Jauno matemātiķu konkurss 2000./2001. m.g.

1. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde: 13. februāris bija svētdienā.
Risinājums. Februārī var būt 28 vai 29 dienas. Ja kādā mēnesī ir 28 dienas, tad šajā mēnesī ir tieši četras pilnas nedēļas, t.i., jebkurā nedēļas dienā "iekrīt" tieši četri datumi. Tātad uzdevumā runāts par garo gadu, kad februārī ir 29 dienas. Tad ir viena nedēļas diena, kurā "iekrīt" pieci datumi (uzdevumā tā ir otrdiena), bet visās pārējās dienās "iekrīt" četri datumi. Tātad otrdiena ir mēneša 1. un pēdējais datums, t.i., otrdienās bija 1., 8., 15., 22. un 29. februāris. Tālāk viegli izskaitīt, ka 13.februāris bija svētdien.

2. Atbilde: skaitļus 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 var iegūt, bet skaitļus 5 un 10 iegūt nevar.
Risinājums. Tālāk parādīts, kā no skaitļa 1 var iegūt skaitļus 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.

$1\to6\to2\to12\to4\to24\to8\to81\to27\to9\to3\to1$

$1\to6\to2$

$1\to6\to2\to12\to4\to24\to8\to81\to27\to9\to3$

$1\to6\to2\to12\to4$

$1\to6$

$1\to6\to2\to21\to7$

$1\to6\to2\to12\to4\to24\to8$

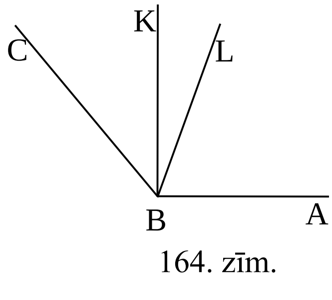
$1\to6\to2\to12\to4\to24\to8\to81\to27\to9$

Skaitļus 5 un 10 uzdevumā aprakstītajā veidā no skaitļa 1 iegūt nevar. Tā kā 1 nedalās ar 3, tad vispirms jāveic operācija, kas doto skaitli palielina, t.i., jāpareizina ar 6 (operācija a) vai jāpieraksta labajā pusē 1 (operācija c). Izpildot operāciju c) iegūstam skaitli, kura pēdējais cipars ir 1. Ja veicam tikai a) operāciju, tad no 1 varam iegūt skaitli, kura pēdējais cipars ir 6. Veicot pēc kārtas a) un b) operācijas, īstenībā doto skaitli pareizina ar 2 ($x\cdot6:3=x\cdot2$). Tātad veicot pēc kārtas pamīšus a) un b) operācijas no skaitļa 1 varam iegūt skaitļus, kuru pēdējie cipari ir 2, 4, 8, 6. Tātad skaitli 1 palielinot ar atļautajām operācijām, varam iegūt skaitļus, kuru pēdējie cipari ir 1, 2, 4, 6, 8.

sākotnējā skaitļa (a) pēdējais cipars	skaitļa a:3 pēdējais cipars (ja dalījums ir vesels skaitlis)	skaitļa (a:3):3 pēdējais cipars (ja dalījums ir vesels skaitlis)	skaitļa ((a:3):3):3 pēdējais cipars (ja dalījums ir vesels skaitlis)	skaitļa ((a:3):3):3 pēdējais cipars (ja dalījums ir vesels skaitlis)
1	7	9	3	1
2	4	8	6	2

No tabulas redzams, ka veicot dalīšanu ar 3, arī nevar iegūt skaitļus, kuru pēdējais cipars ir 5 vai 0, tātad nevar iegūt arī skaitļus 5 un 0.

3. Atbilde: $\angle KBL=20°$.



164. zīm.

Risinājums. Tā kā $\angle LBC+\angle ABK=90°+60°=150°>\angle ABC$, tad leņķiem ABK un LBC ir kopīga daļa - $\angle KBL$, pie tam $\angle KBL=(\angle LBC+\angle ABK)-\angle ABC=150°-130°=20°$ (skat. 164. zīmējumu).

4. Atbilde: 35 skolēni.

Risinājums. Tātad vasarā dzimuši $40\%=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$ no klases skolēniem. Tādā gadījumā skolēnu skaitam jādalās gan ar 5, gan ar 7, jo gan vasarā, gan ziemā, gan rudenī dzimušo skaitam jābūt veselam skaitlim; daļas $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ un $\frac{2}{5}$ ir nesaīsināmas, tātad klases skolēnu skaitam jādalās ar saucējiem 5 un 7. Starp skaitļiem 15 un 40 ir viens tāds skaitlis - 35, tātad klasē pavisam ir 35 skolēni, no kuriem $\frac{1}{5}\cdot 35=7$ dzimuši rudenī, $\frac{1}{7}\cdot 35=5$ dzimuši ziemā, $\frac{2}{5}\cdot 35=14$ dzimuši vasarā un $35-(7+5+14)=9$ dzimuši pavasarī.

5. Atbilde: meloja Didzis, bet sacensībās uzvarēja Pēcis.

Risinājums. Par katru zēnu pēc kārtas pieņemsim, ka viņš meloja.

1) Pieņemsim, ka meloja Aldis un pārējie zēni teica taisnību. Tad pēc zēnu teiktā sanāk, ka īstenībā Aldis bija pirmais vai pēdējais (jo viņš meloja), Pēcis bija pirmais, otrais vai trešais (viņš nemeloja), Didzis bija pirmais (viņš nemeloja) un Mārcis bija pēdējais (viņš arī nemeloja). Taču nevar būt, ka Aldis bija pirmais vai pēdējais, jo pirmais bija Didzis un pēdējais bija Mārcis. Tātad īstenībā Aldis nav melojis.

2) Pieņemsim, ka meloja Pēcis un pārējie zēni teica taisnību. Tad sanāk, ka īstenībā Aldis bija otrais vai trešais (viņš nemeloja), Pēcis bija pēdējais (viņš meloja), Didzis bija pirmais (viņš nemeloja) un Mārcis bija pēdējais (viņš arī nemeloja). Taču tagad sanāk, ka gan Pēcis, gan Mārcis skriešanās sacensībās bija pēdējie, taču tā nevar būt, jo pēdējais bija tikai viens no zēniem.

3) Pieņemsim, ka meloja Didzis un pārējie zēni teica taisnību. Tad sanāk, ka īstenībā Aldis bija otrais vai trešais (viņš nemeloja), Pēcis bija pirmais, otrais vai trešais (viņš nemeloja), Didzis bija otrais, trešais vai pēdējais (viņš meloja) un Mārcis bija pēdējais (viņš arī nemeloja). Šajā gadījumā nekādas pretrunas nerodas un sacensību rezultāts varēja būt sekojošs: Pēcis bija pirmais (jo par viņu ir teikts, ka viņš varēja pirmais), Mārcis bija pēdējais (kā viņš pats to apgalvo), bet Aldis un Didzis viens finišēja otrais un otrs - trešais.

4) Pieņemsim, ka meloja Mārcis un pārējie zēni teica taisnību. Tad sanāk, ka īstenībā Aldis bija otrais vai trešais (viņš nemeloja), Pēcis bija pirmais, otrais vai trešais (viņš nemeloja), Didzis bija pirmais (viņš nemeloja) un Mārcis bija pirmais, otrais vai trešais (viņš meloja, teikdams, ka ir pēdējais). Taču tagad sanāk, ka neviens nav bijis pēdējais, tātad šāds gadījums arī neder.

Esam izskatījuši visus gadījumus, un vienīgais gadījums, kas atbilst uzdevuma prasībām (ka viens zēns ir melojis un pārējie teikuši patiesību) ir 3), t.i., meloja Didzis, teikdams, ka ir pirmais, bet patiesībā sacensībās uzvarēja Pēcis.

2. kārtas uzdevumu atrisinājumi

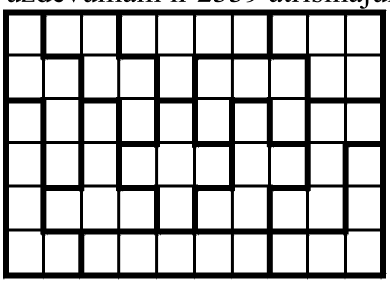
1. Atbilde: piemēram, 1573; pavisam ir 206 tādi skaitļi.

Risinājums. Saskaitīsim, cik pavisam ir minētā veida skaitļu $\overline{abcd}$ (a, b, c, d - cipari).

Vispirms saskaitīsim, cik ir tādu skaitļu, kuru pirmais cipars ir 6 (t.i., a=6). Tāds skaitlis jau vienā šķirā sakrīt ar skaitļiem 6972 un 6813, tātad $b\neq 9$, $b\neq 8$, $c\neq 7$, $c\neq 1$, $d\neq 2$, $d\neq 3$. Bet šim skaitlim vismaz vienā šķirā ir jāsakrīt arī ar skaitli 4512. Tā kā $a\neq 4$, $c\neq 1$ un $d\neq 2$, tad jābūt b=5. c var būt jebkurš cipars, izņemot 1 un 7, tātad pavisam 8 iespējas, d var būt jebkurš

cipars izņemot 2 un 3, tātad arī 8 iespējas un pavisam ir 8·8=64 derīgie skaitļi, kuru pirmais cipars ir 6.
Līdzīgā veidā saskaitīsim skaitļus, kuru pirmais cipars ir 4 (a=4). Tā kā tas vienā šķirā jau sakrīt ar skaitli 4512, tad b≠5, c≠1, d≠2. Tālāk šķirosim 3 gadījumus.
I Pieņemsim, ka b=9 (lai vienā šķirā sakristu ar skaitli 6972). Tad (vēl papildus augstākminētajiem nosacījumiem) c≠7. Tā kā a≠6, b≠8 un c≠1, tad d=3 (lai sakristu ar skaitli 6813). Tātad c var būt jebkurš cipars, izņemot 1 un 7, pavisam 8 iespējas.
II Pieņemsim, ka b=8 (lai vienā šķirā sakristu ar skaitli 6813). Tad (vēl papildus augstākminētajiem nosacījumiem) d≠3. Tā kā a≠6, b≠9 un d≠2, tad c=7 (lai sakristu ar skaitli 6972). Tātad d var būt jebkurš cipars, izņemot 3 un 2, pavisam 8 iespējas.
III Pieņemsim, ka c=7 un b≠8 (tas apskatīts II gadījumā). Tad vēl b≠9. Tā kā meklējamajam skaitlim vienā šķirā jāsakrīt ar skaitli 6813 un a≠6, b≠8, c≠1, tad jābūt d=3. Tātad b var būt jebkurš cipars, izņemot 5, 8 un 9, pavisam 7 iespējas.
Tātad pavisam derīgo skaitļu, kam pirmais cipars ir 4, ir 8+8+7=23.
Tagad saskaitīsim cik ir tādu skaitļu, kuros a≠6 un a≠4. Pieņemsim, ka a=1. Apskatīsim dažādas iespējas.
I b=9. Tad c≠7 un d≠2, tātad c=1 un d≠3. Tad pavisam varam izveidot 8 derīgus skaitļus $\overline{191d}$, kur d≠2 un d≠3.
II b=8. Tad c≠1 un d≠3, tātad d=2 un c≠7. Šoreiz varam izveidot 8 derīgus skaitļus $\overline{18c2}$, kur c≠1 un c≠7.
III b=5. Tad c≠1 un d≠2, Tātad c=7, d=3. Šoreiz ir tikai viens derīgs skaitlis 1573.
Ja a≠4, a≠6, b≠9, b≠8, b≠5, tad nevienu derīgu skaitli izveidot nevar. Tas būtu iespējams gadījumā, ja divos skaitļos sakristu cipars c (resp. d) un nevienam no šiem skaitļiem cipars d (resp. c) nesakristu ar trešā skaitļa ciparu d (resp. c). Kā redzam, šajā gadījumā šis nosacījums neizpildās.
Tātad pavisam ir 8+8+1=17 derīgie skaitļi, kam a=1. Tikpat ir derīgo skaitļu, ja a=2, a=3, a=5, a=7, a=8, a=9.
Tātad pavisam ir 64+23+17·7=206 minētā veida skaitļi.

2. Risinājums. Viens veids, kā no prasītā veida figūriņām salikt taisnstūri 6×10 rūtiņas, redzams 165. zīmējumā. Pavisam šim uzdevumam ir 2339 atrisinājumi.



165. zīm.

3. Risinājums. Izteiksmi, kas satur tikai dalīšanas darbības, var pārveidot par parasto daļu. Ar iekavu palīdzību varam dažus skaitļus "nonest" saucējā vai "uzcelt" skaitītājā, tikai dotajā piemērā skaitlis 20 jebkurā gadījumā (lai arī kā saliekam iekavas) būs skaitītājā, bet skaitlis 19 vienmēr būs saucējā.
a) Daļai vislielākā vērtība būs tad, ja saucējs būs iespējami mazs, bet skaitītājs – iespējami liels. Tā kā iepriekš secinājām, ka 19 vienmēr būs saucējā, tad izteiksmei būs vislielākā vērtība, ja to varēs pārveidot par daļu

$$\frac{20\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{19} =$$

=20:((((((((19:18):17):16):15):14):13):12):11):10)

b) Daļai vismazākā vērtība būs tad, ja saucējs būs iespējami liels, bet skaitītājs - iespējami mazs. Tā kā iepriekš secinājām, ka 20 vienmēr būs skaitītājā, tad izteiksmei būs vismazākā vērtība, ja to varēs pārveidot par daļu

$$\frac{20}{19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}=$$

=((((((((((20:19):18):17):16):15):14):13):12):11):10)

4. Risinājums. Uzdevumā minētie tūristi zina tieši divas no trim valodām (l-latviešu, k-krievu vai a-angļu). Trīs objektus pa divi var sadalīt trīs dažādos veidos: lk, la, ka. Tas nozīmē, ka starp minētajiem četriem tūristiem A, B, C un D ir vismaz divi (varbūt trīs vai arī visi četri), kas prot vienas un tās pašas valodas. Pieņemsim, ka tādi ir tūristi A un B un viņi abi prot tieši latviešu un krievu valodu. Tā kā arī tūristi C un D prot tieši divas no dotajām valodām - latviešu, krievu vai angļu, tad katrs no viņiem prot vai nu latviešu, vai krievu valodu (pretējā gadījumā viņi abi prastu tikai vienu valodu - angļu). Tātad gan C, gan D var sarunāties ar A un B, un līdz ar to visi četri tūristi var uzzināt visu informāciju viens no otra.

5. Atbilde: dotais reizināšanas piemērs izskatījās sekojoši:

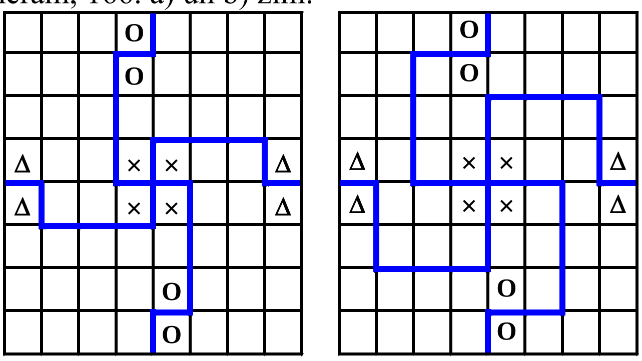
$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & & \times & 4 & 3 & 2 & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & & 2 & 4 & 6 & 8 & \\
 & 3 & 7 & 0 & 2 & & \\
4 & 9 & 3 & 6 & & & \\
\hline
5 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 4
\end{array}$$

3. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde: jā, var.

Risinājums. Vispirms Lācis aiziet pie Pūces, tad abi kopā viņi iegriežas pie Zaķīša, tad visi trīs iet pie Eža un visbeidzot dodas pie Vardītes.

2. Atbilde: skat., piemēram, 166. a) un b) zīm.



166. zīm.

3. Atbilde: d<a<c<b.

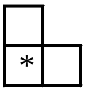
Risinājums. Vispirms ievērosim sekojošu pakāpju īpašību: $\left(a^k\right)^n=\underbrace{a^k\cdot a^k\cdot\ldots\cdot a^k}_{n\text{ reizes}}=\underbrace{\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{k\text{ reizes}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{k\text{ reizes}}}_{n\text{ reizes}}=a^{k\cdot n}$, pie tam tā ir spēkā abos virzienos. Tad iegūstam, ka 235=(25)7=327; 328=(34)7=817; 421=(43)7=647; 514=(52)7=257. Salīdzinot divas pakāpes, kurām kāpinātāji ir vienādi (un ir pozitīvi skaitļi), lielāka būs pakāpe ar lielāko bāzi. Tā kā 25<32<64<81, tad arī 514<235<421<328.

4. Atbilde: 8 meļi.

Risinājums. Sadalām kvadrātu četros mazākos kvadrātiņos (skat. 167.zīm.). Ja rūķītis atrodas stūra rūtiņā, tad viņam ir 2 kaimiņi, ja rūtiņā pie malas, kas nesakrīt ar stūra rūtiņām, tad viņam ir 3 kaimiņi, ja rūķītis atrodas kādā no iekšējām rūtiņām, tad viņam ir 4 kaimiņi (167. zīm. katrā rūtiņā ierakstīts kaimiņu skaits). Un vēl ievērosim, ka ja patiesību runājošais rūķītis saka, ka viņam kaimiņos ir vismaz divi meļi, tad tā arī ir, bet ja melis saka, ka viņam kaimiņos ir vismaz divi meļi, tad īstenībā viņam blakus ir vai nu viens, vai neviens melis.

2	3	3	2
3	4	4	3
3	4	4	3
2	3	3	2

167. zīm.



168. zīm.

m	t		
t	t	m	
m_1	m_2	t	
	t		

169. zīm.

t	m	m	t
m	t	t	m
m	t	t	m
t	m	m	t

170. zīm.

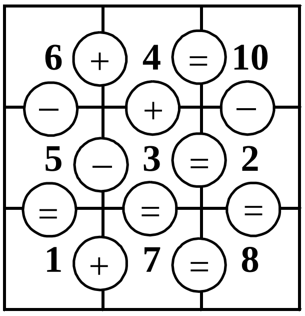
Ja meļu skaits ir 9 un vairāk, tad vismaz vienā kvadrātiņā būs ne mazāk par trim meļiem. Bet tad tie veidos “stūrīti” (skat. 168. zīm.) un rūķītim “*” būs divi kaimiņi meļi, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem. Tātad 9 vai vairāk meļi būt nevar.
Ja meļu skaits būs 7 un mazāk, tad taisnību sakošie rūķīši būs vismaz 16-7=9, tātad šoreiz būs vismaz viens mazais kvadrātiņš, kurā taisnību sakošo rūķīšu skaits ir vismaz trīs. Mēģināsim izvietot rūķīšus atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, sākot ar kreiso augšējo kvadrātiņu. Skaidrs, ka stūra rūtiņā jābūt melim: stūra rūtiņas rūķītim ir tikai 2 kaimiņi, abi no tā paša 2×2 kvadrātiņa, un ja tas būtu taisnību sakošais rūķītis, tad bez viņa šajā kvadrātiņā būtu vismaz 2 meļi, taču tas pretrunā ar mūsu pieņēmumu, ka šajā kvadrātiņā ir 3 taisnību sakošie rūķīši un meļu ir ne vairāk kā 4-3=1. Turpinot rūķīšu izvietošanu, redzam, ka iekrāsotajā rūtiņā (skat. 169. zīm.) jābūt taisnību runājošajam rūķītim (jo m1 jau ir viens kaimiņš melis), bet tad tam rūķītim būs tikai viens kaimiņš melis, tātad atkal nonākam pie pretrunas. Tas, ka var būt 8 meļi, ir redzams 170. zīm.

5. Atbilde: 26569857600 veidos.

Risinājums. Tā kā klasē ir 30 skolēni un 12 no tiem ir zēni, tad meitenes ir 18. Vispirms aprēķināsim, cik veidos var sadalīt Salatēta un Prinča lomas: Salatētis var būt jebkurš no 12 zēniem, tad princis var būt jebkurš no atlikušajiem 11 zēniem - pavisam ir 12·11=132 veidi. Līdzīgi noskaidrojam, cik veidos var sadalīt Ļaunās pamātes un Sniegbaltītes lomas: 18·17=306 dažādos veidos. Tātad šīs četras lomas var sadalīt 132·306=40392 veidos (katram zēnu pārim varam “pievienot” jebkuru meiteņu pāri). Tagad jāaprēķina, cik dažādos veidos starp atlikušajiem 26 skolēniem var sadalīt 7 rūķīšu lomas (uzskatīsim, ka visi rūķīši ir "vienādi"): $\frac{26\cdot25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21\cdot20}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}$=657800 veidi. Tātad visas lomas skolēni var sadalīt 40392·657800=26569857600 veidos.

4. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde: skat., piemēram, 171.zīm.

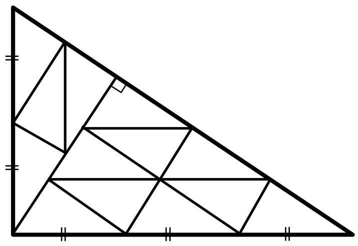


171. zīm.

2. Atbilde: katrs pērtiķis salasīja 13 riekstus.
Risinājums. No uzdevumā dotā seko, ka pērtiķu skaitam jābūt skaitļa 33 dalītājam. Tātad šis skaits varētu būt 3, 11 vai 33 (nevar būt 1 pērtiķis, jo tad nevarētu notikt strīds). Aplūkosim visas trīs iespējas. Ar x apzīmēsim riekstu skaitu, ko savāca katrs pērtiķis pirms ķīviņa.
a) Ja Mauglim riekstus nesa trīs pērtiķi, Tad pēc ķīviņa viņiem palika $3(x-2)$ rieksti, jeb $3(x-2)=33$. No kurienes seko, ka $x=13$.
b) Līdzīgi 11 pērtiķu gadījumā iegūstam vienādojumu $11(x-10)=33$, no kura arī seko, ka $x=13$.
c) Ja pērtiķu skaits ir 33, tad attiecīgais vienādojums ir $33(x-32)=33$ un $x=33$. Bet šī atbilde neder, jo katrs pērtiķis var panest ne vairāk kā 20 riekstus.
Tātad uzdevumā ir tieši viena atbilde: katrs pērtiķis salasīja 13 riekstus.

3. Risinājums. Viegli ievērot, ka jebkādā secībā izmantojot abus liftus var pārvietoties tikai par pāra skaitu stāvu uz augšu vai uz leju. Tātad, ja Jānītis sākumā atrodas 1.stāvā (1 - nepāra skaitlis), tad viņš var nokļūt uz jebkuru nepāra stāvu, bet nevar nokļūt ne uz vienu pāra stāvu.
a) uz 17. stāvu Jānītis nokļūs, četras reizes lietojot augšupejošo liftu;
b) 27. stāvā Jānītis nokļūs, vispirms uzbraucot 33.stāvā (astoņas reizes 4 stāvus uz augšu) un tad nobraucot sešus stāvus uz leju;
c) var rīkoties, piemēram, sekojoši: vispirms uzbrauc 9.stāvā (2×4 stāvi), tad nobrauc 6 stāvus zemāk, nokļūstot 3. stāvā, un tad uzbrauc 96 (24×4 stāvi) stāvus augstāk 99. stāvā.
d) un e) kā tika minēts sākumā, stāvā ar pāra numuru Jānītis nokļūt nevar, tātad nevar nokļūt 50. un 100. stāvā.

4. Atbilde: piemēram, skat. 172.zīm.



172. zīm.

Risinājums. Ņemsim taisnleņķa trijstūri ar katešu garumiem 2 un 3. Novelkot augstumu no taisnā leņķa virsotnes, dotais trijstūris tiek sadalīts divos tam līdzīgos taisnleņķa trijstūros, kuru hipotenūzas ir 2 un 3. (Sauksim šos trijstūrus par vidējiem.)
Sadalām iegūto trijstūru hipotenūzas attiecīgi 2 un 3 vienādos nogriežņos, kuru garums ir 1. Caur dalījuma punktiem velkot taisnes paralēli mazo trijstūru katetēm un hipotenūzām, vienu trijstūri sadalām 4, otru 9 mazākos taisnleņķa trijstūrīšos. Tātad kopā ir iegūti 4+9=13 mazie trijstūrīši.
Tā kā mazie trijstūrīši iegūti, velkot taisnes paralēli vidējo trijstūru malām, tad tie ir līdzīgi vidējiem trijstūriem un tātad līdzīgi savā starpā. Mazo trijstūrīšu hipotenūzas garums ir 1 (2:2=1 un 3:3=1), tātad visi 13 trijstūrīši ir vienādi.

5. Atbilde: izredzes laimēt Anniņai ir mazliet lielākas.
Risinājums. Notikuma varbūtību (iespēju, ka tas izpildīsies) aprēķina, dalot notikumam labvēlīgo gadījumu skaitu ar kopējo gadījumu skaitu. (Piemēram, varbūtība laimēt ZOROLOTO loterijā, nopērkot 1 biļeti ir $200:1000000=\frac{1}{5000}$, jo 1 laimīgo biļeti var izvilkt 200 veidos (jebkuru no pilnajām lozēm), bet vispār 1 biļete var būt jebkura no 1000000 izdotajām biļetēm.)
Ja notikums A ir "izvilkt vismaz vienu laimīgo biļeti", tad notikums B "neizvilkt nevienu laimīgo biļeti" ir tam pretējs. Tāpēc notikuma A varbūtība $P(A)=1-P(B)$. (Apzīmējums P(B) apzīmē notikuma B varbūtību.)

Aprēķināsim, kāda ir Anniņas varbūtība nenopirkt nevienu laimīgo biļeti loterijā ZOROLOTO. No visām 1000000 biļetēm 2 var izvēlēties 1000000·999999 veidos, tukšās lozes pavisam ir 1000000-200=999800 un 2 biļetes no tām var izvēlēties 999800·999799 veidos. Tātad varbūtība, ka Anniņa nenopirka nevienu laimīgo ZOROLOTO biļeti ir

$$\frac{999800\cdot 999799}{1000000\cdot 999999}.$$

Līdzīgi noskaidrojam, ka varbūtība nenopirkt nevienu laimīgo LOTOMORO biļeti Anniņai ir

$$\frac{1999500\cdot 1999499\cdot 1999498}{2000000\cdot 1999999\cdot 1999998}.$$

Tātad varbūtība, ka Anniņa vispār nenopirks nevienu laimīgo biļeti ir

$$P=\frac{999800\cdot 999799}{1000000\cdot 999999}\cdot\frac{1999500\cdot 1999499\cdot 1999498}{2000000\cdot 1999999\cdot 1999998}$$

un varbūtība, ka vismaz viena starp nopirktajām ir laimīga, ir 1-P.
Līdzīgi aprēķinām varbūtību nenopirkt nevienu laimīgo biļeti Pēterītim:

$$Q=\frac{999800\cdot 999799\cdot 999798}{1000000\cdot 999999\cdot 999998}\cdot\frac{1999500\cdot 1999499}{2000000\cdot 1999999}$$

Un izredzes laimēt Pēterītim ir 1-Q.
Tagad jānoskaidro, kurš no šiem skaitļiem lielāks, t.i., jānoskaidro vai starpība 1-P-(1-Q) ir pozitīva (ja Anniņai lielākas izredzes), negatīva (ja Pēterītim lielākas izredzes) vai vienāda ar 0 (ja abiem bērniem vienādas izredzes laimēt):

$$1-P-(1-Q)=$$
$$=1-\frac{999800\cdot 999799\cdot 1999500\cdot 1999499\cdot 1999498}{1000000\cdot 999999\cdot 2000000\cdot 1999999\cdot 1999998}-$$
$$-\left(1-\frac{999800\cdot 999799\cdot 999798\cdot 1999500\cdot 1999499}{1000000\cdot 999999\cdot 999998\cdot 2000000\cdot 1999999}\right)=(*)$$

Apzīmēsim 1000000=a, 999800=b, 2000000=c, 1999500=d un vienkāršosim izteiksmi

$$(*)=1-\frac{b(b-1)d(d-1)(d-2)}{a(a-1)c(c-1)(c-2)}-1+\frac{b(b-1)(b-2)d(d-1)}{a(a-1)(a-2)c(c-1)}=$$
$$=\frac{b(b-1)(b-2)d(d-1)(c-2)-b(b-1)d(d-1)(d-2)(a-2)}{a(a-1)(a-2)c(c-1)(c-2)}=$$
$$=\frac{bd(b-1)(d-1)\big((b-2)(c-2)-(d-2)(a-2)\big)}{a(a-1)(a-2)c(c-1)(c-2)}$$

Tā kā saucējs ir pozitīvs, bd(b-1)(d-1) arī pozitīvs, tad jānoskaidro kāda (pozitīva, negatīva vai 0) ir izteiksmes (b-2)(c-2)-(d-2)(a-2) vērtība:

(b-2)(c-2)-(d-2)(a-2)=bc-2b-2c+4-ad+2a+2d-4=bc-ad-2(b+c-a-d)=
=999800·2000000-1000000·1999500-2(999800+2000000-1000000-1999500)=
=100000000(9998·2-1·19995)-2(1000000-999700)=
=100000000·1-2·300>0.

Tātad lielākas izredzes vinnēt ir Anniņai.

5. kārtas uzdevumu atrisinājumi

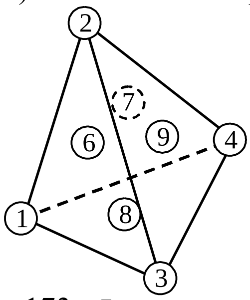
1. Atbilde: iegūtais skaitlis ir lielāks nekā $\frac{1}{13}$.

Risinājums. Pārveidojot skaitli $\frac{1}{13}$ decimāldaļā (t.i., dalot 1:13), iegūstam

```
1 : 1 3 = 0, 0 7 6 9 2 3 0 ...
1 0 0
  9 1
    9 0
    7 8
    1 2 0
    1 1 7
        3 0
        2 6
          4 0
          3 9
            1 0
             ...
```

Kā redzam, daļa $\frac{1}{13}$=0,(076923) ir bezgalīga periodiska decimāldaļa ar perioda garumu 6 cipari. Tātad 31.vietā aiz komata atrodas tāds pats cipars kā 1.vietā aiz komata, jo 31=6·5+1. Tas ir cipars 0. Ja mēs šo ciparu izsvītrojam, tad jauniegūtajā skaitlī 31.cipars aiz komata būs cipars 7 (nākamais, kas seko aiz 0). Tā kā daļai $\frac{1}{13}$ un iegūtajam skaitlim ir 0 veseli un pirmie 30 cipari aiz komata sakrīt, tad lielāks būs tas, kuram lielāks 31. cipars aiz komata. Tā kā 7>0, tad iegūtais skaitlis ir lielāks nekā $\frac{1}{13}$.

2. Atbilde: a) Skat., piem., 173.zīm.; b) to izdarīt nav iespējams.



173. zīm.

Risinājums. b) Piramīdai ir 4 virsotnes un 6 šķautnes, tātad kopā būtu jāieraksta 4+6=10 dažādi cipari. Tā kā pavisam ir tikai 10 dažādi cipari (0; 1; 2; ...; 9), tad visiem cipariem, arī 0, jābūt izmantotiem tieši vienu reizi. Cipars 0 var tikt ierakstīts tikai kādā no virsotnēm, jo visi cipari ir nenegatīvi skaitļi, un dažādu ciparu summa var būt tikai pozitīvs skaitlis. Ja kādā virsotnē ir ierakstīts cipars 0, tad uz šķautnes, kuras vienā galapunktā uzrakstīts cipars 0, bet otrā galapunktā - kāds cipars a, uzrakstītajam ciparam jābūt 0+a=a. Bet tā būt nedrīkst, jo visiem uzrakstītajiem cipariem jābūt dažādiem.

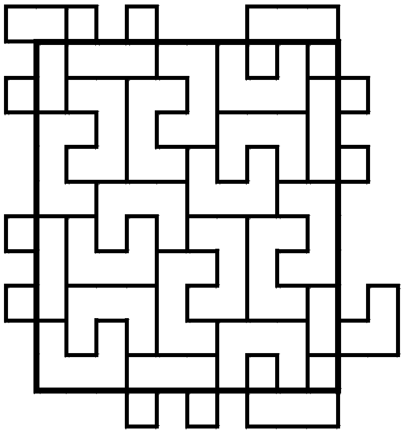
3. Atbilde: visus prasītos skaitļus var iegūt.

Risinājums. Veidosim skaitļu virknīti atbilstoši uzdevuma nosacījumiem. Pieraksts "101(1), 51" nozīmē, ka skaitli 51 iegūstam kā skaitļu 101 un 1 vidējo aritmētisko.

0, 101, 2001(101), 1051(101), 576(0), 288(0), 144(0), 72(0), 36(0), 18(0), 9(101), 55(101), 78(0), 39(9), 24(0), 12(0), 6(0), 3(55), 29(3), 16(0), 8(0), 4(0), 2(0), 1(2001), 1001

Kā redzam, visus prasītos skaitļus aprakstītajā veidā tiešām var iegūt.

4. Atbilde: lai pārklātu kvadrātu 10×10 rūtiņas, ir nepieciešamas 24 minētā veida figūriņas (skat., piem., 174.zīm.)



174. zīm.

5. Atbilde: 15 diennaktis.

Risinājums. Pieņemsim, ka stāvošā ūdenī kuģis vienā dienā nobrauc attālumu x, bet plosts vienā dienā pa upi nopeld attālumu y (tāds ir arī straumes ātrums). Tad kuģis pa straumi (no Eglaines līdz Bērzainei) vienā dienā veic attālumu $x+y=\frac{1}{3}$ no visa ceļa starp Eglaini un Bērzaini, bet pret straumi vienā dienā kuģis nobrauc attālumu $x-y=\frac{1}{5}$ no visa ceļa. Atņemot no pirmās vienādības otro, iegūstam:

$$x+y-(x-y)=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$$

$2y=\frac{2}{15}$ jeb $y=\frac{1}{15}$. Tas nozīmē, ka plosts vienā dienā nobrauc $\frac{1}{15}$ no attāluma starp Eglaini un Bērzaini, tātad pavisam plosts ceļā pavadīs 15 diennaktis.