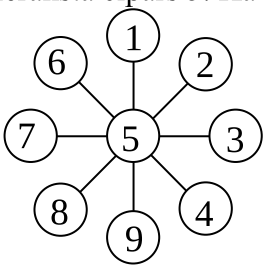
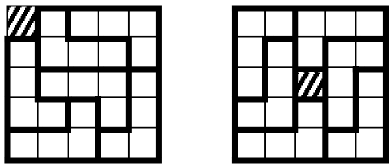
Jauno matemātiķu konkurss 2005./06.m.g.

1. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Pavisam ir 4 taisnas līnijas, kas savieno 3 aplīšus. Uz šīm līnijām ierakstītos skaitļu kopējā summa ir 15·4=60. Šajā summā tiek četras reizes ieskaitīts skaitlis x, kas ierakstīts vidējā aplītī, un vienreiz ieskaitīti pārējie 8 skaitļi. Tas ir $60=1+2+3+4+5+6+7+8+9+3x$ jeb $3x=15$ un $x=5$. Tātad vidējā aplīti jāieraksta cipars 5. Kā var ierakstīt pārējos ciparus, skat., piem., 1.zīm.



1. zīm.

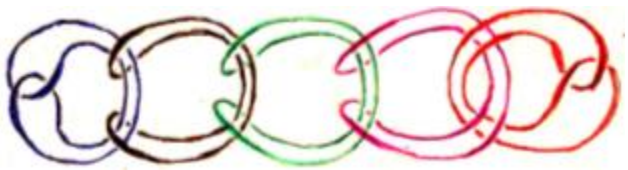

a) b)
2. zīm.

2. Jā, var. Skat., piem., 2.a) un b) zīm.

3. Piem., $\dfrac{2005}{2005+2005\cdot 2005}=\dfrac{1}{2006}$.

4. Apzīmēsim Fibonači virknes skaitļus pēc kārtas ar $F_0=1$, $F_1=1$, $F_2=2$, $F_3=3$, $F_4=5$, $F_5=8$, $F_6=13$ utt. Tad $1=F_1$, $2=F_2=F_0+F_1$, $3=F_3=F_1+F_2$, $4=F_3+F_1$, $5=F_4=F_3+F_2$, $6=F_4+F_1$, $7=F_4+F_2$, $8=F_5=F_4+F_3$, $9=F_5+F_1$, $10=F_5+F_2$, $11=F_5+F_3$, $12=F_5+F_3+F_1$, $13=F_6=F_5+F_4$, $14=F_6+F_1$, $15=F_6+F_2$, $16=F_6+F_3$, $17=F_6+F_3+F_1$, $18=F_6+F_4$, $19=F_6+F_4+F_1$, $20=F_6+F_4+F_2$.

5. Skat. 3. zīm.


3. zīm.

2. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Tā kā baltais kaķēns ēda 3 reizes ātrāk nekā rudais kaķēns, baltais kaķēns apēda 3 reizes vairāk desiņas nekā rudais. Tātad rudais kaķēns apēda 1 daļu, kamēr baltais kaķēns 3 tādas daļas desiņas, jeb rudais kaķēns pavisam apēda $\frac{1}{4}$ jeb 120:4=30 g desiņas un baltais kaķēns apēda $\frac{3}{4}$ jeb 30·3=90 g desiņas. Pieņemot, ka kaķēnu svara izmaiņu ietekmēja tikai apēstās desiņas daudzums, viegli parēķināt, ka baltais kaķēns sākumā bija par 60 g vieglāks, jo viņš apēda par 90 g-30 g=60 g desiņas vairāk.

2. Tādu kvadrātisku tabulu, kurā ierakstīto skaitļu summas pa rindiņām, kolonnām un diagonālēm ir vienādas, sauc par maģisko kvadrātu. 1. zīm. parādīts, kā izveidot maģisko kvadrātu, ja tajā jāieraksta skaitļi no 1 līdz 16; tajā rindiņās, kolonnās un abās diagonālēs ierakstīto skaitļu summas ir 34.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

1. zīm.

5	19	18	8
16	10	11	13
12	14	15	9
17	7	6	20

2. zīm.

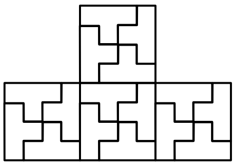
Tā kā tabulā jāieraksta 16 dažādus naturālus skaitļus, pie tam nekādu divu no tiem starpība nav lielāka par 15, tad visi ierakstītie skaitļi ir 16 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi. Palielinot katru tabulā ierakstīto skaitli par 1, vienā rindiņā (kolonnā, diagonālē) ierakstīto skaitļu summa palielinās par 4 (rindiņā (kolonnā, diagonālē) ir 4 skaitļi, katrs no kuriem ir palielināts par 1). Tā kā $50=34+16=34+4\cdot 4$, tad uzdevumā prasīto maģisko kvadrātu varam izveidot, katram 1.zīm kvadrātā ierakstītajam skaitlim pieskaitot 4; iegūstam 2. zīm. attēloto kvadrātu. Pārbaudot redzam, ka tas apmierina visus uzdevuma nosacījumus.

3. Pieņemsim, ka no brīža, kad mazdēls atklāja vectētiņa aizmāršību un sāka braukt pakaļ vectētiņam, līdz brīdim, kad viņš panāca vectētiņu, vecaistēvs paspēja nobraukt x km, savukārt mazdēls brauca 10 reizes ātrāk, tātad nobrauca $10x$ km. Tikšanās brīdī viņi atradās $(18+x)$ km jeb $10x$ km attālumā no mājām.

$$10x=18+x$$
$$9x=18$$
$$x=2\text{ (km)}.$$

Tātad mazdēls nobrauca $10\cdot 2=$**20 km**.

4. Skat., piem. 3.zīm.



3. zīm.

5. Ja Tārpiņš būtu *pie pilna prāta*, tad viņa uzskats, ka viņš ir neprātīgs, būtu aplams (bet visiem viņa uzskatiem jābūt patiesiem). Tātad Tārpiņš nav pie pilna prāta un ir ***neprātīgs***. Tādā gadījumā neviens viņa uzskats nevar būt patiess; arī tas, ka **gan** viņš pats ir neprātīgs (kas tā tiešām ir), **gan** Ķirzaka ir neprātīga. Tātad Ķirzaka ir ***pie pilna prāta***.

3. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Lai skaitlis dalītos ar 99, tam jādalās gan ar 9, gan ar 11. Ar 9 dalās tādi skaitļi, kuru ciparu summa dalās ar 9. Ar 11 dalās tādi skaitļi, kuriem pāra pozīcijās esošo ciparu summas un nepāra pozīcijās esošo ciparu summas starpība dalās ar 11.

Apzīmēsim nezināmos ciparus ar x un y: $\overline{15xy15}$. Tad summai 1+5+x+y+1+5=12+x+y jādalās ar 9, bet izteiksmes (5+y+5)-(1+x+1)=8+y-x vērtībai jādalās ar 11. Tā kā x un y ir cipari, tad 0≤x+y≤18 un -9≤y-x≤9. Tātad jābūt 12+x+y=18 (x+y=6) vai 12+x+y=27 (x+y=15); 8+y-x=0 (x-y=8) vai 8+y-x=11 (y-x=3). Iegūstam četras vienādojumu sistēmas, kuru atrisinājumi ir meklētie cipari x un y.

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=8 \end{cases} \Rightarrow x=7;\ y=-1\ \text{(nav cipars)}$$

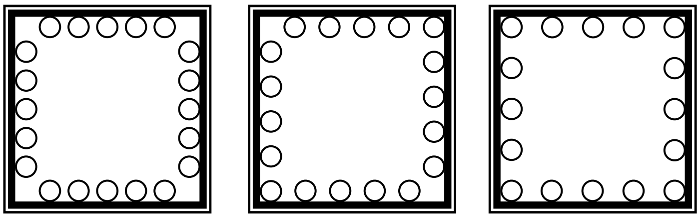
$$\begin{cases} x+y=6 \\ y-x=3 \end{cases} \Rightarrow x=1{,}5;\ y=4{,}5\ \text{(nav cipari)}$$

$$\begin{cases} x+y=15 \\ x-y=8 \end{cases} \Rightarrow x=11{,}5;\ y=3{,}5\ \text{(nav cipari)}$$

$$\begin{cases} x+y=15 \\ y-x=3 \end{cases} \Rightarrow x=6,\ y=9$$

Tātad uzdevuma atbilde ir skaitlis **156915**.

2. 1.a) zīmējumā parādīts, kā visas 20 ogas bija izvietotas sākumā, 1.b) zīmējumā parādīts, kā bija izvietotas 18 ogas un 1.c) zīmējumā parādīts, kā Pifs izbīdīja atlikušās 16 ogas.



a) b) c)

1. zīm.

3. Sākumā sarkanās krizantēmas bija 9 reizes mazāk nekā baltās krizantēmas, apzīmēsim sarkano krizantēmu skaitu ar x, tad balto krizantēmu skaits sākumā bija 9x. Kad daļa balto krizantēmu nokalta, x sarkanās krizantēmas sastādīja 20% no visiem ziediem, tātad pavisam bija palikuši 5x ziedi, no kuriem 4x ir balti. Nokalta 9x-4x=5x baltie ziedi jeb $\frac{5}{9}$ balto krizantēmu vai $\frac{1}{2}$ no visiem ziediem.

4. Ar katru gājienu visu ierakstīto skaitļu summa palielinās par 5; beigās iegūstamajā situācijā visu ierakstīto skaitļu summa ir 25X, kur X- skaitlis, kas ierakstīts katrā rūtiņā, tātad dalās ar 5. Tāpēc iegūt situāciju, kad visi tabulā ierakstītie skaitļi ir vienādi, varēs tikai tādā gadījumā, ja visu sākumā ierakstīto skaitļu summa dalās ar 5. Tāpēc **b)** gadījumā atbilde ir „nē”.

a) Ievērosim, ka 25 mazāko dažādo naturālo skaitļu summa 1+2+...+25=325, tātad sākumā tabulā bija ierakstīti visi skaitļi no 1 līdz 25. Tā kā ar vienu gājienus var izvēlēties jebkurus 5 uzrakstītos skaitļus, nav svarīgi, kā šie skaitļi bija izvietoti tabulā. Pieņemsim, ka tie bija uzrakstīti pēc kārtas (skat. 2.zīm.).

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

2. zīm.

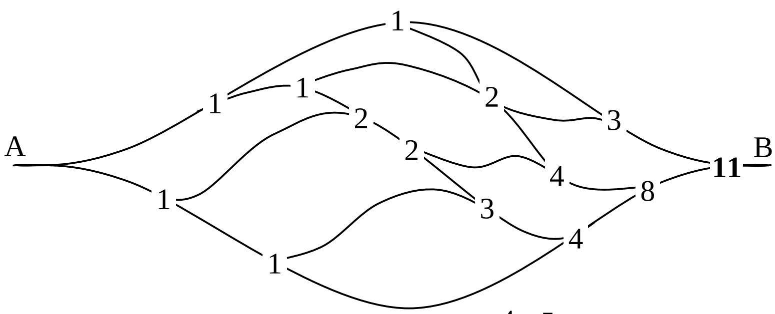
Izpildīsim 4 reizes atļauto gājienu pirmajai kolonnai, 3 reizes - otrajai kolonnai, 2 reizes - trešajai kolonnai un 1 reizi ceturtajai kolonnai. Iegūsim 3. zīm. attēloto situāciju.

5	5	5	5	5
10	10	10	10	10
15	15	15	15	15
20	20	20	20	20
25	25	25	25	25

3. zīm.

20 reizes izpildot gājienu pirmajai rindiņai, 15 reizes – otrajai rindiņai, 10 reizes – trešajai rindiņai un 5 reizes – ceturtajai rindiņai, visās rūtiņās iegūsim skaitli 25.

5. 4. zīmējumā katrā krustpunktā ierakstīts, cik dažādos veidos tajā var nonākt. Tātad no A līdz B var aiziet 11 dažādos veidos.



4. zīm.

4. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Vienādojot saucējus, iegūstam $\frac{12a+6b+4c+3d}{12}$. Ja a samazinātu par viens, pārējos mainīgos atstājot nemainīgus, skaitītāja izteiksme samazinātos par 12. Savukārt, ja kādu citu mainīgo palielinātu par 1, pārējos atstājot nemainīgus, skaitītāja izteiksme palielinātos tikai par 6. Tātad, lai skaitītāja izteiksme, un līdz ar to visas daļas vērtība būtu vislielākā, mainīgiem ar lielākajiem koeficientiem jāpiešķir lielākās vērtības: a=9, b=8, c=7, d=6. Tātad vislielākā iespējamā izteiksmes vērtība ir $\frac{12\cdot 9+6\cdot 8+4\cdot 7+3\cdot 6}{12}=16\frac{5}{6}$.

Lai iegūtu vismazāko izteiksmes vērtību, mainīgajiem ar lielākajiem koeficientiem jāpiešķir pēc iespējas mazākas vērtības, tātad a=1, b=2, c=3, d=4 un vismazākā izteiksmes vērtība ir $\frac{12\cdot 1+6\cdot 2+4\cdot 3+3\cdot 4}{12}=4$.

2. Līdz 2006.gadam lielākā iespējamā gada ciparu summa ir 1+9+9+9=28,tātad Antonam nav vairāk par 28 gadiem. Lai atrisinātu šo uzdevumu, jāņem vērā, vai Antonam 2006.gadā dzimšanas diena jau ir bijusi vai vēl tikai gaidāma.

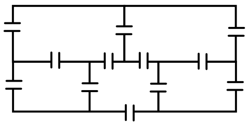
Sastādīsim sekojošu tabulu, kurā apkoposim gadskaitļus, gada ciparu summu un Antona vecumu, ja viņš dzimis šajā gadā.

Dzimšanas gads	gada ciparu summa	Antona vecums gados	
		ja dzimšanas diena šogad jau bijusi	ja dzimšanas diena šogad vēl nav bijusi
2006.	8	0	--
2005.	7	1	0
2004.	6	2	1
2003.	5	3	2
2002.	**4**	**4**	3
2001.	3	5	4
2000.	2	6	5
1999.	28	7	6
1998.	27	8	7
1997.	26	9	8
1996.	25	10	9
1995.	24	11	10
1994.	23	12	11
1993.	22	13	12
1992.	21	14	13
1991.	20	15	14
1990.	19	16	15
1989.	27	17	16
1988.	26	18	17
1987.	25	19	18
1986.	24	20	19
1985.	23	21	20
1984.	**22**	**22**	21
1983.	21	23	22
1982.	20	24	23
1981.	19	25	24

1980.	18	26	25
1979.	**26**	27	**26**
1978.	25	28	27

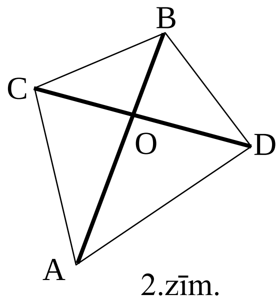
No tabulas redzams, ka Antons var būt dzimis 1979.gadā (un šogad dzimšanas diena vēl nav bijusi), 1984. gadā vai 2002.gadā (un šogad jau nosvinējis kārtējo dzimšanas dienu).

3. Ja dzīvoklī būtu tikai 4 istabas, tad tajā būtu ne vairāk kā (4·3):2+4=10 durvis (no katras istabas vienas durvis uz katru citu un no katras istabas 1 durvis uz ārpusi). Tātad dzīvoklī ir vismaz 5 istabas. Piemēru ar 5 istabām skat. 1. zīm.


1. zīm.

4. Tā kā katrs iemītnieks nosūtīja vai nu 3, vai 6=3·2, vai 12=3·4 apsveikumus, tad visu nosūtīto apsveikumu skaitam jādalās ar 3. Taču saņemto apsveikumu kopskaits 47·5=235 ar 3 nedalās. Tātad kāds apsveikums savu mērķi nav sasniedzis.

5. Pieņemsim, ka ir divi ceļi AB un CD, kas krustojas punktā O. Pieņemsim, ciemam A tuvākais ciems ir B un ciemam C tuvākais un ciems D. Tad spēkā sakarības AB<AC un AB<AD, CD<AC un CD<CB. (skat. 2. zīm.)



2.zīm.

Tad no trijstūra nevienādības ΔCBO seko CB<CO+OB **(1)**;
no ΔADO seko AD<AO+OD **(2)**. Saskaitot nevienādības (1) un (2), iegūstam

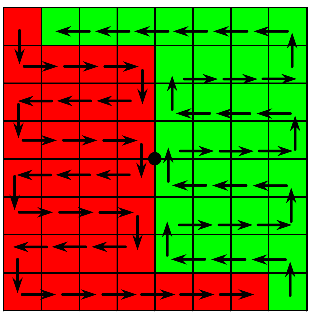
AD+CB<AB+CD.

Taču AB<AD un CD<CB, tātad AB+CD<AD+CB. Iegūstam pretrunu AD+CB<AD+CB, tātad sākotnējais pieņēmums bija aplams – nav tādu divu ceļu, kas krustojas ārpus ciemiem.

5. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Tā kā 9·10·11=990<1000 un 21·22·23=10626>9999, tad mazākais no meklējamajiem skaitļiem ir ne mazāks kā 10 un ne lielāks kā 20. Pārbaudot visas iespējas, atrod, ka uzdevuma prasības apmierina skaitļi **17**, **18** un **19** (17+18+19=54 un 17·18·19=5814).

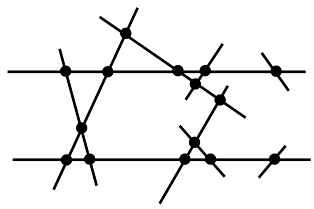
2. Jā, var. Skat., piem., 1.zīm.


1. zīm.

3. Vislielākā vērtība, ko var iegūt, ir **78,2**; to var iegūt, piem., sekojošā veidā (maksimālo vērtību var iegūt arī vēl citos veidos):

$$\mathbf{7+9\cdot 8+6:3-4:5-1\cdot 2=78{,}2}$$

4. a) Skat., piem. 2.zīm.



2. zīm.

b) Pieņemsim, ka izdevies uzzīmēt 5 nogriežņus, uz katra no kuriem ir dažāds skaits krustpunktu ar citiem nogriežņiem. Viens no dotajiem nogriežņiem var krustoties ar augstākais 4 citiem nogriežņiem, tāpēc uz viena nogriežņa var būt ne vairāk kā 4 krustpunkti. Tātad krustpunktu skaits uz dotajiem nogriežņiem ir 4, 3, 2, 1, 0. Taču tādā gadījumā jābūt **gan** nogrieznim, kas nekrustojas ne ar vienu no pārējiem 4, **gan** nogrieznim, kas krustojas ar visiem četriem pārējiem nogriežņiem. Bet tas vienlaicīgi nav iespējams, tātad uzdevumā aprakstītā situācija nav iespējama.

5. Katrā parlamentāriešu grupā XYZ ietilps 3 pāri: XY, XZ, YZ, pie tam katrs pāris drīkst darboties tikai vienā grupā. Pavisam no 6 parlamentāriešiem var izveidot (6·5):2=15 dažādus pārus. Tā kā katrā grupā ietilpst tieši 3 pāri un katrs pāris darbojas tikai vienā grupā, tad grupu nav vairāk par 15:3=5 (bet tādā gadījumā visiem pāriem ir jādarbojas kādā grupā). Katrs parlamentārietis X ietilpst 5 pāros, vienā grupā ir vai nu 2 vai 0 pāri, kuros ietilpst parlamentārietis X, pie tam dažādās grupās ietilpstošie pāri ir atšķirīgi. Tātad visās darba grupās kopumā ir sastopami ne vairāk kā 4 pāri ar parlamentārieti X un vismaz viens pāris nedarbojas nevienā darba grupā. Tāpēc darba grupu skaits **ir mazāks** nekā 5.

4 komisijas var izveidot, piemēram, šādi:

1) varde, pūce, dundurs;
2) varde, ezis, stirna;
3) pūce, ezis, lācis;
4)dundurs, stirna, lācis