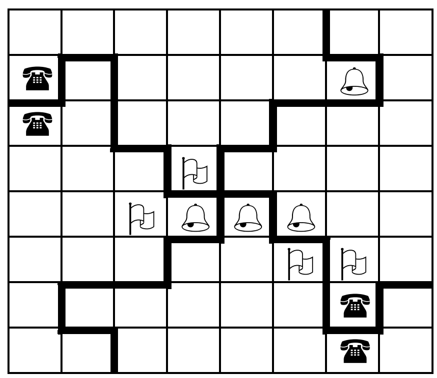
Jauno matemātiķu konkurss 1997./1998.m.g.

1.kārtas uzdevumu īsi atrisinājumi

1. Prasīto var izdarīt, piemēram, šādi (virs bultiņām norādīts, kuru operāciju pielietojam):

$$\mathbf{1997} \xrightarrow{1} 7992 \xrightarrow{2} 3996 \xrightarrow{2} 1998 \xrightarrow{2} 999 \xrightarrow{1} 1000 \xrightarrow{2} 500 \xrightarrow{2}$$
$$\xrightarrow{2} 250 \xrightarrow{2} 125 \xrightarrow{1} 522 \xrightarrow{2} 261 \xrightarrow{1} 163 \xrightarrow{1} 362 \xrightarrow{2} 181 \xrightarrow{1}$$
$$\xrightarrow{1} 182 \xrightarrow{2} 91 \xrightarrow{1} \mathbf{19}.$$

2. Skat. 2. zīmējumu.



2.zîm.

3. Tā kā vismazākais iespējamais izlasīto lappušu skaits ir 0 un katrs no 15 skolēniem ir izlasījis dažādu lappušu skaitu, tad vismazākais izlasīto lappušu skaits ir 0+1+2+…+13+14=106>96. Tātad būs lappuses, kuras būs izlasījuši vairāki skolēni.

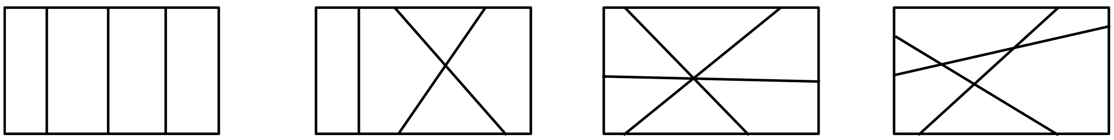
4. Modeļa lineārie izmēri (augstums, garums un platums) ir 10m:5cm=1000cm:5cm=200 reizes mazāki nekā mājas izmēri. Tā kā māja un modelis veidoti no viena un tā paša materiāla, tad to svaru attiecība ir tāda pati kā tilpumu attiecība. Bet modeļa tilpums ir 200·200·200=8000000 reizes mazāks nekā mājas tilpums, tātad māja sver 100g·8000000=800000000g=800000kg=800t.

5. Čips saindēto cepumu var atrast ar divām svēršanām, ja rīkojas sekojoši:
   1) sadala visus 9 cepumus 3 kaudzītes pa 3 cepumiem katrā un divas kaudzītes salīdzina uz svariem:
      a) ja svari ir līdzsvarā, tad saindētais cepums ir trešajā kaudzītē,
      b) ja viena kaudzīte ir smagāka, tad sliktais cepums ir tajā;
   2) ņem kaudzīti, kurā ir sliktais cepums, un uz abiem svaru kausiem uzliek pa vienam cepumam:
      a) ja abi cepumi ir vienādi, tad pāri palikušais ir saindēts,
      b) ja kāds cepums ir smagāks par otru, tad tas ir meklētais.

Īsi 2. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Ar trim dažādām taisnēm plakni var sadalīt ne mazāk kā 4 apgabalos, tātad arī papīra lapu ar 3 taisnēm nevar sadalīt 3 daļās. Trim dažādām taisnēm krustojoties var izveidoties augstākais 7 dažādi plaknes apgabali, tātad papīra lapu nevar sadalīt arī 8 daļās.

Kā ar 3 taisnēm taisnstūri var sadalīt 4, 5, 6 un 7 daļās parādīts 3.zīmējumā. Iespējami arī citi dalījumu veidi.



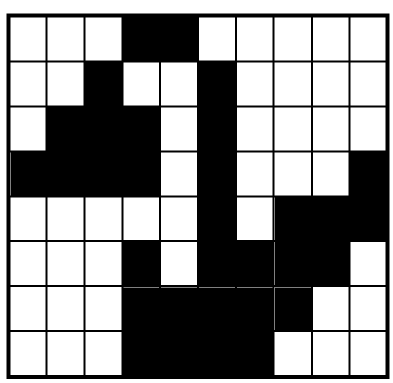
3.zîm.

2. Tā kā n ir vesels skaitlis, tad n-1 un n ir divi pēc kārtas sekojoši veseli skaitļi. Bet tā kā nekādu divu pēc kārtas sekojošu veselu skaitļu reizinājums nevar būt vesela skaitļa (šajā gadījumā skaitļa 3) kvadrāts, tad nav tādu veselu skaitļu n, kas apmierinātu doto vienādojumu.

3. Reizināšanas piemērs ir šāds:

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 \\
 & & 5 & \mathbf{3} \\
\cline{2-4}
 & \mathbf{3} & 6 & \mathbf{3} \\
\mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \\
\hline
\mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & 3
\end{array}$$

4. Sākotnējais zīmējums ir redzams 4. zīmējumā.

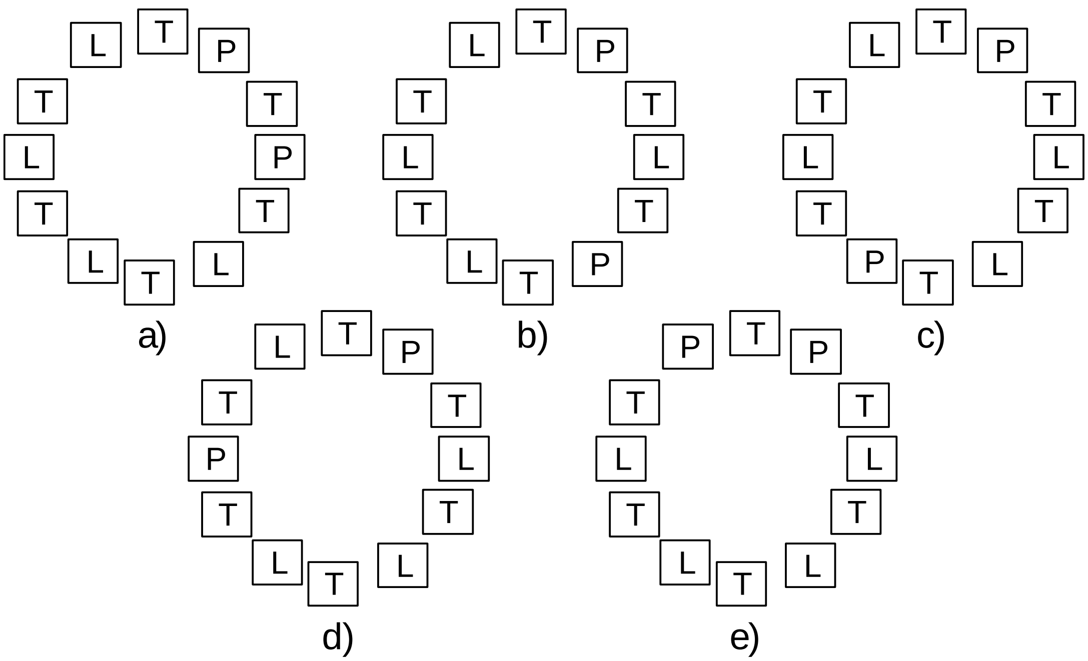


4. zīm.

5. Tā kā aplim nav ne sākuma ne beigu, tad dzīvnieku izvietojumu veidu skaits nav atkarīgs no tā, kurā krātiņā mēs sākam ievietot dzīvniekus.

Pavisam ir 12 krātiņi un 6 tīģeri, tātad tīģerus var izvietot vienā vienīgā veidā, lai blakus krātiņos neatrastos divi tīģeri. Atlikušajos 6 krātiņos jāizvieto 2 panteras un 4 lauvas. Ja būsim izvietojuši panteras, tad lauvu izvietojums būs noteikts viennozīmīgi.

Kā noskaidrojām iepriekš, tad nav svarīgi, kurā krātiņa ievietojam vienu panteru (to uzskatīsim par atskaites punktu). Tad otro panteru varētu ievietot 5 atlikušajos krātiņos (divas panteras neatradīsies blakus, jo tukšie krātiņi un krātiņi ar tīģeriem atrodas pamīšus). Un četros atlikušajos krātiņos tad ievietosim lauvas. Tātad esam ieguvuši 5 veidus, kā izvietot šos dzīvniekus (skat. 5. zīm.).



5.zîm.

Taču a) un e) izvietojumi ir vienādi, kā arī b) un d) izvietojumi ir vienādi, tātad šos 12 dzīvniekus 12 krātiņos pa apli var izvietot 3 dažādos veidos.

3. kārtas uzdevumu īsi atrisinājumi

1. $1020=1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot17$

No tā seko, ka uzdevumam ir 4 dažādi atrisinājumi:

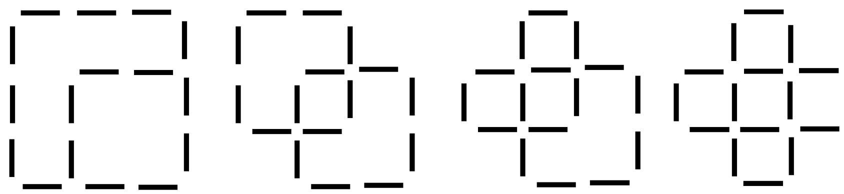
$1020=1\cdot4\cdot3\cdot5\cdot17$

$1020=1\cdot2\cdot6\cdot5\cdot17$

$1020=1\cdot2\cdot3\cdot10\cdot17$

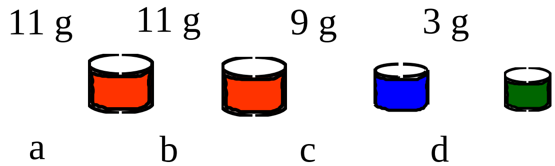
$1020=1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot34$

2. Lai izveidotos divi kvadrāti, pietiek pārvietot 4 sērkociņus (1.a zīm.), trīs kvadrāti ir redzami jau dotajā zīmējumā, tāpēc nav jāpārvieto neviens sērkociņš (1.b zīm.), 4 kvadrātus varam iegūt, pārvietojot 2 sērkociņus (1.c zīm.), 5 kvadrātus iegūsim, pārliekot 4 sērkociņus (1.d zīm.).



1a.zîm. 1b.zîm. 1c.zîm. 1d.zîm.

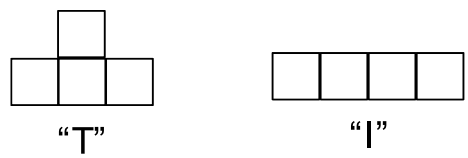
3. Apzīmēsim trauciņus ar burtiem a, b, c un d tā, kā tas ir parādīts 2. zīm.



2. zīm.

Iebērsim 3 g no trauciņa a trauciņā d, un visu atlikušo daļu, tas ir, 8 g nātrija karbonāta, iebērsim trauciņā c. Tagad trauciņš a ir tukšs. Tālāk pārbērsim 3 g nātrija karbonāta no trauciņa d trauciņā a (trauciņš d paliek tukšs), no trauciņa b iebērsim 1 g nātrija karbonāta trauciņā c, tagad trauciņš c ir pilns, tajā ir 9 g, bet trauciņā b ir 10 g nātrija karbonāta. Ieberot 3 g no trauciņa b trauciņā d, panāksim to, ka trauciņā b būs tieši 7 g dotās vielas.

4. Ja namdaris sadalīs grīdu rūtiņās ar izmēriem 1m×1m un iekrāsos rūtiņas grīdu kā šaha galdiņu, tad kļūs redzams, ka “T” veida dēlītis noklāj nepāra skaitu balto rūtiņu, bet “I” veida dēlītis noklāj pāra skaitu balto rūtiņu (skat. 3. zīm.). a) gadījumā “T” veida dēlīši ir nepāra skaitā, tātad, ja namdaris varētu izdarīt prasīto, tad būtu noklāts nepāra skaits balto rūtiņu, bet to ir (6×10)/2=30 rūtiņas, tātad pāra skaits, rodas pretruna, no šejienes seko, ka a) gadījums nav iespējams.



3.zîm.

Arī b) gadījums nav iespējams, jo “T” veida dēlīšiem ir jāatrodas vienkopus, citādi namdaris nevarēs izvietot “I” veida dēlīšus. Taču arī tad, ja “T” veida dēlīši ir viens otram blakus, tas ir, veido kvadrātu ar izmēriem 4m×4m, ar atlikušajiem dēlīšiem nav iespējams izklāt grīdu.

5. Ziemassvētku vecītim ir jāsagatavo viens maisiņš, kurā ir 1 dāvaniņa, viens maisiņš, kurā ir 2 dāvaniņas, viens maisiņš, kurā ir 4 dāvaniņas, viens maisiņš, kurā ir 8 dāvaniņas un viens maisiņš, kurā ir ieliktas 16 dāvaniņas.

4. kārtas uzdevumu īsi atrisinājumi

1. Piemēram šādi:

1) 69·99=69·(100-1)=69·100-69·1=6900-69=6800+30+70-69=6831

2) 47·101=47·(100+1)=4700+47=4747

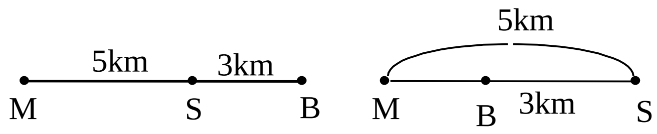
2. Lai varētu pateikt, cik garu ceļu Jānītis veic katru dienu, t.i., cik garš ir ceļš mājas (M)- skola (S)- baseins (B)-mājas, ir jāzina, cik ir attālums no baseina līdz mājām.

Apzīmēsim Jānīša mājas, skolu un baseinu ar punktiem.

Tad ir 2 iespējas:

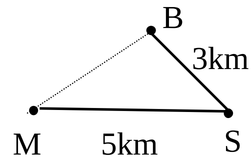
1) visi trīs punkti (M, S, B) atrodas uz vienas taisnes (1.zīm.a) un b));

2) šie punkti neatrodas uz vienas taisnes, tātad tie veido trijstūri (2.zīm.).



a) b)

1.zīm.



2.zīm.

1) gadījumā ir divas iepējas- vai nu baseins atrodas aiz skolas (1.a)zīm.); tādā gadījumā Jānītis veic ceļu 5km+3km+8km=16km, vai arī baseins atrodas starpmājām un skolu; tādā gadījumā Jānītis veic 5km+3km+2km=10km.

2) gadījumā Jānīša veiktais ceļš ir atkarīgs no MB garuma. Pēc sakarībām starp malām trijstūrī (katra mala ir īsāka par pārējo divu malu summu un katra mala ir garāka par pārējo divu malu starpību) iegūstam, ka 2km<MB<8km. Tā kā attālums MS=5km un SB=3km, tad MS+SB=8km un viss ceļš 2km+8km<MSBM<8km+8km jeb 10km<MSBM<16km.

Apvienojot abus gadījumus kopā, redzam, ka Jānītim katru dienu jāveic ceļš, kas nav īsāks par 10km un nav garāks par 16 km.

3. Anniņas piemērs izskatījās sekojoši:

110768 : 112 = 989
~~1008~~
996
~~896~~
1008
1008

4. No dotā seko, ka 1kg svaigu ābolu ir 800g ūdens, tātad ābola "sasā masa" ir 200g. Izžāvētos ābolos ir arī tie paši 200g "sausās masas", kas tagad sastāda 40% no visu ābolu masas. Tātad 1% visu izžāvēto ābolu masas sver 200g:40=5g. Tātad visi izžāvētie āboli sver 5g·100=500g jeb 0,5kg.5. Pieņemsim, ka visu rūķīšu, kas dzīvo Ramtam mežā, garums ir mazāks nekā 15 pēdas. Tādā gadījumā visu rūķīšu kopējais garums ir mazāks nekā 15·11=165 pēdas, bet ir dots, ka visu rūķīšu kopējais garums ir tieši 165 pēdas, kas nav mazāks par 165 pēdām. Tātad mūsu pieņēmums ir aplams un Ramtam mežā dzīvo vismaz viens rūķītis, kura garums <u>nav mazāks</u> par 15 pēdām.

5. kārtas uzdevumu īsi atrisinājumi

1. Spriedumu un pārbaudes rezultātā iegūstam, ka dotajam uzdevumam ir 9 dažādi atrisinājumi. Tabulā norādītas iespējamās burtu vērtības.

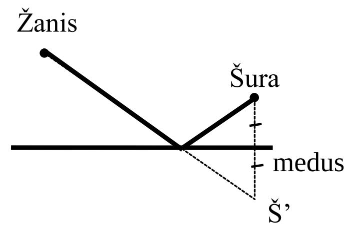
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
A	4	3	2	3	2	8	5	7	5
I	2	4	6	8	8	1	7	1	3
L	0	0	0	0	0	9	9	9	9
E	8	6	4	6	4	6	0	4	0
K	3	2	1	2	1	7	4	6	4
O	6	7	8	9	9	5	8	5	6

2. Ar x apzīmēsim naudas daudzumu (santīmos) katra bērna krājkasītē. Tad Jānītim ir x:5 monētas un Anniņai ir x:2 monētas.

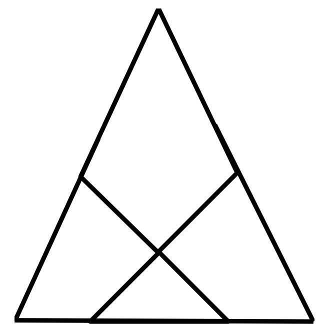
   Tātad $\frac{x}{5}+\frac{x}{2}$=28 jeb 2x+5x=280 un x=40.

   Atbilde: katra bērna krājkasītē ir 40 santīmi.

3. Skat. 2.zīm.



1.zīm.


2.zîm.

4. Tā kā pirmo joslu var noadīt vienā no 7 krāsām, otro - vienā no 6 atlikušjām krāsām utt., tad var iegūt 7·6·5·4·3·2=5040 dažādas rūķu cepures.

5. Visīsākais attālums starp diviem punktiem ir taisnes nogrieznis. Tā kā pēc uzdevuma nosacījumiem tas nav iegūstams, tad mums pašiem zīmējums jāpārveido tā, lai Ž un Š atrastos uz viena nogriežņa, kas krusto medus taisni. To panāk, punktu Š attēlojot simetriski pret medus taisni. Tad tas punkts, kurā nogrieznis ŠŽ krusto medus taisni, ir arī meklētais punkts, kurā jāpiestāj (skat. 2.zīm.).