.1.2. ***Risinājums.*** Aprakstītajā notikumā pircējs par viltotu 5 Ls naudas zīmi (faktiski par velti) ieguva preci 3 Ls vērtībā un 2 Ls naudas, ko viņam izdeva, tātad kopā ieguva 5 Ls. Pārdevēja kaimiņš neko nezaudēja un neko neieguva, jo viņš viltoto 5 Ls, kurus viņš izmainīja, vietā ieguva īsto 5 Ls naudaszīmi. Šajā procesā ir iesaistītas tikai minētās trīs personas: pārdevējs, pircējs un pircēja kaimiņš, tātad no ārpuses nekāda nauda klāt nenāca un nekur nepazuda. Tāpēc visu dalībnieku ieguvumu un zaudējumu summai jābūt 0. Tā kā pircējs ieguva 5 Ls, kaimiņš neieguva un nezaudēja neko, t.i., 0 Ls, tad kopā kaimiņš un pircējs ieguva 5 Ls+0 Ls=5 Ls, bet pārdevējs zaudēja šo summu – 5 Ls.

4.1.3. ***Risinājums.*** Pārveidosim doto vienādību sekojoši:

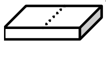
$xy + 1 = x + y$ (pārnes x uz vienādības kreiso pusi, bet 1 uz labo pusi)

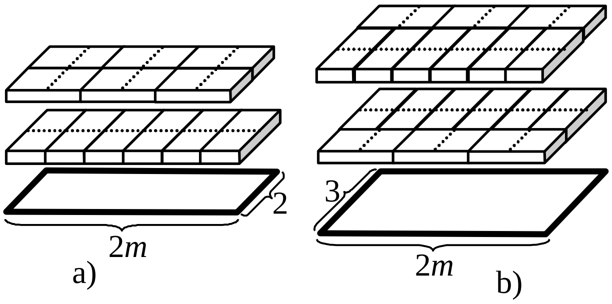
$xy - x = y - 1$ (vienādības kreisajā pusē x iznes pirms iekavām)

$x(y-1) = y - 1$

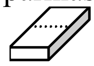
Dots, ka x un y ir naturāli skaitļi, tātad skaitlis y-1 ir vesels skaitlis. Lai, naturālu skaitli x reizinot ar skaitli (y-1), iegūtu skaitli (y-1), jābūt vai nu x=1, vai y–1=0 jeb y=1 (ja $y-1 \neq 0$, tad nav neviena cita naturāla skaitļa, izņemot 1, kuru pareizinot ar y–1, iegūtu y–1). Tas nozīmē, ka par meklējamajiem skaitļu pāriem der visi tādi naturālu skaitļu pāri, kuros viens skaitlis ir 1, bet otrs – jebkurš naturāls skaitlis. Patiešām, ja x=1 un y=n – kaut kāds naturāls skaitlis, tad dotā vienādība ir pareiza katrai naturālai n vērtībai: $1 \cdot n+1=1+n$.

Tā kā uzdevumā prasīts atrast 1996 naturālu skaitļu x un y pārus (x; y) – skaitļu pāri pierakstīsim, liekot abus skaitļus iekavās un pirmo rakstot x vērtību, otro – y vērtību – veidosim šos pārus sekojoši: izvēlēsimies x=1 (visos pāros), bet y – visus naturālos skaitļus no 1 līdz 1996 pēc kārtas, katru skaitli citā pārī. Tad kopā būsim uzrakstījuši 1996 vajadzīgos skaitļu pārus: (1;1), (1;2), (1;3), (1;4), ..., (1;1995), (1;1996).

4.1.4. ***Risinājums.*** Vispirms apskatīsim, kā noklāt taisnstūrus ar izmēriem 2×2m (ja n=2) (skat. A40. zīm. a)) un 3×2m (ja n=3) (skat. A40. zīm.b)). Šādā veidā var noklāt jebkuru taisnstūri 2×2m vai 3×2m, jo 2m ir pāra skaitlis un gar šo taisnstūra malu var novietot m domino kauliņus stāvoklī .



A40. zīm.

Ja n ir pāra skaitlis, tad pārklāšanu veicam analoģiski, kā gadījumā n=2 – pirmajā slānī visus kauliņus novietojam stāvoklī  un otrajā slānī visus kauliņus novietojam stāvoklī . Acīmredzot nekādi divi kauliņi dažādos slāņos nesakritīs.

Ja n ir nepāra skaitlis, tad pārklāšanu veicam, kombinējot gadījumus n=3 un n=2. Ievērosim, ka nepāra skaitļus, kas lielāki par 3, var izteikt kā skaitļa 3 un kāda pāra skaitļa summu: $n=3+2k$ (n – nepāra skaitlis, k – naturāls skaitlis) (piemēram, 5=3+2, 7=3+4=3+2·2, 13=3+10=3+2·5 utt.). Tātad, pārklājot taisnstūri $n\times 2m$ rūtiņas (n – nepāra skaitlis), rīkojamies sekojoši: joslu $3\times 2m$ rūtiņas noklājam, kā parādīts A40. zīm. b), bet atlikušo joslu $(n-3)\times 2m$ varam sadalīt mazākās joslās 2×2m (ja n ir nepāra skaitlis, tad n-3 noteikti ir pāra skaitlis, un pāra skaitu rūtiņu var sadalīt pa 2 rūtiņām). Katru no joslām $2\times 2m$ noklājam, kā parādīts A40. zīm. a). Arī šajā gadījumā nekādi divi kauliņi dažādos slāņos pilnībā nesakritīs, jo nekādi divi kauliņi nesakrīt A40. zīm. ne a) vai b) gadījumā.

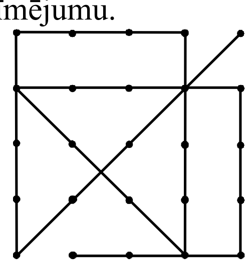
4.1.5. ***Risinājums.*** Pieņemsim, ka starp dotajiem 9 taisnstūriem nav divu tādu, kuru kopējās daļas laukums būtu vismaz $\frac{1}{9}$ dm^2 (t.i., pieņemsim, ka jebkuru divu taisnstūru kopējās daļas laukums ir mazāks par $\frac{1}{9}$ dm^2). Sanumurēsim taisnstūrus patvaļīgā secībā un sāksim tos iekrāsot: vispirms pirmo taisnstūri, tad – otro, trešo, utt. (ja kāda taisnstūra daļa jau ir nokrāsota, otrreiz to vairs nekrāsosim). Iekrāsojot pirmo taisnstūri, mēs iekrāsosim 1 dm^2 lielu laukumu – visu taisnstūri, jo pirms tam nekas nebija krāsots. Iekrāsojot otro taisnstūri, mēs no jauna iekrāsosim laukumu, kas ir lielāks nekā $\frac{8}{9}$ dm^2 – pirmajam un otrajam taisnstūrim var būt kopīga daļa, kas vienreiz jau ir iekrāsota, taču šīs daļas laukums pēc mūsu pieņēmuma ir mazāks $\frac{1}{9}$ dm^2. Iekrāsojot trešo taisnstūri, vēl tiks nokrāsots vairāk nekā $\frac{7}{9}$ dm^2, jo trešajam taisnstūrim var būt kopēja daļa ar pirmo un otro taisnstūri, kas jau ir nokrāsoti (ar katru taisnstūri var būt kopīga cita daļa), un katras kopīgās daļas laukums ir mazāks nekā $\frac{1}{9}$ dm^2, tāpēc no jauna tiks iekrāsots vairāk nekā $1-2\cdot\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$ (dm^2) liels laukums.

Līdzīgi secinām, ka krāsojot ceturto taisnstūri, no jauna tiks iekrāsots laukums vairāk nekā $1-3\cdot\frac{1}{9}=\frac{6}{9}$ (dm^2); krāsojot piekto taisnstūri, no jauna iekrāsosim vairāk nekā $1-4\cdot\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$ (dm^2); sesto taisnstūri – vairāk nekā $1-5\cdot\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$ (dm^2); septīto taisnstūri – vairāk nekā $1-6\cdot\frac{1}{9}=\frac{3}{9}$ (dm^2);

astoto taisnstūri – vairāk nekā $1-7\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$ (dm^2); devīto taisnstūri – vairāk nekā $1-8\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$ (dm^2). Tātad pavisam kopā vienu reizi **būs nokrāsots vairāk** nekā $1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\frac{6}{9}+\frac{5}{9}+\frac{4}{9}+\frac{3}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=5$ (dm^2). Taču dots, ka visi deviņi mazākie taisnstūri ir ievietoti taisnstūrī ar laukumu 5 dm2, tātad, krāsojot mazos taisnstūrus, **nevar nokrāsot vairāk** nekā 5 dm^2 lielu laukumu. Redzam, ka izceltie fakti ir pretrunīgi, tātad mūsu sākotnējais pieņēmums bija aplams (jo no mūsu pieņēmuma izriet pirmais izceltais apgalvojums). Tas nozīmē, ka noteikti atradīsies vismaz divi tādi mazākie taisnstūri, kuru kopīgās daļas laukums ir vismaz $\frac{1}{9}$ dm^2, kas arī bija jāpierāda.

2. kārta

4.2.1. ***Atbilde:*** skat., piem., A41. zīmējumu.



A41. zīm.

4.2.2. ***Atbilde.*** Dotajam uzdevumam ir iespējami trīs atrisinājumi:

1) O=9, W=8, M=1, C=3;
2) O=9, W=8, M=2, C=5;
3) O=9, W=8, M=3, C=7.

Risinājums. Skatoties saskaitīšanas darbību vienu šķirā, ievērojam, ka O+O=W vai O+O=W+10, t.i., saskaitot ciparus O+O, iegūst vai nu viencipara skaitli W (O un W ir cipari), vai divciparu skaitli 10+W (saskaitot divus ciparus, summā nevar iegūt vairāk kā 9+9=18). Taču desmitu šķirā atkal jāsaskaita cipari O+O (un varbūt vēl jāpieskaita 1 desmits, kas varētu būt radies, saskaitot vienus), un šoreiz summas pēdējais cipars ir O. Ja, saskaitot vienu šķirā O+O, būtu iegūts viencipara skaitlis W (neviens lieks desmits nerodas), tad, saskaitot O+O, arī desmitu šķirā būtu jāiegūst cipars W. Tas nozīmē, ka O+O=W+10 (vienu šķirā) un O+O+1=O+10 (desmitu šķirā). No otra vienādojuma iegūstam 2O+1=O+10 jeb O=9. Tad 9+9=18=W+10 jeb W=8. Doto piemēru varam pārrakstīt sekojoši:

$$\begin{array}{r} M99 \\ +\underline{M99} \\ C98 \end{array}$$

Tā kā, saskaitot 9+9+1=19=9+10, rodas viens pilns simts, tad simtu šķirā iegūstam M+M+1=C jeb 2M+1=C. Tas nozīmē, ka C noteikti ir nepāra cipars (jo C vispār ir cipars), pie tam C≠9, jo O=9. Tātad C var būt 7, 5, 3. Pie tam C≠1, jo M≠0, tā kā tas ir skaitļa pirmais cipars.

Ja C=7, tad M=(C-1):2=(7-1):2=3 un dotais piemērs ir sekojošs:

$$\begin{array}{r} 399 \\ +\underline{399} \\ 798 \end{array}$$

Ja C=5, tad M=(C-1):2=(5-1):2=2 un dotais piemērs ir sekojošs:

$$\begin{array}{r} 299 \\ +\underline{299} \\ 598 \end{array}$$

Ja C=3, tad M=(C-1):2=(3-1):2=1 un dotais piemērs ir sekojošs:

$$\begin{array}{r} 199 \\ +\underline{199} \\ 398 \end{array}$$

4.2.3. ***Risinājums.*** Tā kā šifrs sastāv no trīs cipariem 1, 2 vai 3 (šifrā cipari var arī atkārtoties), tad šifrā pirmais cipars var būt 1, 2 vai 3; katram no šiem gadījumiem otrais cipars arī var būt 1, 2 vai 3; arī trešo ciparu katram no iepriekšējiem gadījumiem var piemeklēt trīs veidos: 1, 2, vai 3, tātad pavisam ir $3\cdot3\cdot3=27$ dažādi šifri, no kuriem tikai viens ir pareizs. Pirmajā brīdī liekas, ka sliktākajā gadījumā vajadzēs pārbaudīt katru no šiem 27 variantiem, tātad kopā nospiest $27\cdot3=81$ pogas. Taču varam iztikt ar mazāk pogu spiešanu. Uzdevumā teikts, ka ir pēc kārtas pareizā secībā jānospiež trīs cipari, tātad, ja, spiežot daudzas reizes pēc kārtas ciparu pogas, kādā brīdī pēc kārtas pēdējie trīs cipari veidos šifru, tad vārti atvērsies, neatkarīgi no tā, kas ticis spiests pirms tam. Tātad ir jāizveido ciparu 1, 2 un 3, virkne, kurā katri trīs pēc kārtas ņemti cipari veidotu dažādas virknītes (iespējamo šifru) un kopā būtu 27 dažādas trīs ciparu virknītes (visi iespējamie šifra veidi). Nospiežot pogas iegūtās virknes secībā, noteikti būs ievadīts arī pareizais šifrs un pils vārti atvērsies. Noskaidrosim, cik cipariem vismaz ir jābūt ievadāmajā virknē. Ievērosim, ka virknes pirmais un pēdējais cipars piedalās vienas trīsciparu virknītes (šifra) veidošanā, otrais un priekšpēdējais cipars piedalās divu trīsciparu virknīšu veidošanā, bet visi pārējie cipari - trīs minēto virknīšu veidošanā. Pavisam kopā ir 27 dažādas trīsciparu virknītes, tātad tajās visās kopā ir $27\cdot3=81$ cipars. Pieņemsim, ka ievadītajā virknē starp otro un priekšpēdējo ciparu vēl ir n cipari. Saskaitot visus ciparus, kas veido dažādās virknītes, iegūstam $1\cdot2+2\cdot2+3\cdot n=81$ jeb $3n=81-6=75$ un $n=75:3=25$. Tātad ievadāmajā virknē jābūt vismaz 25+4=29 cipariem (4 atsevišķi izdalītie cipari – pirmais, otrais, priekšpēdējais un pēdējais cipars). Tātad, lai ar garantiju iekļūtu pilī, pogas jānospiež 29 reizes. To var darīt sekojošā secībā (šajā virknē tiešām var atrast visas 27 dažādās trīsciparu virknītes, tātad arī īsto šifru):

11123222133313121223113233211.

4.2.4. ***Risinājums.*** Pieņemsim, ka apkārt riņķim uzrakstīti skaitļi šādā secībā: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} (visi šie skaitļi ir dažādi naturāli skaitļi no 1 līdz 10). Apskatīsim visas summas, ko veido trīs pēc kārtas ņemti uzrakstītie skaitļi. Ieviesīsim apzīmējumus: $S_1=a_1+a_2+a_3$; $S_2=a_2+a_3+a_4$; $S_3=a_3+a_4+a_5$; $S_4=a_4+a_5+a_6$; $S_5=a_5+a_6+a_7$; $S_6=a_6+a_7+a_8$; $S_7=a_7+a_8+a_9$; $S_8=a_8+a_9+a_{10}$; $S_9=a_9+a_{10}+a_1$; $S_{10}=a_{10}+a_1+a_2$. Jāpierāda, ka vismaz viens no skaitļiem S_1, S_2, …, S_{10} ir lielāks nekā 16.

Saskaitot $S_1+S_2+\ldots+S_9+S_{10}$, katrs no skaitļiem a_1, a_2, a_3, …, a_9, a_{10} tiek ieskaitīts tieši trīs reizes, tātad

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8+S_9+S_{10}=3a_1+3a_2+3a_3+3a_4+3a_5+3a_6+3a_7+3a_8+3a_9+3a_{10}$$

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8+S_9+S_{10}=3(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$$

Tā kā a_1, a_2, …, a_{10} ir visi skaitļi no 1 līdz 10, katrs vienu reizi, tad

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

Tātad

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8+S_9+S_{10}=3\cdot55=165$$

Ja katra no summām S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10} būtu ne lielāka par 16, tad būtu

$$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7+S_8+S_9+S_{10}\le16\cdot10=160.$$

Bet šīs summas vērtība ir $165>160$, tātad pieņēmums, ka nekādu trīs pēc kārtas ņemtu skaitļu summa nav lielāka par 16, ir aplams, un noteikti varēs atrast trīs tādus skaitļus, kas pēc kārtas uzrakstīti apkārt riņķim un kuru summa ir lielāka nekā 16.

4.2.5. ***Risinājums.*** Sauksim atbilstošos vietu pārus, kur zīmes abās rindās sakrīt, par *labām* vietām, bet pārējās vietas - par *sliktām*. Ievērosim, ka, veicot atļauto darbību, *sliktā* vieta kļūst *laba*, bet *labā* – *slikta* (*sliktajā* vietā zīmes pirmajā un otrajā rindā atšķiras, taču pēc pārveidojuma zīme pirmajā rindā mainās uz pretējo, tātad kļūst tāda pati kā zīme otrajā rindā).

Pieņemsim, ka ir x *sliktās* vietas. Šķirosim sekojošus gadījumus:

(1) ja $x \geq 11$, tad ņemsim pēc kārtas pa 11 *sliktajām* vietām un mainīsim pirmajā rindā zīmes uz pretējām, tātad tās kļūs par *labajām* vietām; tā rīkojamies tik ilgi, līdz *slikto* vietu paliek ne vairāk par 10.

(2) ja $x=10$, tad ar vienu gājienu ņemsim 5 *sliktās* vietas un 6 *labās* vietas. Pārveidojot zīmes, *sliktās* vietas kļūst par *labām*, bet *labās* par – *sliktām*. Tātad tagad paliek 5 "vecās" *sliktās* vietas un 6 "jaunās" *sliktās* vietas jeb kopā 5+6=11 *sliktās* vietas. Ar otro gājienu tās visas pārvēršam par *labām* vietām.

(3) ja $x=9$, tad pirmajā gājienā mainām zīmes 5 *sliktajām* vietām un 6 *labajām* vietām. Pēc šīs darbības veikšanas paliek 6+(9-5)=10 *sliktās* vietas. Tālāk rīkojamies kā (2) gadījumā.

(4) ja $x=8$, tad vispirms mainām zīmes 4 *sliktajās* vietās un 7 *labajās* vietās; tad paliek 7+(8-4)=11 *sliktās* vietas, kuras nākamajā gājienā pārvēršam par *labām*.

Līdzīgi gadījumos, kad $1 \leq x \leq 10$ un x ir pāra skaitlis, pirmajā gājienā maina zīmes $\frac{x}{2}$ *sliktajās* vietās un vēl vajadzīgo skaitu zīmju *labajās* vietās. Pēc šāda gājiena paliek tieši 11 *sliktās* zīmes, kuras nākamajā gājienā pārvērš par labām vietām.

Savukārt, ja $1 \leq x \leq 10$ un x ir nepāra skaitlis, t.i., $x=2k+1=(k+1)+k$ (k - vesels skaitlis), tad pirmajā gājienā nomainām zīmes $k+1$ *sliktajās* vietās un $11-(k+1)=10-k$ *labajās* vietās. Pēc šī gājiena paliek $k+(10-k)=10$ sliktās vietas un tālāk rīkojamies kā aprakstīts (2) gadījumā.

Esam apskatījuši **visus iespējamos** *slikto* vietu skaitus, un katrā gadījumā esam parādījuši, kā uzdevuma prasības izpildīt, tātad esam pamatojuši: vienmēr varēs panākt, ka, izpildot atļautās darbības, abas rindas kļūs vienādas.

3. kārta

4.3.1. ***Atbilde:*** uzdevumā aprakstītā situācija nav iespējama.

Risinājums. Saskaitīsim divos dažādos veidos, cik **ceļu gali** pavisam ir Ziemeļblāzmas zemē. Skaidrs, ka to skaitam ir **jābūt vienam un tam pašam**, neatkarīgi no tā, kā tie tiek skaitīti.

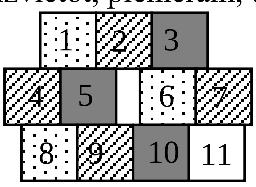
1) Tā kā Ziemeļblāzmu zemē ir 15 ciemi un no katra ciema ir ceļš tieši uz 5 citiem ciemiem, t.i., katrā ciemā ieiet vai iziet tieši 5 ceļu gali, tad pavisam kopā ir $5 \cdot 15=$**75 ceļu gali**.

2) Ir pašsaprotami, ka katram ceļam ir **tieši divi gali**, jo ceļš sākas vienā ciemā un beidzas otrā, pie tam tas nesazarojas. Tātad kopējam ceļu galu skaitam jābūt **pāra skaitlim**.

Bet 75 nav pāra skaitlis, t.i., skaitot vienus un tos pašus ceļa galus dažādos veidos, esam ieguvuši atšķirīgus rezultātus, kas nevar būt. Tāpēc uzdevumā aprakstītā Ziemeļblāzmu zeme nevar eksistēt.

Piezīme: uzdevumā lietoto spriešanas paņēmienu sauc par ***invariantu metodi*** (skat. 7. lpp.)

4.3.2. ***Atbilde.*** Kvadrātus var izvietot, piemēram, tā, kā parādīts A42. zīmējumā.



A42. zīm.

Risinājums. Mēģināsim šos kvadrātus izkrāsot trīs krāsās tā, lai nekādi divi kvadrāti, kam ir kopīgs malas nogrieznis, nebūtu izkrāsoti vienā krāsā (skat. A42. zīm.). Kvadrātu 1 nokrāsosim pēc izvēles vienā krāsā (zīmējumā tā attēlota ar punktiņiem), tad kvadrātam 2 jābūt citā krāsā (zīmējumā to attēlosim ar iesvītrojumu). Kvadrātam 5 ir kopīgi malas nogriežņi gan ar kvadrātu 1, gan ar kvadrātu 2, tātad tas ir jākrāso vēl citā krāsā (pieņemsim, pelēkā). Kvadrātam 4 ir kopīgs malas nogrieznis gan ar kvadrātu 1, gan ar kvadrātu 5, tātad tas nevar būt ne punktots, ne pelēks, tātad tam ir jābūt iesvītrotam. Savukārt kvadrāts 8 nedrīkst būt tādā krāsā kā 4 vai 5, tāpēc tam jābūt punktotam. Līdzīgi izspriežam, ka kvadrātam 9 jābūt iesvītrotam.

Tālāk kvadrātu 3 varam krāsot vai nu pelēku, vai punktotu. Vispirms pieņemsim, ka kvadrāts 3 nokrāsots pelēks. Tādā gadījumā kvadrātam 6 jābūt punktotam, kvadrātam 10 jābūt pelēkam un kvadrātam 7 jābūt iesvītrotam. Bet kvadrātam 11 ir kopīgs malas nogrieznis ar kvadrātiem 6, 7 un 10, katrs no kuriem ir nokrāsots citā krāsā. Tātad, lai arī kādā no izmantotajām trīs krāsām krāsotu kvadrātu, tas būs vienādā krāsā ar kādu citu kvadrātu (7, 6 vai 10), ar kuru tam ir kopīgs malas nogrieznis.

Līdzīgi izanalizējot gadījumu, kad kvadrātu 3 nokrāso punktotu (*šo analīzi atstājam lasītājam veikt patstāvīgi!*), secinām, ka arī šajā gadījumā kvadrātu 11 nevar nokrāsot nevienā no trijām izmantotajām krāsām, lai uzdevuma prasības izpildītos.

Tātad A42. zīm. attēlotais kvadrātu izvietojums der par uzdevuma atrisinājumu.

4.3.3. ***Atbilde:*** pavārs nav vainīgs.

Risinājums. Ja pavārs būtu nozadzis piparus, tad viņš to zinātu. Tā kā tie, kas zog piparus, vienmēr melo, tad pavāram-zaglim būtu jāmelo, t.i., jāsaka, ka viņš nezina, kurš nozaga piparus (īstenībā taču viņš zina, ka pats ir vainīgs!). Tātad pavārs nav nozadzis piparus, jo viņš atbildēja, ka zina, kurš to ir izdarījis.

Ja pavārs, sacīdams, ka zina, kurš ir zaglis, melo, tātad īstenībā viņš nezina, kurš ir zaglis, tātad pats nav zaglis (jo par sevi taču viņš visu zina).

Ja pavārs, sacīdams, ka zina, kurš ir zaglis, runā taisnību, tad viņš noteikti nav zaglis, jo zagļi taču vienmēr melo.

4.3.4. ***Atbilde:*** parlamentā ir tieši viens godīgs deputāts.

Risinājums. Vismaz viens godīgs deputāts ir saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem.

Ja parlamentā būtu vismaz divi godīgi deputāti, tad no šiem deputātiem varētu izveidot pāri, kurā abi deputāti ir godīgi. Bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumu, ka **jebkurā** deputātu pārī vismaz viens deputāts ir uzpirkts, tātad divi vai vairāk godīgi deputāti parlamentā būt nevar. Tāpēc parlamentā ir tieši viens godīgs deputāts.

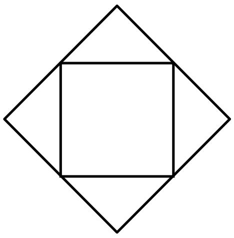
4.3.5. ***Atbilde:*** nē, nevar.

Risinājums. Pārbaudot *nepieciešamos nosacījumus* uzdevuma izpildei, tas ir, vai lielās kastes tilpums dalās ar mazās kastītes tilpumu, pretruna nerodas: $\frac{125\cdot 1996\cdot 96}{10\cdot 5\cdot 5}=1996\cdot 48=95808$ ir vesels skaitlis. Bet ar to vēl nepietiek, lai apgalvotu, ka visas 95808 kastītes patiešām var salikt lielajā kastē, lai nekas neiziet ārpus tās.

Ja Salatētim būtu izdevies dāvanas sapakot tā, kā prasīts uzdevumā, tad lielās kastes visas skaldnes būtu noklātas ar mazo kastīšu skaldnēm, kuru izmēri ir vai nu 10cm×5cm, vai 10cm×15cm, vai arī 5cm×15cm. Visu šo skaldņu laukumi dalās ar 5, tāpēc saliekot vairākas mazās skaldnītes kopā (bez tukšumiem un pārklāšanās), iegūtais laukums arī dalās ar 5. Tātad arī lielās kastes katras skaldnes laukumam ir jādalās ar 5. Lielās kastes skaldnes ir ar izmēriem 96cm×125cm, 1996cm×125cm, 1996cm×96cm. Kā redzam, skaldnes 1996cm×96cm laukums ar 5 nedalās, tāpēc šī skaldne nevarēs būt precīzi noklāta ar mazo kastīšu skaldnēm. Tāpēc Salatētim neizdosies realizēt savas vēlmes.

4. kārta

4.4.1. ***Atbilde:*** jā, var; skat., piem., A43. zīmējumu.



A43. zīm.

4.4.2. ***Atbilde:*** nē, nevar.

Risinājums. Apzīmēsim pirmajā rindiņā ierakstīto skaitļu summu ar p_1, otrajā rindiņā – p_2, trešajā – p_3, ceturtajā – p_4, piektajā – p_5. Savukārt summas pa kolonnām apzīmēsim attiecīgi ar n_1, n_2, n_3, n_4 un n_5. Uzdevumā dots, ka visi skaitļi p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 ir pāra skaitļi, bet visi skaitļi n_1, n_2, n_3, n_4 un n_5 ir nepāra skaitļi.

Apzīmēsim ar S visu tabulā ierakstīto skaitļu summu. Summu S var aprēķināt dažādi:

- tieši saskaitot visus 25 skaitļus,
- vispirms aprēķinot summu katrā rindiņā un pēc tam saskaitot šīs summas
- vispirms aprēķinot summu katrā kolonnā un pēc tam saskaitot šīs summas.

Saskaņā ar *saskaitīšanas komutatīvo īpašību* summa nav atkarīga no saskaitāmo kārtības, tāpēc visos gadījumos iegūtajai S vērtībai jābūt vienai un tai pašai.

Aprēķināsim S, vispirms aprēķinot summu katrā rindiņā un pēc tam saskaitot šīs summas:

$$S=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5.$$

Tā kā p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 ir pāra skaitļi un vairāku pāra skaitļu summa ir pāra skaitlis, tad šajā gadījumā ***S* ir pāra skaitlis**.

Tagad aprēķināsim S, vispirms saskaitot skaitļus pa kolonnām un pēc tam saskaitot šīs summas:

$$S=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5.$$

Šajā gadījumā skaitļi n_1, n_2, n_3, n_4 un n_5 ir nepāra skaitļi un, saskaitot piecus (*nepāra skaits!*) nepāra skaitļus, arī summas ***S* vērtība ir nepāra skaitlis**.

Izceltie apgalvojumi ir pretrunīgi, jo neviens pāra skaitlis nav vienāds ne ar kādu nepāra skaitli (atceramies, ka S ir viens un tas pats skaitlis – visu tabulā ierakstīto skaitļu summa), tāpēc kvadrātā 5×5 nevar ierakstīt naturālus skaitļus tā, lai to summas pa rindiņām būtu pāra skaitļi, bet summas pa kolonnām – nepāra skaitļi.

4.4.3. ***Risinājums.*** Apzīmēsim Vinnija Pūka medus podus ar burtiem A, B, C, D un E. Lai sakārtotu šo podus rindā sākot ar vieglāko, Pūks var rīkoties sekojoši.

1. svēršana. Salīdzina podus A un B. Tā kā visi medus podi ir dažādi, tad var gadīties, ka A ir vieglāks par B (A<B) vai A ir smagāks par B (A>B). Pieņemsim, ka A<B; otrā gadījumā tālākās darbības un secinājumi ir līdzīgi (*izpēti to patstāvīgi!*).

2. svēršana. Salīdzina podus C un D. Atkal ir divas iespējās: C<D vai C>D. Pieņemsim, ka C<D (otru iespēju pēta līdzīgi).

3. svēršana. Salīdzina pirmajā un otrajā svēršanā noskaidrotos smagākos podus; mūsu gadījumā – B ar D.

a) Ja B<D, tad, ņemot vērā 1. svēršanu, varam sakārtot trīs podus A<B<D.

b) Ja D<B, tad, ņemot vērā 2. svēršanu, varam sakārtot šādus trīs podus C<D<B.

Pēc trešās svēršanas nav noskaidrotas divu podu – a) gadījumā E un C vai b) gadījumā E un A – atrašanās vietas sakārtotajā rindā.

4. un 5. svēršanas. Šajās svēršanās noskaidrosim poda E atrašanās vietu.

a) Ja jau ir iegūts sakārtojums A<B<D, tad podu E vispirms salīdzinām ar podu B. Pēc tam, atkarībā no šīs svēršanas rezultāta, podu E salīdzinām ar podu A (ja E<B) vai podu D (ja E>B). Pēc šīs svēršanas poda E vieta šajā rindā būs noteikta viennozīmīgi.

b) Ja jau ir iegūts sakārtojums C<D<B, tad podu E vispirms salīdzinām ar podu D. Pēc tam, atkarībā no šīs svēršanas rezultāta, podu E salīdzinām ar podu C (ja E<D) vai podu B (ja E>D). Arī šajā gadījumā poda E vieta rindā būs noteikta viennozīmīgi.

Pēc šīm svēršanām palicis "neiekārtots" viens pods:

a) gadījumā pods C vai

b) gadījumā pods A.

a) Ir zināms, ka C<D (noskaidrojām 2. svēršanā), tātad pods C nav jāsalīdzina ar podiem, kas smagāki par D, un ar pašu podu D. Vieglāki par D ne vairāk kā 3 podi. Tātad pods C vispirms (6. svēršanā) ir jāsalīdzina ar podu, kurš sakārtotajā rindā ir otrais vieglākais, tad (7. svēršanā), atkarībā no iepriekšējās svēršanas rezultāta, ar visvieglāko vai trešo vieglāko jau sakārtotajā rindā. Pēc šīs svēršanas viennozīmīgi varēsim sakārtot visus piecus podus rindā pēc svara.

b) Lai noskaidrotu poda A atrašanās vietu, rīkojamies līdzīgi. Tā kā A<B, tad nav vajadzīgs podu A salīdzināt ar podu B un ar tiem podiem, kas smagāki par B. Tātad A būtu jāsalīdzina ar augstākais 3 citiem podiem. 6.svēršanā salīdzina podu A ar otro vieglāko jau sakārtotajā rindā, bet 7.svēršanā rīkojas līdzīgi kā a) gadījumā atkarībā no 6.svēršanas rezultāta. Arī šoreiz viennozīmīgi varēs noteikt poda A atrašanās vietu rindā.

Esam parādījuši, kā ar 7 svēršanām 5 podus vienmēr varēs sakārtot.

Piezīme. Var pierādīt, ka 7 svēršanas ir arī mazākais svēršanu skaits, lai **noteikti** varētu sakārtot 5 podus pēc svara augošā secībā.

4.4.4. ***Atbilde.*** Jā, uzdevumā aprakstītā situācija ir iespējama.

Risinājums. Piemēram, ja biznesmeņa ienākumi katru mēnesi bija 1000 Ls, bet izdevumi parādīti sekojošā tabulā:

	janvāris	februāris	marts	aprīlis	maijs	jūnijs	jūlijs	augusts	septembris	oktobris	novembris	decembris
Izdevumi, Ls	700	1050	1100	1100	1100	700	1100	1100	1100	1100	700	1100

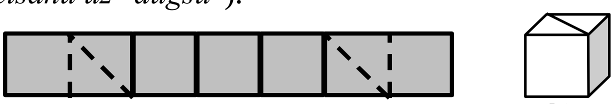
Ienākumi katrus piecus mēnešus pēc kārtas bija $5 \cdot 1000 = 5000$ Ls.

Izdevumi no janvāra līdz maijam un no februāra līdz jūnijam bija 700+1050+1100+1100+1100=5050 Ls>5000 Ls. Citos piecos pēc kārtas ņemtos mēnešos izdevumi bija 700+1100+1100+1100+1100=5100 Ls > 5000 Ls, tik tiešām, katrus piecus pēc kārtas ņemtus mēnešus biznesmeņa ienākumi bija mazāki nekā izdevumi.

Savukārt visa gada kopējie ienākumi bija $12 \cdot 1000 = 12000$ Ls, bet visa gada kopējie izdevumi bija $700 \cdot 3 + 1050 + 1100 \cdot 8 = 11950$ Ls < 12000 Ls. Tiešām, visa gada kopējie ienākumi pārsniedz visa gada kopējos izdevumus.

4.4.5. ***Risinājums***. Papīra strēmelīti 3×21 *cm* var sadalīt 7 kvadrātiņos 3×3 *cm*. Tā kā jāizloka kubs ar izmēriem 3 *cm*×3 *cm*×3 *cm*, katras tā skaldnes izmērs ir 3×3 *cm*. Kubam ir 6 skaldnes, bet dotajā strēmelītē ir 7 atbilstošā lieluma kvadrātiņi, tāpēc locīšanas gaitā drīkstam "*pazaudēt*" vienu kvadrātiņu.

Kā var veikt locīšanu, parādīts A44. a) zīmējumā. (*Nepārtrauktā līnija nozīmē ielocīšanu uz "iekšu", bet pārtrauktā - uzlocīšanu uz "augšu"*).



a) b)

A44. zīm.

Strēmelītes "redzamo" pusi nokrāsosim pelēku. A44. b) zīmējumā parādīts iegūtais kubs – tā augšējo skaldni veido abas a) zīmējumā pa diagonāli salocītās rūtiņas, priekšējo un aizmugurējo skaldni veido strēmelītes abas galējās rūtiņas, tām ir redzama nenokrāsotā puse, bet pārējās trīs skaldnes veido pārējās rūtiņas, tām ir redzama iekrāsotā puse.