

Jauno matemātiķu konkurss 1998./1999.m.g.

1. kārtas uzdevumu īsi atrisinājumi.

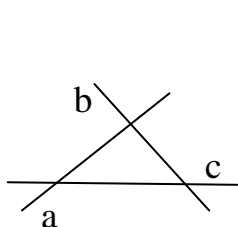
1. A=1, E=3, I=5, K=6, L=8, O=4, P=2, U=7, S=0.

2. Ozolziļu krelles pēc cenas pazemināšanas bija Ls 4, 100 kreļļu iegādei Kurmis iztērēja Ls 400 un iepirktās krelles pārdeva par Ls 5,20 gabalā (par 30% dārgāk nekā iepirka), kopsummā iegūstot **Ls 520**. Tātad Kurmja tīrā peļņa ir $520-400=\text{Ls } 120$.

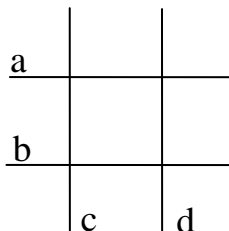
3. a) skat. 1a zīm.

b) skat. 1b zīm. $a \parallel b, c \parallel d$.

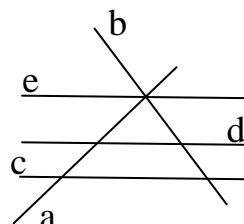
c) skat. 1c zīm. $c \parallel d \parallel e$.



1a zīm.



1b zīm.



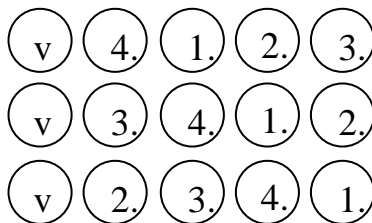
1c zīm.

4. Ja Vardītes jaunkundze sāks kukaiņu skaitīšanu no 1. oda, tad pirmais tiks apēsts 3. ods, bet 5. ods tiks apēsts pēdējais. Redzam, ka skaitot pulksteņa rādītāja virzienā, lielā muša iznāk ceturtā (skaitīšanu sākam no 5. oda), tātad, ja Vardīte vēlas šo mušu notiesāt pēdējo, tai ir jāsāk mieloties ar to kukaini, kas pulksteņa rādītāja virzienā stāv četras vietas aiz 3. oda, tas ir, ar **5. odu**.

5. "Izstiepsim" ziediņu un apzīmēsim tā viduci un ziedlapiņas tā, kā parādīts 2a. zīm. Viduci var iekrāsot 3 dažādos veidos, 1. lapiņu var izvēlēties 6 veidos, 2. – 5 veidos, 3. – 4 veidos, bet 4. – 3 veidos, iegūstam $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1080$ ziediņus. Šeit ir ieskaitīti arī visi 2b zīm. ziediņi, bet, skatoties pulksteņa rādīja virzienā, tie visi iznāk vienādi ar 2a zīm. ziediņu, Tas nozīmē, ka savā starpā atšķirīgo ziediņu skaits ir 4 reizes mazāks, tātad pavisam juvelieris var izgatavot $1080:4=270$ dažāda veida piespraudes.



2a zīm.



2b zīm.

2. kārtas uzdevumu īsi atrisinājumi.

1. Veselos skaitļos uzdevumam atrisinājuma nav.

Taču uzdevumā nebija norādīts, ka šiem skaitļiem jābūt veseliem, tāpēc apskatīsim arī uzdevuma risinājumu reālos skaitļos.

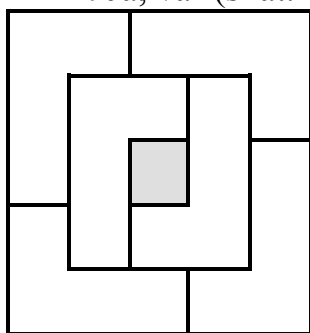
Ja vienu skaitli apzīmēsim ar x , tad otrs ir $x+161$. Tātad jāizpildās

$$x(x+161)=567$$

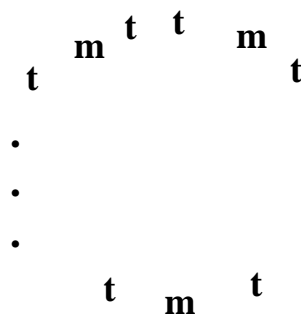
$$x^2+161x-567=0$$

Šī kvadrātviņņādojuma diskriminants $D=161^2-4\cdot(-567)=161^2+4\cdot567>0$, tātad viņņādojumam ir divas saknes un uzdevuma nosacījumiem atbilst divi iracionālu skaitļu pāri.

2. Jā, var (skat. 1. zīm.)



1. zīm.



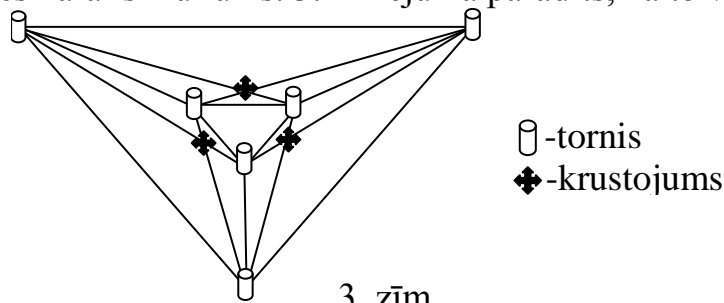
2. zīm.

3. Sauksim taisnību runājošos rūķītīšus par t rūķītīšiem un meļus – par m rūķītīšiem. Apskatīsim 2 gadījumus.

1) Ir vismaz viens rūķītis, kas runā taisnību. Tā kā taisnību runājošie rūķītīši nekad nemelo, tad katram t rūķītītim blakus noteikti stāv viens m rūķītītis un viens t rūķītītis. Tātad vienā apla posmā rūķītīšu izvietoējums ir sekojošs: $m_1 t t m_2$. Tā kā m_1 rūķītītim vienā pusē jau stāv t rūķītītis, tad otrā pusē jābūt arī t rūķītītim (savādāk m_1 rūķītītis nebūs melojis, ka viņam blakus stāv tieši viens melis). Līdzīgā veidā spriežot, iegūstam, ka rūķītīšu izvietoējums pa apli ir tāds kā parādīts 2. zīmējumā. Redzams, ka melis ir katrs trešais rūķītītis, tātad kopā ir $99:3=33$ meļi.

2) Visi rūķītīši ir meļi. Arī šis gadījums atbilst uzdevuma nosacījumiem, tātad meļi ir 99 rūķītīši.

4. Derībās uzvarēs karalis Dullums. 3. zīmējumā parādīts, kā to var izdarīt.



3. zīm.

5. Uzdevumā dotos datus ierakstīsim 4. zīmējumā redzamajos apļos sekojošā veidā:

1. apgabalā – rūķīšu skaitu, kam ir *tikai* sarkanā cepurītes

2. – kam ir *tikai* zaļā cepurīte

3. – kam ir *tikai* dzeltenā cepurīte

4. – kam ir *tikai* sarkanā un dzeltenā cepurītes

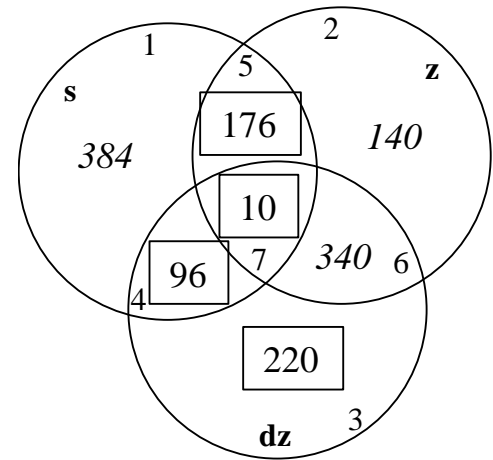
5. – kam ir *tikai* sarkanā un zaļā cepurītes

6. – kam ir *tikai* dzeltenā un zaļā cepurītes

7. – kam ir visas trīs cepurītes.

Sākumā ir dots, ka **s** aplī (apgabalos 1, 5, 7 un 4 kopā) ir jāieraksta skaitļus, kuru summa ir 666; tāpat arī **z** un **dz** apļos ir 666 katrā. Vēl sākumā ir doti rāmīšos ierakstītie skaitļi. Viegli varam izskaitļot atbilstošo skaitu pārējos apgabalos (slīpiem cipariem). Tātad pavisam mežā dzīvo

$$384+176+10+96+140+340+220=1366 \text{ rūķīši.}$$

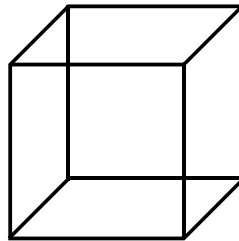


4. zīm.

3. kārtas uzdevumu īsi atrisinājumi.

1. Tā kā gan dotā skaitļa pēdējais cipars ir 4, tad 4-reiz lielāka skaitļa pēdējais cipars būs 6. Tātad iegūtā skaitļa pēdējais cipars jeb dotā skaitļa priekšpēdējais ir 6. Līdzīgā veidā spriežot varam atrast visu doto skaitli, kas ir **102564**.

2. To var panākt no 12 dotajiem kociņiem izveidojot **kubu** (skat. 3. zīm.).



3. zīm.

3. 10 cāļi 100 dienās apēdīs 10 reizes vairāk graudu nekā 10 cāļi 10 dienās, tātad 10 kg graudu. Savukārt 100 cāļi 100 dienās apēdīs 10 reizes vairāk graudu nekā 10 cāļi 100 dienās, tātad **100 kg** graudu, kas arī bija jāaprēķina.

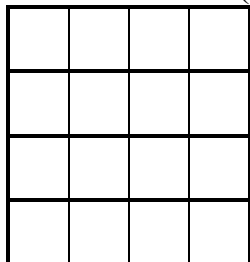
4. No uzdevuma teksta seko, ka no diennakts sākuma (plkst. 00:00) pagājis tieši 5 reizes laika vairāk nekā atlicis līdz diennakts beigām (plkst. 24:00), tātad pagājušas $\frac{5}{6}$ no visas diennakts un atlikusi $\frac{1}{6}$ no diennakts, kas ir $24:6=4$ stundas. Tātad pulkstens bija **20:00**.

5. Katrā kokā uzsēdināsim pa vienam putnam; 3 putni paliek bez koka. Sēdināsim katrā kokā pa otram putnam; vispirms sasēdināsim atlikušos 3 putnus un tad vēl pietrūks $2+1=3$ putni. Tātad pavisam ir $3+3=6$ koki. Tāpēc ir $6-1=5$ vārnas un $6-2=4$ žagatas.

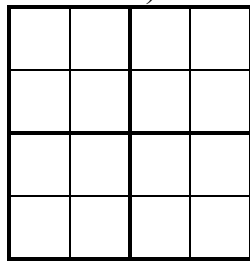
4. kārtas uzdevumu īsi atrisinājumi.

1. A=2, B=6, C=3, D=1, E=4, I=5, L=9, M=0. Šifrētais datums ir nozīmīgs ar to, ka šajā dienā bija pagājušā gada Lieldienas.

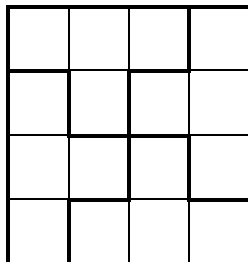
2. Četros veidos (skat. 2. zīm.).



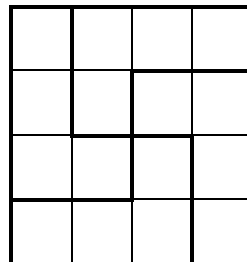
2.a) zīmējums



2.b) zīmējums



2.c) zīmējums



2.d) zīmējums

3. Pēc pirmajām septiņām mazgāšanas reizēm no ziepju gabaliņa bija samazinājies 8 reizes, bet pēc nākošajām 7 reizēm ziepju gabaliņš samazinājās vēl astoņas reizes, tātad pēc mazgāšanas palikušais ziepju gabaliņš ir $8 \cdot 8 = 64$ reizes mazāks salīdzinājumā ar sākotnējo.

4. Vārdu "MADAM" šajā zīmējumā var izlasīt 80 veidos. Jāievēro, ka vārds var sākties un beigties ar vienu un to pašu M burtu vai arī ar dažādiem burtiem. Sākot lasīt ar vienu "M" burtu, 20 dažādos veidos var izlasīt vārdu "MADAM"; zīmējumā pavisam ir 4 "M" burti, tātad pavisam kopā vārdu "MADAM" var izlasīt $4 \cdot 20 = 80$ veidos.

5. Apzīmēsim vectētiņa vecumu šobrīd ar x . Tad vecmāmiņai šobrīd ir $x-33$ gadi. Tad, kad vecmāmiņai būs tik pat gadu, cik šobrīd ir vectētiņam, tad skaidrs, ka vecmāmiņai būs x gadi un 3 reizes mazāk ir $x:3$. No vectētiņa stāstītā iegūstam šādu vienādojumu:

$$x-33=2 \cdot \frac{x}{3}$$

Atrisinot šo vienādojumu, iegūstam $x=99$.

Tātad vectētiņš ir 99 gadus vecs, bet vecmāmiņa – 66 gadus veca.

5. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Dotais dalīšanas piemērs bija sekojošs:

$$\begin{array}{r|l} 1089709 & 12 \\ \hline 108 & 90809 \\ \hline & 97 \\ & \underline{96} \\ & 109 \\ & \underline{108} \\ & 1 \end{array}$$

2. Uzdevuma risināšanā tiek izmantots Dirihlē princips.

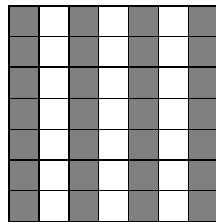
Pavisam ir 80 veidu grāmatas (atkarībā no lappušu skaita) – tādas, kurās ir 1 lpp., 2 lpp., ..., 79 lpp., 80 lpp.. Pieņemsim, ka bibliotēkā nav vairāk nekā 12 grāmatu ar vienādu lappušu skaitu. Tad bibliotēkā ir ne vairāk kā $12 \cdot 80 = 960$ grāmatas. Taču tā ir

pretruna ar uzdevumā doto ($1000 > 960$). Tātad mūsu pieņēmums ir aplams un bibliotēkā ir 13 grāmatas ar vienādu lappušu skaitu.

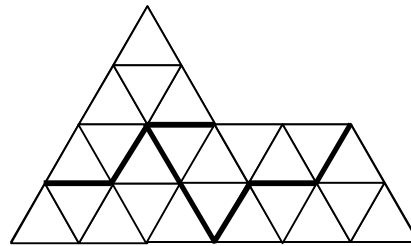
3. Vinnijs Pūks un Sivēntiņš kopā apēda $70 - 45 = 25$ banānus. Tā kā katrs (arī Sivēntiņš) apēda vismaz vienu banānu, tad Vinnijs Pūks apēda ne vairāk kā 24 banānus.

Trusītis un Pūce kopā apēda 45 banānus, tas nozīmē, ka viens no viņiem apēda vismaz 23 banānus (var pārlicināties, apskatot visas iespējas). Tā kā Pūks apēda visvairāk banānus, tad Pūks apēda vismaz 24 banānus. Ņemot vērā arī iepriekš gūtos secinājumus, iegūstam, ka Pūks apēda tieši 24 banānus, no kā seko, ka Sivēntiņš apēda tieši vienu banānu.

4. Izkrāsosim kvadrātu kā parādīts 1. zīmējumā. Ar slīpo gājienu var aiziet no baltas rūtiņas uz melnu vai otrādi. Apvienosim rūtiņas pāros tā, ka vienā pāri ir rūtiņas, kuras savieno slīpais karaļa gājiens. Katra rūtiņa, izņemot vienu, nonāk vienā pāri. Tātad balto un melno rūtiņu skaitam jāatšķiras par 1, bet tas atšķiras par 7. Pretruna, tātad šāds maršruts nav iespējams.



1. zīm.



2. zīm.

5. Skat. 2. zīmējumu.