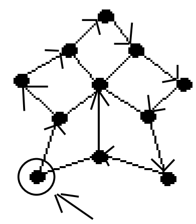
Jauno matemātiķu konkurss 2001./02. m.g.

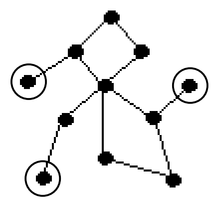
1. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1.uzd. Pūķītis Mopsis spēs to izdarīt rūķīšu-čaklīšu ciemā, ja ēšanu veiks, piemēram, tā kā tas ir parādīts . zīm. Skaidrs, ka rūķīšu-sliņķīšu ciemā Mopsim gan jāsāk, gan jābeidz ēšana ar tādu rūķīti, uz kura māju ved tikai viena taciņa, bet tādi rūķīši ir veseli trīs, tātad viens no viņiem paliks neapēsts!



1. apēstais rūķītis

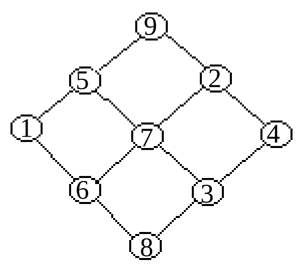
1a zīm.



1b zīm.

2.uzd. Iespējami sekojoši varianti: 5 divsantīmu monētas, 2 piecsantīmu monētas un 7 desmitsantīmu monētas; 10 divsantīmu monētas, 6 piecsantīmu monētas un 4 desmitsantīmu monētas. Ja desmitsantīmu monētu vietā ņem viensantīma monētas, tad iespējamo atbilžu skaits kļūst daudz lielāks.

3.uzd. Skat., piemēram, 2. zīm.



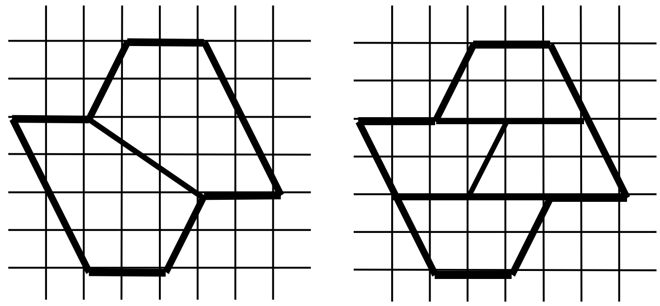
2.zīm.

4.uzd. Pirmajā solā varam apsēdināt jebkuru no 12 lauminām un jebkuru no 12 rūķīšiem, turklāt viņus abus šajā solā varam sēdināt divos atšķirīgos veidos, tas nozīmē, ka pirmo solu var aizpildīt pavisam $12 \cdot 12 \cdot 2$ veidos. Otrajā solā var sēdēt jebkura no 11 atlikušajām lauminām un jebkurš no 11 atlikušajiem rūķīšiem (atkal divos atšķirīgos veidos) – $11 \cdot 11 \cdot 2$ veidi, tātad pirmos divus solus varam aizpildīt $12 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 4$ atšķirīgos veidos, utt. Nonākot pie pēdējā, 12. sola, būsim ieguvuši, ka kopā ir

$$12 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4096$$

veidi kā var sasēdināt šos rūķīšus un lauminas.

5.uzd. 3 vienādās daļās ar atļautajiem griezieniem sadalīt doto figūru nevar, kā to sadalīt 2 un 4 vienādās daļās skat. 3. zīm.



3.zīm.

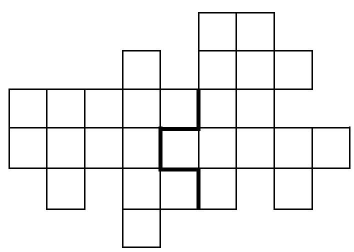
2. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums. Sarakstā bērni atrodas sekojošā kārtībā:

1) Anniņa
2) Pēterītis
3) Skaidrīte
4) Jānītis
5) Jurītis
6) Mudīte

2. uzdevums. Nākošo skaitli iegūst, iepriekšējo pareizinot ar 3 un rezultātam pieskaitot 2. Tas nozīmē, ka katrs šīs virknes skaitlis, dalot ar 3, dod atlikumu 2 (izņēmums ir skaitlis 1). Tā kā 2001 dalās ar 3 bez atlikuma, tad šis skaitlis dotajai virknei nepieder.

3. uzdevums. Skat. 2. zīm.



2. zīm.

4. uzdevums. Abas meitenes kļūdās. Anniņa nevarēja izveidot šādu apli, jo ar ciparu 4 ir iespējams izveidot tikai vienu divciparu skaitli, kas dalās ar 13 vai 17, tas ir 34, bet apļa izveidošanai ir nepieciešami vismaz 2 šādi skaitļi. Acīmredzami, ka Maijiņas izveidotajai rindai ir jābeidzas ar 34, bet rakstot rindu beigām uz sākumu, aizvien pienāk brīdis, kad rindas turpināšanai ir nepieciešams skaitlis, kas jau ir izmantots.

5. uzdevums.

Ja uzskatam par vienu gadījumu gadījumus 1. dienā - (3 , 3) 2. dienā - (1 , 1) un
1. dienā - (3 , 3) 2. dienā - (1 , 1)

tad kopā olas var pārnest 19 veidos.

3. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums. Vispirms mēģināsim atrisināt Pēterīša piemēru. Viegli ievērot, ka T=Ī+1. Mēģinājumu ceļā iegūstam vienīgo atrisinājumu

$$
\begin{array}{l}
2001 : 3 = 667 \\
\underline{18} \\
20 \\
\underline{18} \\
21 \\
\underline{21} \\
0
\end{array}
$$

Tātad Pēterīša šifrā Anniņas telefons ir **7360128**. Atliek vien pārliecināties, ka pareizs ir arī Jānīša piemērs: 6302+1078=7380.

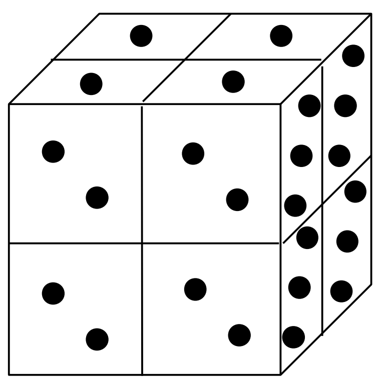
2..uzdevums. "Ja klasesbiedri no tūtas ņemtu tikai konfektes "Lācītis", tad šo konfekšu pietrūktu 6 bērniem. Ja puse no klases ņemtu konfektes "Lācītis", tad 4 konfektes "Lācītis" paliktu pāri." No šiem nosacījumiem seko, ka puse konfekšu "Lācītis" ir 6:2+4=7. Tātad pavisam to ir $2\cdot7=14$, tālāk noskaidrojam, ka klasē ir 14+6=20 bērni, bet konfektes "Vāverīte" ir 20:2-2=8.

3. uzdevums. Iespējamība, ka Baiba paņems savu pirmo akmentiņu ir $\frac{1}{11}$, jo visu akmentiņu skaits ir 11, bet pirmais akmentiņš ir tikai 1.

Vienu savu akmentiņu Baiba var izvēlēties 11 veidos. Ja viens jau ir izvēlēts, tad otru viņa var izvēlēties vairs tikai 10 veidos, jo viens akmentiņš jau ir paņemts, bet trešo Baiba var izvēlēties vairs tikai 9 veidos, jo tad jau paņemti ir 2 akmentiņi. Tad kopā tie būtu $11\cdot10\cdot9=990$ veidi. Bet tā kā nav svarīgi vai viņa izvelk pirmo zaļu akmentiņu un otro zilu vai arī pirmo zilu un otro zaļu, tad mums visi iespējamie gadījumi jādala ar tik gadījumiem, cik sanāk ja šos trīs akmentiņus sakārtotu visos iespējamos veidos. Un tas ir : 3 akmentiņus var sakārtot 6 veidos, lai tie atšķirtos tikai ar secību. Tātad kopā 3 akmentiņus Baiba var izvēlēties 990:6=165 veidos.

4. uzdevums. Lai ceļš būtu īsākais, pēc iespējas mazāk jācenšas šķērsot zvēru izveidotā "apļa" vidu. Tad īsāko ceļu sastāda zvēru virkne: *Lauva-Ezis-Vāvere-Ūdrs-Zaķis-Alnis-Sesks*.

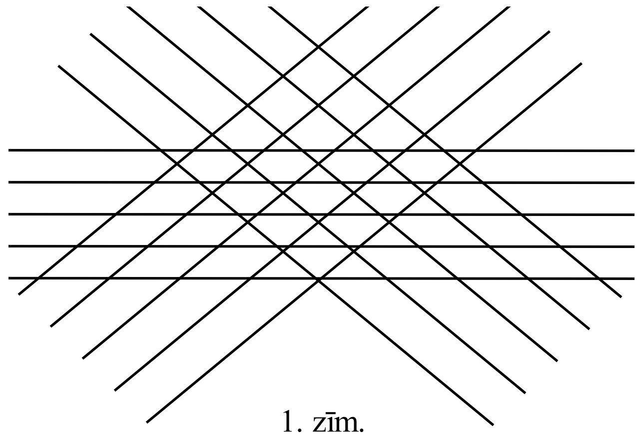
5. uzdevums. Ir nepieciešami vismaz 8 spēļu kauliņi. Pretējā gadījumā nebūs iespējams izveidot kubu. Kā no 8 kauliņiem salikt lielāku, skat. 2. zīm.



2. zīm.

4. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums. Apgalvojums "katra taisne ir paralēla tieši četrām citām taisnēm" izsaka 5 paralēlu taišņu kopu. Tā kā ir pavisam 15 taisnes, tad ir trīs dažādas paralēlu taišņu kopas (skat. 1. zīm.). Trijstūrī nekādas divas malas nav paralēlas, tāpēc viena mala jāņem no vienas paralēlo taišņu kopas (jebkuru no šīm 5 taisnēm), otra – no otras, trešā – no trešās. Tātad pavisam var izveidot 5·5·5=125 dažādus trijstūrus.



1. zīm.

2..uzdevums. Ja Gunis visu darbu var izdarīt 3 dienās, tad vienā dienā viņš var padarīt $\frac{1}{3}$ visa darba. Līdzīgi vienā dienā Dunis padara $\frac{1}{4}$, Zumis - $\frac{1}{5}$, Rausis - $\frac{1}{6}$, Buzis - $\frac{1}{8}$ un Auša - $\frac{1}{10}$ visa darba. Lai noskaidrotu, cik ilgā laikā rūķīši padarīs darbu, strādājot kopā, aprēķināsim, kuru daļu no visa darba tie var padarīt 1 dienā (strādājot kopā). (*Ņemiet vērā:* var saskaitīt padarīto darbu, bet ne dienas!)

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}=\frac{47}{40}$ no visa darba (tātad strādājot kopā, rūķīši vienā dienā var padarīt vairāk nekā visu uzdoto darbu). Lai noteiktu, cik <u>ilgā laikā</u> rūķīši to izdarīs, jāņem darba daļai apgrieztā daļa, tātad rūķīši strādās $\frac{40}{47}$ dienas. Tā kā zinām, ka dienā rūķīši strādā 10 stundas, tad kopā strādājot viņiem vajadzēs $10\cdot\frac{40}{47}=\frac{400}{47}=8\frac{24}{47}$h≈8h30min.

Ņemot vienādu skaitu rūķīšu, darbs tiks padarīts ātrāk, ja strādās čaklākie rūķīši. Ievērosim, ka 4 čaklākie rūķīši, strādājot kopā, vienā dienā var padarīt $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{57}{60}<1$ daļu no visa darba, tātad ar 4 rūķīšiem nepietiek, lai visu padarītu vienā dienā. Vēl jāņem palīgos vismaz viens rūķītis, kurš dienā var izdarīt vismaz $1-\frac{57}{60}=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$ daļu darba (t.i., tāds rūķītis, kurš viens pats strādātu ne vairāk kā 20 dienas). Šoreiz der gan Buzis, gan Auša. Tātad, lai visu darbu padarītu vienā dienā, pie darba jāķeras vismaz pieciem rūķīšiem.

3. uzdevums. Izpildot dalīšanu, iegūstam:

```
1   :  23=0,0434782608695652173913043
100
   80
   69
   110
    92
    180
    161
      190
      184
        60
        46
          40
          23
           7...
```

Katrs nākošais cipars dalījumā atkarīgs tikai no tā atlikuma, kurš iegūts iepriekšējā dalīšanas solī. Ja turpināsiet dalījumu redzēsiet, ka dalījumu atlikumi atkārtojas, tātad atkal parādīsies divdesmit divu ciparu grupa 0434782608695652173913, pēc tam atkal notiks tas pats utt.

Tā kā 2002=22·91, tad izsvītrotais cipars ir perioda pēdējais cipars, t.i., cipars 3. Tātad sākotnējam un iegūtajam skaitlim pirmie 2001 cipari aiz komata sakrīt, bet nākošais cipars sākotnējam skaitlim – 3 – ir lielāks nekā iegūtajam skaitlim – 0. Tāpēc sākotnējais skaitlis ir lielāks.

4. uzdevums. Samazināsim katru karoga joslu par vienu spuldzīti, tagad tā izmēri ir 3×3. Tā kā firmas rīcībā ir 4 dzeltenas, 5 zilas un 6 sarkanas spuldzītes, tad karoga joslas varētu būt šādās krāsās
a) 1 zila, 1 dzeltena, 1 sarkana,
b) 1 zila, 2 sarkanas,
c) 1 dzeltena, 2 sarkanas.
Katrā gadījumā aplūkojot neizmantotās spuldzītes, no kurām tiek izvēlētas atlikušās 3, kā arī ņemot vērā krāsaino joslu secību, iegūstam atbildi: 3448 veidi.

5. uzdevums. Uzvarēs pirmais spēlētājs. Viņam jāspēlē tā: ar katru savu gājienu viņš ēd konfektes tikai no lielākās kaudzītes, turklāt pirmajā gājienā jāapēd ir tieši 22 konfektes, bet katrā nākošajā - tik cik ar savu gājienu ir notiesājis otrais spēlētājs.

5. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Piemēram:
a) $\frac{12354}{67098}$, b) $\frac{12354}{67809}$, c) $\frac{14352}{78096}$, d) $\frac{12345}{67890}$, e) $\frac{14352}{78096}$, f) $\frac{42063}{84567}$, g) $\frac{37408}{91256}$,
h) $\frac{12789}{63045}$.
Iespējami arī citi risinājumi.

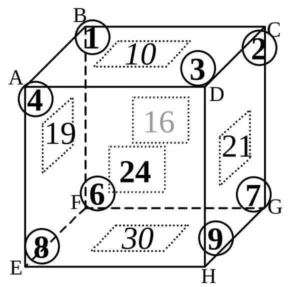
2. No uzdevuma nosacījumiem izriet šādi apgalvojumi:

- Lāsma Strautiņa ir fiziķe un viņai patīk dzeltenā krāsa;
- Kristīne māca informātiku un viņai patīk zaļā krāsa;

- ♦ Sandrai Kalniņai patīk sarkanā krāsa.

3. Tā kā virsotnēs tika ierakstīti dažādi cipari un A+B+C+D=10, tad vienīgā iespēja ir A+B+C+D=1+2+3+4=10 (nav zināms, kurš cipars kurā virsotnē, bet zināms, ka izmantoti tieši šie cipari). Tāpat arī E+F+G+H=30 var iegūt vienā veidā 6+7+8+9=30. Tātad nevienā virsotnē nav ierakstīts cipars 5.

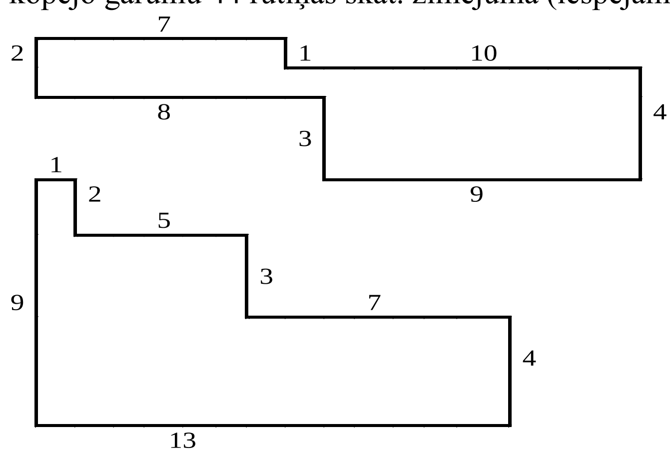
Viens piemērs, kas atbilst uzdevuma nosacījumiem ir parādīts zīmējumā: A=4, B=1, C=2, D=3, E=8, F=6, G=7, H=9.



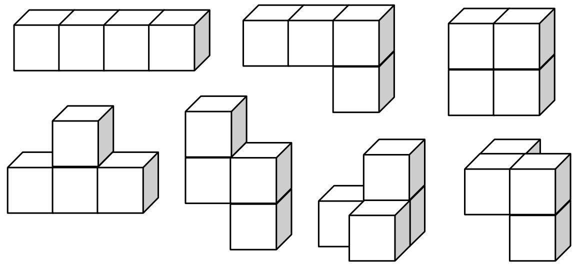
Tas nav vienīgais atrisinājums, jo, piemēram, A+B=C+D=5, un samainot vietām A ar D un B ar C, atkal iegūsim pareizas vienādības. Vispār šajā uzdevumā ir 8 nezināmie un tikai 6 vienādības, un šādos gadījumos parasti nav viens vienīgs atrisinājums.

4. Uzdevumā dotajai lauztajai līnijai vertikālie un horizontālie posmi seko pamīšus; tā kā tā ir slēgta lauzta līnija, tad vertikālo posmu ir tik pat cik horizontālo, pie tam vertikālo posmu kopējais garums, ir pāra skaits rūtiņu (uz augšu pārvietojas tikpat cik uz leju); tāpat arī horizontālo posmu kopējais garums ir pāra skaits rūtiņu (pa labi pārvietojas tik pat cik pa kreisi). Tātad kopējam garumam jābūt pāra skaitli, bet 51 tāds nav.

Piemērus lauztai līnijai ar kopējo garumu 44 rūtiņas skat. zīmējumā (iespējami arī citi risinājumi).



5. Ja figūras, kas atšķiras tikai ar nenokrāsoto lauciņu izvietojumu to ārpusē, uzskata par vienādām, tad var salikt sekojošas figūras



Ja figūras ar atšķirīgu nenokrāsoto lauciņu izvietojumu uzskata par dažādām, tad figūriņu skaits daudzkārt pieaug.