1995./96. mācību gads

1. kārta

4.1.1. Vai var uzzīmēt 5 riņķa līnijas tā, lai tām būtu tieši 22 krustpunkti?

4.1.2. Pircējs izvēlējās preci par 3 Ls un iedeva pārdevējam 5 Ls. Pārdevējam nebija sīknaudas, ko izdot pircējam. Viņš paņēma pircēja 5 Ls un devās pie kaimiņa tos samainīt sīkākās naudas zīmes. Kad pārdevējs bija norēķinājies ar pircēju un pircējs bija aizgājis, pie pārdevēja atnāca kaimiņš ar ziņu, ka pārdevēja iedotie 5 Ls ir viltoti. Pārdevējs paņēma viltoto naudas zīmi un atdeva kaimiņam īstu 5 Ls naudas zīmi. Cik naudas pārdevējs zaudēja aprakstītajā situācijā?

4.1.3. Vai var atrast 1996 tādus naturālu skaitļu x un y pārus, lai vienādība $xy+1=x+y$ būtu pareiza? (Piemēram, pāris x=2 un y=3 neder, jo $2\cdot 3+1\neq 2+3$.)

4.1.4. Pierādi, ka taisnstūri, kura izmēri ir $n\times 2m$ rūtiņas (n un m - naturāli skaitļi, ne mazāki kā 2), var pārklāt ar diviem slāņiem domino kauliņu ar izmēriem 1×2 rūtiņas tā, ka
1) katrs slānis pilnībā pārklāj taisnstūri, neizejot ārpus tā robežām,
2) nekādi divi domino kauliņi no dažādiem slāņiem nesakrīt pilnībā!

4.1.5. Taisnstūrī, kura laukums ir 5 dm^2, izvietoti 9 taisnstūri, katram no kuriem laukums ir tieši 1 dm^2. Pierādi, ka starp šiem taisnstūriem var atrast tādus divus, ka to kopējās daļas laukums ir vismaz $\frac{1}{9}dm^2$!

2. kārta

4.2.1. Neatraujot roku no papīra lapas, savieno 5×5 punktus (tie izvietoti 4×4 rūtiņu režģa virsotnēs) ar lauztu līniju, kura sastāv no 8 posmiem! Līnija drīkst sākties un beigties atšķirīgos punktos.

4.2.2. Aizvieto vienādus burtus ar vienādiem cipariem un atšķirīgus burtus – ar atšķirīgiem cipariem tā, lai iegūtu pareizu vienādību:

$$\begin{array}{r} \text{M O O} \\ +\ \text{M O O} \\ \hline \text{C O W} \end{array}$$

4.2.3. Pie ieejas pilī ir trīs pogas. Viena poga atbilst ciparam 1, otra - ciparam 2, trešā - ciparam 3. Lai iekļūtu pilī, ir jānospiež pēc kārtas un pareizā secība trīs ciparu kods. Cik reižu jānospiež pogas, lai iekļūtu pilī? (Kods nav zināms.)

4.2.4. Skaitļi no 1 līdz 10 ir uzrakstīti apkārt riņķim patvaļīgā secībā, katrs vienu reizi. Pierādi, ka apkārt šim riņķim varēs atrast 3 blakus esošus skaitļus, kuru summa ir lielāka nekā 16!

4.2.5. Dotas divas rindas ar "+" un "-" zīmēm. Katrā rindā ir tieši 1995 zīmes. Ir atļauts atkārtot šādu darbību: izvēlēties jebkuras 11 zīmes no pirmās rindas un pārveidot tās par pretējām zīmēm: "+" par "-", "-" par "+". Vai, atkārtojot šo darbību cik patīk reižu (bet ne bezgalīgi daudz reižu), var panākt, ka pirmā rinda ir tāda pati, kā otrā rinda? (Tas ir, abās rindās pirmajā vietā ir viena un tā pati zīme, otrajā vietā arī, …, 1995.vietā arī.)

3. kārta

4.3.1. Ziemeļblāzmu zemē ir 15 ciemi, un no katra ciema ir ceļš uz pieciem citiem ciemiem. (Ja ir ceļš no ciema A uz ciemu B un ja ir arī ceļš no ciema B uz ciemu A, tad tas ir viens ceļš starp ciemiem A un B un nevis divi dažādi ceļi; pie tam ceļi nekur ārpus ciemiem nesazarojas.) Cik ceļu ir Ziemeļblāzmu zemē?

4.3.2. Izvieto plaknē 11 tādus kvadrātus, kuri nepārklājas, tā, lai izpildītos sekojoši nosacījumi: lai kā arī mēs nenokrāsotu šos kvadrātus trijās krāsās (katru kvadrātu vienā krāsā), noteikti varēs atrast divus kvadrātus, kuri būs vienā un tai pašā krāsā un kuriem būs kopējs kontūras nogrieznis!

4.3.3. Ziemassvētku priekšvakarā tika nozagti pipari, kuri bija paredzēti piparkūku cepšanai. Vislielākās aizdomas krita uz pavāru. Tiesā pavārs pateica tikai vienu teikumu: "Es zinu, kas nozaga piparus!" Ir zināms, ka tie, kas zog piparus, vienmēr melo. Vai pavārs ir vainīgs vai ir nevainīgs?

4.3.4. Kādas valsts parlamentā ir 100 deputātu. Katrs deputāts ir vai nu godīgs, vai uzpirkts. Ir zināms, ka vismaz viens deputāts ir godīgs un ka jebkurā deputātu pārī vismaz viens ir uzpirkts. Cik parlamentā ir godīgo deputātu?

4.3.5. Salatētis dāvanas ir sasaiņojis kastītēs, kuru izmēri ir $10\,cm \times 5\,cm \times 15\,cm$. Vai viņš ar šīm dāvanām var piepildīt lielo kasti, kuras izmēri ir $125\,cm \times 1996\,cm \times 96\,cm$, tā, lai nekas "neiznāktu ārā" un lai nepaliktu tukšas vietas?

4. kārta

4.4.1. Vai var uzzīmēt divus kvadrātus un četrus taisnleņķa trijstūrus, novelkot ne vairāk kā astoņus nogriežņus?

4.4.2. Vai 5×5 rūtiņu kvadrātā var ierakstīt naturālus skaitļus tā (katrā rūtiņā vienu skaitli), lai katrā rindā ierakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis, bet katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu nepāra skaitlis?

4.4.3. Vinnijam Pūkam ir pieci dažādi medus podi. Viņš tos grib sakārtot rindā, sākot ar vieglāko podu un beidzot ar smagāko. Pūka rīcībā ir sviras svari bez atsvariem. (Tas nozīmē, ka ar vienu svēršanu viņš var noskaidrot, uz kura no diviem svaru kausiem ir uzlikts lielāks smagums; vai arī, ka šie smagumi ir vienādi.) Pierādi: lai paveiktu iecerēto, Pūkam nevajadzēs izdarīt vairāk kā septiņas svēršanas!

4.4.4. Biznesmenis regulāri pierakstīja savus ieņēmumus un izdevumus. Vai var gadīties tā, ka gada beigās viņa gada ieņēmumi pārsniedz izdevumus, bet jebkuru piecu pēc kārtas ņemtu mēnešu izdevumi ir lielāki par ieņēmumiem?

4.4.5. Kā no papīra strēmeles, kuras izmēri ir $3\,cm \times 21\,cm$, var izlocīt kubu, kura izmēri ir $3\,cm \times 3\,cm \times 3\,cm$? (Strēmele drīkst pati ar sevi pārklāties.)