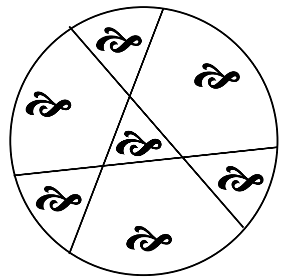
Jauno matemātiķu konkurss 1999./2000.m.g.

1. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Dotās skaitļu virknes pirmais loceklis ir 1, bet katru nākamo virknes locekli iegūst iepriekšējo reizinot ar 2 un rezultātam pieskaitot 3. Tātad visi šīs virknes locekļi būs nepāra skaitļi, tas nozīmē, ka skaitlis 2000 nepieder dotajai virknei.

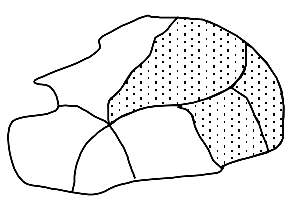
2. Skatīt 1. zīmējumu.



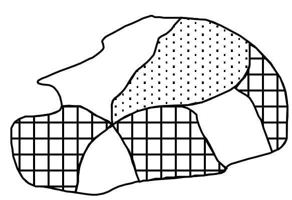
1. zīm.

3. Pieņemsim, ka datora sākotnējā cena ir x Ls. Tad pēc pirmās cenu pazemināšanas, tas maksāja 0,8x Ls. 20% no 0,8x ir 0,2·0,8x=0,16x Ls, tātad pēc otrās cenu pazemināšanas dators maksāja 0,8x-0,16x=0,64x. Savukārt pēc trešās cenu pazemināšanas datora cena bija 0,64x-0,2·0,64x=0,512x Ls. Ja pieņemsim, ka x Ls ir 100%, tad tagad datora cena ir (0,512x·100%)/x =51,2% no sākotnējās datora cenas, tātad tagad datoru var nopirkt ar 100%-51,2%=48,8% lielu atlaidi.

4. Apskatot 2a zīm. iekrāsotos novadus, viegli saprast, ka ar 2 krāsām iztikt nevar, tātad ir nepieciešamas vismaz trīs dažādas krāsas. Vienu no iespējamiem atrisinājumiem skat. 2b zīm.



2a. zīm.



2b. zīm.

5. Pūķis var noskaidrot Rūķa iedomāto skaitli, uzdodot 3 jautājumus:

1) **Vai tas ir pāra skaitlis?** Lai arī kā Rūķis atbildēs, četrus skaitļus (vai nu visus pāra skaitļus, vai visus nepāra skaitļus) varēs atmest kā nederīgus; pieņemsim, ka atbilde ir "nē".

2) **Vai tas ir kāds no skaitļiem 1 un 3?** Atkal, neatkarīgi no Rūķa sniegtās atbildes, pusi no atlikušajiem skaitļiem var atmest; pieņemsim, ka arī šoreiz Rūķa atbilde ir "nē".

3) **Vai tas ir 7?** Ja Rūķis teiks "jā", tad Pūķis vajadzīgo skaitli ir atradis, bet, ja Rūķis arī šoreiz teiks "nē", tad, skaidrs, ka iedomātais skaitlis ir 5.

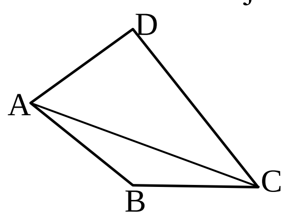
Gadījumā, ja Rūķa atbildes ir citas, tad Pūķis rīkojas analoģiski.

2. kārtas uzdevumu atrisinājumi

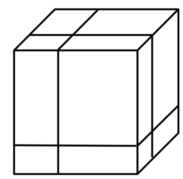
1. Skat. 1. zīm.

1. zīm.

2. Diagonāle AC četrstūri ABCD sadala divos trijstūros ABC un ACD (skat. 2. zīm.).



2. zīm.



3. zīm.

Abos šajos trijstūros ir jāpastāv trijstūra nevienādībai, t.i., katrai malai jābūt garākai par abu pārējo malu summu. Tātad trijstūrī ABC jāizpildās nevienādībām AB+AC>BC; AC+BC>AB un AB+BC>AC. Trijstūrī ABC malu garumi ir AB=1 cm, BC=2 cm, AC=5 cm. Kā redzam, pirmās divas nevienādības izpildās (1+5>2 un 5+2>1), taču trešā nevienādība ir aplama: 1+2 nav lielāks par 5. Tātad šāds trijstūris ABC neeksistē, līdz ar to nevar būt, ka četrstūra ABCD diagonāles AC garums ir 5 cm.

3. Iedomāsimies, ka **pirmais** Rūķa jautājums būs: "Vai skaitlis ir starp skaitļiem 1 un 2?" Ja Pūķis atbildēs "nē", skaitļu virknē 1, 2, 3, 4, zem 1 un 2 pavilksim mīnusus; ja Pūķis atbildēs "jā", mīnusus novietosim zem 3 un 4, pieņemsim, ka Pūķis atbild "jā", tātad:

$$1\ \ 2\ \ \underline{3}\ \ \underline{4}$$

Otrais Rūķa jautājums būs: "Vai iedomātais skaitlis ir starp skaitļiem 2 un 4?" Pieņemot, ka šoreiz Pūķa atbilde ir "nē" un rīkojoties līdzīgi kā iepriekš, iegūstam:

$$1\ \ \underline{2}\ \ \underline{3}\ \underline{\underline{4}}$$

Tā kā Pūķis drīkst melot tikai vienu reizi, tad skaitlis 4 pilnīgi noteikti nav iedomātais skaitlis. **Trešais** Rūķa jautājums būs: "Vai tas ir 1?" Atkarībā no Pūķa atbildes iegūstam divus variantus:

a) $1\ \ \underline{\underline{2}}\ \ \underline{\underline{3}}\ \ \underline{\underline{\underline{4}}}$, tātad Pūķa iedomātais skaitlis ir 1;

b) $\underline{1}\ \ \underline{\underline{2}}\ \ \underline{3}\ \ \underline{\underline{\underline{4}}}$, tātad Pūķis kaut kur ir melojis, lai Rūķis noskaidrotu, kurš no skaitļiem 1, 2 vai 3 ir iedomātais, viņam pietiek uzdot vēl divus jautājumus, tas nozīmē, ka ar **5** jautājumiem Rūķis pilnīgi noteikti var noskaidrot Pūķa iedomāto skaitli.

4. Ja Pūks savu klucīti sazāģēs tā, kā tas ir parādīts 3. zīm., tad katram mazajam klucītim tieši trīs sāni būs brūni, bet atlikušie trīs balti, tātad apsviežot mazos klucīšus apkārt un salīmējot tos pa brūnajiem sāniem, Pūks iegūs baltu klucīti.

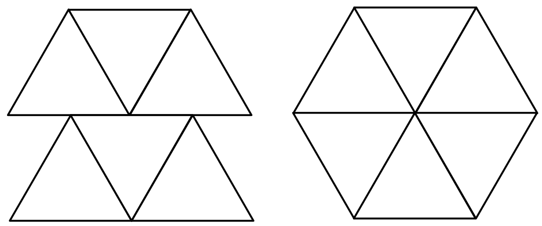
5. Apzīmēsim meklējamā skaitļa pirmo ciparu ar a, otro ciparu ar b. Tā kā a ir vairākas reizes lielāks nekā b, tad a=kb, kur k - naturāls skaitlis.

Skaitļa $\overline{ab}$ ciparu summa ir $a+b=kb+b=b(k+1)$; starpība ir $a-b=kb-b=b(k-1)$; reizinājums ir $ab=kb\cdot b=kb^2$; dalījums ir $a:b=kb:b=k$. Šiem četriem skaitļiem jābūt dažādiem un to reizinājums ir 972 (sadalot 972 pirmreizinātājos iegūstam $972=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$), tātad $b(k+1)\cdot b(k-1)\cdot kb^2\cdot k=972$ jeb $b^4k^2(k^2-1)=2^2\cdot3^5=3^4\cdot2^2\cdot3$.

Iegūtā vienādojuma vienīgais atrisinājums naturālos skaitļos ir $b=3$ un $k=2$. Tātad $a=kb=2\cdot3=6$ un meklējamais skaitlis ir **63**.

3. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. *Atbilde:* 45 gadskaitļi.
2. Skat. 1. zīm.



1. zīm.

3. Ievērosim, ka $\frac{1}{2000}+\frac{1999}{2000}=\frac{2000}{2000}=1$; $\frac{2}{2000}+\frac{1998}{2000}=\frac{2000}{2000}=1$; $\frac{3}{2000}+\frac{1997}{2000}=\frac{2000}{2000}=1$; utt. Pavisam var izveidot (1999−1):2=999 daļu pārus, kuru summa ir 1, bet daļa $\frac{1000}{2000}=\frac{1}{2}$ paliek nesapārota, tātad

$$\frac{1}{2000}+\frac{2}{2000}+\frac{3}{2000}+\ldots+\frac{1998}{2000}+\frac{1999}{2000}=999\cdot1+\frac{1}{2}=999\frac{1}{2}$$

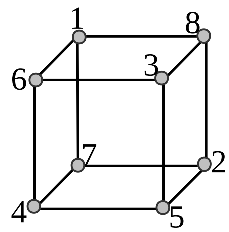
4. Vispirms izrēķināsim cik daudzus dažādus trijstūrus var izveidot, neņemot vērā virsotņu krāsu. Pirmajā rindā varam izvēlēties vienu virsotni 3 dažādos veidos, bet otrajā rindā divas virsotnes - 6 veidos. Tātad ir 3·6=18 tādi trijstūri, kuriem pirmajā rindā atrodas tieši viena virsotne. Otrajā rindā vienu virsotni varam izvēlēties 4 veidos, bet pirmajā rindā divas virsotnes - 3 veidos. Pavisam ir 4·3=12 tādi trijstūri, kuriem otrajā rindā atrodas tieši viena virsotne. Tas nozīmē, ka kopumā var izveidot 12+18=30 trijstūrus. No tiem 5 trijstūri ir tādi, kuriem visas virsotnes ir vienā krāsā. Tātad 30-5=25 trijstūri ir tādi, kuriem virsotnes atrodas dotajos punktos un ne vairāk kā divas ir vienā krāsā.
5. No dotā seko, ka katrs rūķītis ir nobaudījis medus dzērienu Ls 5 vērtībā. Tātad no Rīķeļa dotajiem Ls 5 Rūķelim (pērkot podiņu viņš ir iztērējis Ls 6) pienākas Ls 1, bet Rāķelim (šis rūķītis ir iztērējis Ls 9) pienākas Ls 4, līdz ar to katrs rūķītis būs samaksājis par medus dzēriena podiņu Ls 5.

4. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Šim uzdevumam ir daudz dažādu atrisinājumu. Daži atrisinājumi ir sekojoši:

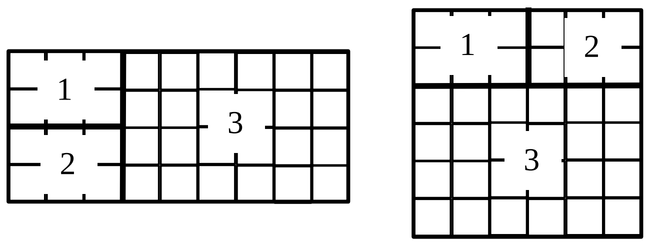
(1·2+3+4-5+6+7-8):9=1
(12+34-5):(6·7+8-9)=1
(12-3·4)·5·6·7-8+9=1

2. Kā izpildīt uzdevuma prasības, parādīts 1. zīm.



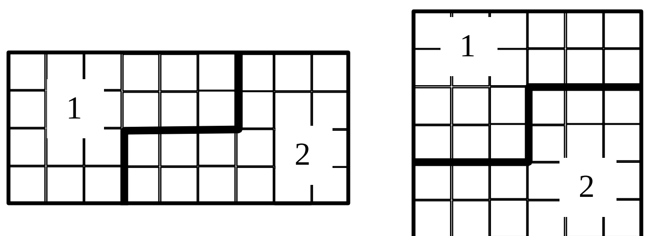
1. zīm.

3. a) Skat. 2. zīm.



2. zīm.

b) Skat. 3. zīm.



3. zīm.

4. Vispirms aprēķināsim, cik daudz tapešu lokšņu vajag "pilnā garumā" - 2,5 m. Tādas loksnes vajadzīgas visapkārt istabai, izņemot logu un durvis: (5+3)·2-2,1-0,9=16-3=13 m. Tā kā viena tapešu loksne ir 50 cm plata, tad pavisam nepieciešamas 13m:0,5m=26 šādas loksnes. Tad vēl nepieciešamas 2 loksnītes garumā vismaz 2,5m-2m=0,5m virs durvīm (ar vienu loksni nepietiek, jo tās platums ir tikai 0,5m, bet durvju platums ir 0,9m). Loga platums ir 2,1m, tātad virs un zem loga nepieciešamas 5 loksnes (ar 4 nepietiek, jo 4·0,5m=2m) kopējā garumā vismaz 2,5m-1,9m=0,6 m.

Tā kā tapešu raksts atkārtojas ik pēc 30cm, tad uz katru garo loksni (2,5m) "jārēķina" 2,7m - 9 pilni raksti. Tātad no viena tapešu ruļļa sanāk 10m:2,7m=3 loksnes, atl. 1,9m. Tātad garajām loksnēm kopā nepieciešami 9 ruļļi (ar 8 ruļļiem noteikti nepietiek, jo 8·3=24, vēl nepieciešamas 2 loksnes). Pāri paliek no 8 ruļļiem 1,9m no katra un 1,9m+2,7m=4,6m no devītā ruļļa. No šiem atlikumiem noteikti pietiks loksnēm virs durvīm un loga: virs durvīm vajadzīgas 2 loksnītes, kuras varam ņemt no 2 ruļļu pārpalikuma (1,9m>0,5m, tātad noteikti pietiek); no 5 citu ruļļu pārpalikuma varam ņemt nepieciešamās loksnītes virs un zem loga (1,9m>0,6m). Tātad rūķītim jāpērk **9** tapešu ruļļi.

5. Šifrā burts **V** aizšifrēts ar burtu **O**, burts **J** - ar burtu **S**, burts **L** - ar burtu **R**, burts **T** - ar burtu **A**, burts **A** - ar burtu **B**, burts **I** - ar burtu **E**.

Tātad ar burtu virknīti **BESB** aizšifrēts vārds **AIJA**, bet ar burtu virknīti **RBAOESB** - vārds **LATVIJA**.

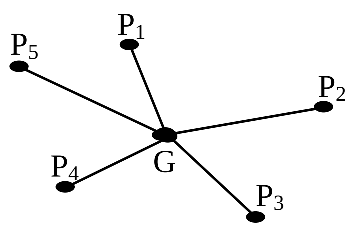
5. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Doto reizinājumu varam pārrakstīt kā 1998·1999·2·1000·2001·2002. Tā kā pareizināt ar 1000 nozīmē skaitlim labajā pusē pierakstīt 3 nulles, tad jānoskaidro, ar kādu ciparu beidzas reizinājums 1998·1999·2·2001·2002; tas arī būs dotā reizinājuma ceturtais cipars no beigām. 8·9·2·1·2=72·4=28**8**. Tātad doto skaitļu reizinājuma pēdējie četri cipari ir **8000**.

2. Ja pelīte Pīka sāk iet vispirms pa labi, tad atbilstoši uzdevuma prasībām uz apašējo labo stūri tā var nokļūt pa 100 dažādiem ceļiem. Līdzīgi, ja sāk iet vispirms uz leju, tad arī līdz mērķim Pīka var nokļūt pa 100 dažādiem ceļiem. Tātad pavisam ir 100+100=**200** dažādi ceļi.

3. Tādu divciparu spoguļskaitļu, kas apmierina uzdevuma prasības, nav. Varētu domāt, ka der tādi skaitļi, kuru pieraksts sastāv no diviem vienādiem cipariem. Tad spoguļskaitlis šim skaitlim būs tāds pats, t.i., spoguļskaitļu pārī abi skaitļi būs vienādi, bet uzdevumā teikts, ka viens viens skaitlis ir veselu skaitu reižu **lielāks** nekā otrs skaitlis. Ja divi skaitļi ir vienādi, tad neviens no tiem nav **lielāks** par otru.

4. 2. zīmējumā parādīts, kā jāierīko 5 maģistrāles, lai no katras pilsētas varētu nokļūt uz katru citu, braucot pa ne vairāk kā 2 maģistrālēm.



2. zīm.

Mazāk par 5 maģistrālēm ierīkot tā, lai izpildītos uzdevuma prasības, nevar.

5. Tā kā purpuļu valodu prot 90% Leiputrijas iedzīvotāju, tad **tikai** murmuļu valodā runā 100%-90%=10% jeb $\frac{1}{10}$ Leiputrijas iedzīvotāju. Murmuļu valodu pārvalda $\frac{2}{5}$ visu rūķu, tātad **tikai** purpuļu valodu pārvalda $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ Leputrijas iedzīvotāju. Tātad **tikai vienu** valodu Leiputrijā prot $\frac{1}{10}+\frac{3}{5}=\frac{7}{10}$ jeb 70% no visiem rūķiem un abas valodas pārvalda 100%-70%=**30%** Leiputrijas iedzīvotāju.