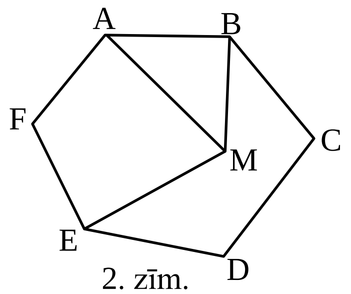
Jauno matemātiķu konkurss 2007./2008. m.g.

1. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. $\left(2007\cdot 9999+27\right):9=\frac{2007\cdot 9999+27}{9}=\frac{2007\cdot 9999}{9}+\frac{27}{9}=$

$=2007\cdot 1111+3=2229777+3=2229780$

2. Skat., piem., 2. zīm. trijstūris ABM, četrstūris AMEF, piecstūris BCDEM un sešstūris ABCDEF.



2. zīm.

3. Nē, nevar.

Visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir $\frac{(1+16)\cdot 16}{2}=136$. Saskaitot visu rindiņu summas arī iegūsim 136 – katrs tabulas skaitlis šajās summās ir ieskaitīts tieši vienu reizi. Tāpat arī visu kolonnu summu summa ir 136. Tātad apskatāmo 8 skaitļu (rindiņu un kolonnu summu) summa ir 136+136=272. Pieņemsim, ka tie ir pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Mazāko no tiem apzīmēsim ar n, tad lielākais no tiem ir n+7 un visu astoņu skaitļu summa ir $\left(\left(n+n+7\right)\cdot 8\right):2=(2n+7)\cdot 4=272$. Bet tad $n=\left(68-7\right):2=30{,}5$ - nav naturāls skaitlis; iegūta pretruna, tātad pieņēmums ir aplams un uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams.

4. Šāds jautājums ir, piemēram: „Vai Pūciņš ir melis?”.

Tabulā apkoposim, kādas atbildes uz šo jautājumu var sniegt katrs no rūķiem.

	Samtiņš	Pūciņš
ja Samtiņš ir melis	*melo* „jā”	*saka patiesību* „nē”
ja Pūciņš ir melis	*saka patiesību* „jā”	*melo* „nē”

No tabulas redzam, ka, ja šo jautājumu uzdod Pūciņam, viņš jebkurā gadījumā saka „nē”, bet ja mēs vēršamies pie Samtiņa, viņa atbildes vienmēr ir „jā”. Tātad, ja uz savu jautājumu saņemam atbildi „nē”, tad mēs sarunājamies ar Pūciņu, bet ja saņemam atbildi „jā”, tad sarunu biedrs ir Samtiņš, bet Pūciņš ir otrs rūķis.

Ievērojiet! Ar šī jautājuma palīdzību mēs varam tikai noskaidrot, kurš no abiem rūķiem ir Pūciņš, bet neko nevaram pateikt, vai viņš ir melis vai nav!

5. Atbilde: 21.

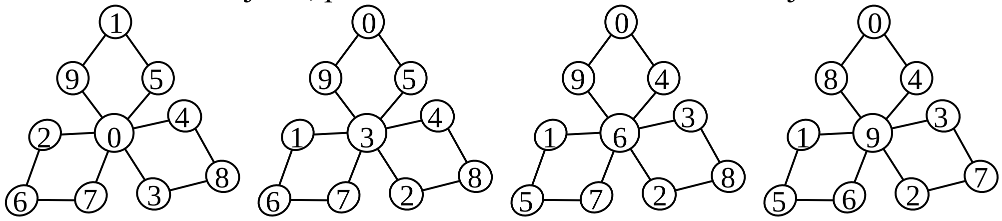
Kamēr skaitlis „nonāca” līdz B, tas tika tieši sešas reizes saukts kaimiņiem pa kreisi (jo skaitļa „kustība” var notikt **tikai** virzienā pa kreisi vai uz priekšu), tātad tam 6 reizes tika pieskaitīts „2”, un tieši sešas reizes saukts kaimiņiem uz priekšu, tātad 6 reizes pieskaitīts „1”. Tātad visi skaitļi, ko pačūkstēs skolēnam B, būs $3+6\cdot 2+6\cdot 1=21$.

2. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Apzīmēsim viena četrstūra virsotnēs ierakstīto skaitļu summu ar S; tad visu trīs četrstūru virsotnēs ierakstīto skaitļu kopējā summa ir 3S. Šajā summā vienu reizi ieskaitīti visos aplīšos ierakstītie skaitļi un vēl divas reizes ieskaitīts vidējā aplītī ierakstītais skaitlis (apzīmēsim to ar a); pavisam a tiek ieskaitīts trīs reizes, jo tas pieder katram apskatītajam četrstūrim. Tātad

3S=0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+2a=45+2a

Skaitlis 3S dalās ar 3, 45 arī dalās ar 3, tātad arī skaitlim $2a$ jādalās ar 3, t.i., a dalās ar 3. Tā kā a ir cipars, tad a var būt 0, 3, 6 vai 9. Tad S būs attiecīgi 15, 17, 19, 21. Katram no šiem gadījumiem eksistē atrisinājums, pie tam vairāki. Piemērus skat. zīmējumos.



2. Pieņemsim, ka 1 kg ābolu cena ir x santīmi. Tad par 2 kg ābolu 1.pārdevējam būs jāsamaksā $2x - 0{,}4 \cdot 2x = 1{,}2x$ santīmus. Savukārt 2. pārdevējam par 2 kg ābolu būs jāsamaksā $x + 20$ santīmi.

Ja $1{,}2x > x + 20$, tad izdevīgāk iepirkties pie 2.pārdevēja; ja $1{,}2x < x + 20$ - pie 1.pārdevēja; ja $1{,}2x = x + 20$, tad pie abiem pārdevējiem 2 kg ābolu pirkums maksās vienādi. Atrisināsim šīs nevienādības:

$$1{,}2x > x + 20$$
$$1{,}2x - x > 20$$
$$0{,}2x > 20$$
$$x > 100$$

Tātad 2kg ābolu pirkt pie 2.pārdevēja ir izdevīgāk, ja 1 kg ābolu cena ir vairāk nekā 100 santīmu jeb 1 Ls; pie 1.pārdevēja izdevīgāk, ja cena ir mazāk nekā 1 Ls, un ja 1 kg ābolu cena ir 1 Ls, 2 kg ābolu pirkums pie abiem pārdevējiem izmaksās vienādi 1 Ls 20 sant.

3. Nē, ne obligāti. Lai no trīs nogriežņiem varētu izveidot trijstūri, garākajam nogrieznim jābūt īsākam nekā abu pārējo nogriežņu garumu summa. Taču, piemēram, ja doto nogriežņu garumi ir 1 cm, 2 cm, 4 cm, 7 cm, 12 cm, 20 cm, 33 cm, starp tiem nevar atrast trīs tādus, ka garākā nogriežņa garums būtu mazāks nekā abu pārējo nogriežņu garumu summa; tātad no tiem nevar izveidot trijstūri.

4. Uzdevuma prasības apmierina, piemēram, 100, 2 un 98 skaitļi '1':

$$100 \cdot 2 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{98\text{ reizes}} = 200 = 100 + 2 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{98\text{ reizes}}.$$

5. Atbilde: Andrim ir sarkana cepure, Dāvim – balta cepure, Edžum – balta cepure,

Apskatīsim gadījumus, kādas cepures varēja redzēt Andris, kad viņam atsēja acis:

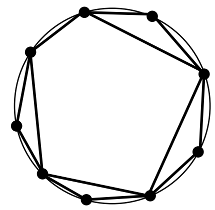
1) 2 sarkanas cepures;
2) 1 sarkanu un 1 baltu cepuri;
3) 2 baltas cepures.

1) un 2) gadījumā Andris nevar viennozīmīgi pateikt, kādā krāsā cepure, jo starp trim tām cepurēm, ko Andris neredz (1 cepure ir Andra galvā un 2 noliktas malā), vēl ir vismaz 1 sarkana un vismaz 1 balta cepure; tātad jebkura no tām varētu būt Andra galvā. Bet 3) gadījumā Andris redz, ka abas baltās cepures ir draugu galvās, tāpēc viņam pašam galvā (un arī abas malā noliktās) var būt tikai sarkana cepure. Dāvis, dzirdot, ka Andris ir pārliecināts par savas cepures krāsu, var secināt, ka tas ir iespējams tikai tad, ja viņam un Edžum abiem ir baltas cepures. Tieši tāpat arī Edžus var izsecināt, ka viņam galvā ir balta cepure.

3. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Piemēram, $8\cdot((7+6)\cdot5\cdot4+3-2-1-9)=2008$.

2. Skat., piem., zīm.



3. Pieņemsim, ka visos 17 maisiņos ir pa 4 āboliem; tad pavisam kopā būtu 17·4=68 āboli. Tātad vēl 113-68=45 āboli jāizvieto pa dažiem maisiņiem vienādā skaitā. Tā kā 45=1·45=3·15=5·9, tad pavisam iegūstam 6 dažādas x vērtības:

1) 1 maisiņā pieliekot visus 45 ābolus, iegūstam 16 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 1 maisiņu ar 49 āboliem (x=49);

2) 3 maisiņos pieliekot pa 15 āboliem, iegūstam 14 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 3 maisiņu ar 19 āboliem katrā (x=19);

3) 15 maisiņos pieliekot pa 3 āboliem, iegūstam 2 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 15 maisiņu ar 7 āboliem katrā (x=7);

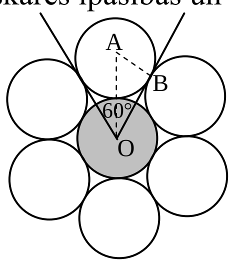
4) 5 maisiņos pieliekot pa 9 āboliem, iegūstam 12 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 5 maisiņu ar 13 āboliem katrā (x=13);

5) 9 maisiņos pieliekot pa 5 āboliem, iegūstam 8 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 9 maisiņu ar 9 āboliem katrā (x=19).

Nevar 45 maisiņos pielikt pa 1 ābolam katrā, jo kopējais maisiņu skaits ir 17<45. Citos veidos skaitli 45 nevar izteikt kā naturālu skaitļu reizinājumu, tātad citu iespējamo x vērtību nav.

4. Prasītā veidā var novietot ne vairāk kā 6 apļus (skat. zīm.). Ievērosim, ka viens zaļais aplis „aizņem” 60° lielu sektoru (šajā sektorā nevar ietilpt neviens cits zaļais aplis, kas arī pieskaras sarkanajam aplim). Tā kā pilns aplis ir 360°, tad to var sadalīt 360°:60°=6 šādos sektoros, katrā no kuriem var ievietot ne vairāk kā vienu zaļo apli.

Piezīme. Pilnam atrisinājumam nepieciešams arī pierādīt, ka apskatāmā sektora lielums ir 60°. Tas ir viegli izdarāms, izmantojot pieskares īpašības un sakarības taisnleņķa trijstūrī OAB.



5. Ievērosim, ka uzraksti uz 2. un 3. istabu durvīm abi reizē ir vai nu patiesi, vai aplami (tie abi izsaka vienu un to pašu apgalvojumu). Taču tie nevar būt aplami: ja uzraksts uz 3.istabas durvīm ir aplams, tad īstenībā 3.istabā tīģera nav, tāpēc tajā istabā jābūt princesei. Bet zināms, ka uz tās istabas durvīm, kur atrodas princese, uzraksts ir patiess, tāpēc 3. istabā princese neatrodas. Tā kā katrā istabā jābūt vai nu tīģerim, vai princesei, esam ieguvuši pretrunu (jo 3.istabā nevar būt ne tīģeris, ne princese), tāpēc nevar uzraksts uz 3.istabas (un līdz ar to arī uz 2.istabas) durvīm nevar būt aplams, tātad tam jābūt patiesam. Tā kā vismaz viens uzraksts ir aplams, tad uzraksts uz 1.istabas durvīm ir aplams. Tātad 3.istabā atrodas tīģeris (tā rakstīts uz abām „patiesajām” plāksnītēm), 2.istabā atrodas princese (uzraksts uz 2.istabas durvīm ir patiess, savukārt uzraksts uz 1.istabas durvīm, kas apgalvo, ka tīģeris ir 2.istabā, ir aplams, tāpēc tīģeris nav 2. istabā), un acīmredzot 1.istabā ir tīģeris, jo tikai vienā istabā ir princese, bet divās pārējās – pa tīģerim.

4. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Uzdevumam ir divi atrisinājumi.

$$\begin{array}{r} 271\\ 322\\ \hline 542\\ 542\\ 813\\ \hline 87262 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 281\\ 332\\ \hline 562\\ 843\\ 843\\ \hline 93292 \end{array}$$

Apzīmēsim dažus meklējamos ciparus kā parādīts zīmējumā.

$$\begin{array}{r} 2AB\\ 3CD\\ \hline 5{*}{*}\\ {*}4{*}\\ {*}{*}3\\ \hline {*}{*}{*}{*}{*} \end{array}$$

Tā kā trīsciparu skaitli $\overline{2AB}$ reizinot ar viencipara skaitli D jāiegūst trīsciparu skaitlis, kura pirmais cipars ir 5, tad **D=2**; citos gadījumos, ja D=1, tad $\overline{2AB}\cdot 1 \le 299\cdot 1 < 300$, un ja D≥3, tad $\overline{2AB}\cdot 3 \ge 200\cdot 3 \ge 600$.

Tā kā reizinājums $3\cdot\overline{2AB}$ beidzas ar ciparu 3, tad **B=1** (skaitli 3 reizinot ar viencipara skaitli, reizinājuma pēdējais cipars ir 3 tikai gadījumā 3·1=3).

Lai reizinājums $\overline{2A1}\cdot 2$ būtu vismaz 500, jābūt **A≥5**; ja A≤4, tad $\overline{2A1}\cdot 2 \le 241\cdot 2 < 500$.

Savukārt, lai reizinājums $C\cdot\overline{2A1}$ būtu trīsciparu skaitlis, jābūt **C<4**; pretējā gadījumā, ja C≥4, tad $C\cdot\overline{2A1} \ge 4\cdot 251 > 1000$.

Tā kā B=1, tad reizinājums C·B ir viencipara skaitlis un šķiras pārnesumi nerodas, tāpēc reizinājuma C·A pēdējam ciparam jābūt 4. Ievērojot, ka A≥5 un C<4, iegūstam divas iespējas: 2·7=14 vai 3·8=24. Pārbaudot redzam, ka abas iespējas apmierina uzdevuma nosacījumus.

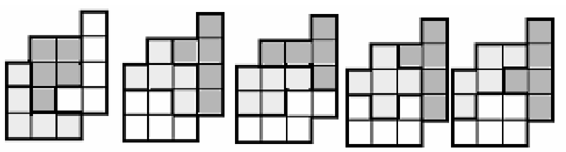
Tā kā tika izanalizētas visas iespējas, citu atrisinājumu nav.

2. Ar virknēm HCIJFKF BCDCEFG ir aizšifrēti vārdi **PAREIZI MALACIS**.

Ievērojam, ka tikai virknē DCHGC un tikai vārdā **LAPSA** sastopami 2 vienādi burti; tātad vārdam **LAPSA** atbilst virkne DCHGC, no kurienes iegūstam, ka burtam **A** atbilst C; **L** – D; **P** – H; **S** – G. Tālāk jau viegli iegūt, ka vārdam **MAIZE** atbilst virkne BCFKJ un vārdam **CIRKS** atbilst virkne EFIAG. Iegūstam šādu šifra tabulu:

burts	**A**	**C**	**E**	**I**	**K**	**L**	**M**	**P**	**R**	**S**	**Z**
šifrs	C	E	J	F	A	D	B	H	I	G	K

3. Skat., piem., 4. zīm.



4. zīm.

4. Klasē nav neviena teicamnieka; 2 skolēni apmeklē peldēšanas un karatē treniņus.

Tā kā 6 skolēni ir nesekmīgi matemātikā, tad sekmīgo (t.sk. arī teicamnieku) skolēnu skaits **nepārsniedz** 25-6=19 (tas varbūt mazāks, jo nav zināms, vai klasē nav tādu skolēnu, kas ir sekmīgi matemātikā, bet nesekmīgi citā mācību priekšmetā); tātad arī „sportistu” skaits šajā klasē nav lielāks par 19.

Pieņemsim, ka katram sporta „pulciņa” dalībniekam ir izsniegta dalībnieka kartīte. Tad pavisam šīs klases skolēniem ir izsniegtas 17+13+8=38 kartītes, pie tam vienam skolēnam var būt ne vairāk kā 2 kartītes. Tātad „sportistu” skaits šajā klasē ir **vismaz** 38:2=19 (citādi kādam skolēnam būtu vismaz 3 kartītes – pretruna).

Tā kā „sportistu” skaits vienlaicīgi ir vismaz 19 un nepārsniedz 19, tad ar sportu nodarbojas tieši 19 skolēni – visi sekmīgie skolēni. Līdz ar to klasē nav neviena teicamnieka. Pie tam katrs skolēns nodarbojas **tieši** ar diviem sporta veidiem.

Tā kā 17 no 19 skolēniem nodarbojas ar riteņbraukšanu, tad pārējie 19-17=2 skolēni nodarbojas ar diviem citiem sporta veidiem, t.i., ar peldēšanu un karatē.

Tāpat nav grūti noskaidrot, ka 8-2=6 skolēni nodarbojas ar karatē un riteņbraukšanu, bet 11 skolēni – ar riteņbraukšanu un peldēšanu.

5. Pēteris var panākt savu uzvaru.

Uz katru Jāņa gājienu Pēteris atbild ar simetrisku gājienu, t.i., ja Jānis no 1.kaudzītes paņem 1 konfekti un 2.kaudzītes 3 konfektes, tad Pēteris no 1.kaudzītes paņem 3 konfektes un no 2.kaudzītes 1 konfekti. Tādējādi pēc viena Jāņa un viena Pētera gājiena no abām kaudzītēm ir paņemtas pa 4 konfektēm. Tā kā sākumā abās kaudzītēs bija vienāds skaits konfekšu, tad pēc Pētera gājiena abās kaudzītēs atkal būs vienāds skaits konfekšu. Atkārtojot šādus gājienus 2 reizes, no abām kaudzītēm būs paņemts pa 8 konfektēm, tātad katrā kaudzītē būs atlicis pa 2 konfektēm un tātad nākamais spēlētājs, t.i. Jānis, vairs nevar izdarīt gājienu, tāpēc viņš zaudē un līdz ar to Pēteris uzvar.

5. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. a) Piem., **56-(24:2)+6=50**

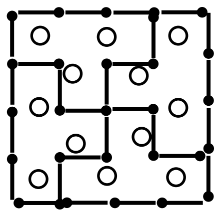
b) Piem., **(56-24):2+6=22**

c) Piem., **(56-24):(2+6)=4**

2. Pieņemsim, ka Ruta samaksāja x divdesmitsantīmu monētas; tātad viena grāmata maksā 20·x santīmus. Tā kā Baiba maksā ar desmitsantīmu monētām, tad viņa izdeva 2 reizes vairāk monētu nekā Ruta, t.i., 2x monētas. Savukārt Ansis izdeva 20:5=4 reizes vairāk monētu nekā Ruta jeb 4x monētas un Jānis izdeva 20:2=10 reizes vairāk monētu nekā Ruta jeb 10x monētas.

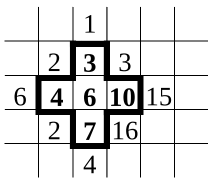
Tāpēc x+2x+4x+10x=51 jeb 17x=51 un x=3. Tātad viena grāmata maksā 20·3=**60** santīmi.

3. Skat., piem., 1. zīm.

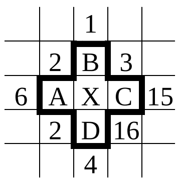


1. zīm.

4. Atbilde: skat. 2. zīm.



2. zīm.



3. zīm.

Risinājums. Apzīmēsim nezināmos skaitļus ar burtiem kā parādīts 3. zīm. Tad ir spēkā šādas vienādības:

X=(A+B+C+D):4 jeb 4X=A+B+C+D

4A=2+6+2+X=10+X

4B=2+1+3+X=6+X

4C=3+15+16+X=34+X

4D=16+4+2+X=22+X

Saskaitot pēdējās četras vienādības, iegūstam

$4(A+B+C+D)=72+4X$ jeb $4\cdot 4X-4X=72$, t.i., $12X=72$ un $X=6$.

Pēc tam viegli iegūt, ka $A=(10+6):4=4$; $B=(6+6):4=3$; $C=(34+6):4=10$; $D=(22+6):4=7$.

5. Ja pasākumā ir vismaz viens cilvēks, kas pazīst vismaz 6 citus, tad tas ir meklētais cilvēks. Ja tāda cilvēka nav, tad **katrs** pasākuma dalībnieks pazīst **ne vairāk** kā 5 citus cilvēkus, tātad nepazīst **vismaz** 13 citus cilvēkus. Izvēlēsimies divus cilvēkus A un B, kas viens otru nepazīst. Bez tam katrs no viņiem nepazīst vēl vismaz 12 citus cilvēkus. Tā kā $2+12+12=26>19$, tad ir vismaz $26-19=7$ cilvēki, ko nepazīst gan A, gan B. Tā kā katrs pazīst ne vairāk kā 5 citus cilvēkus, tad starp šiem 7 cilvēkiem (kas nav pazīstami ne ar A, ne ar B) var atrast tādus divus cilvēkus C un D, kas nav pazīstami savā starpā. Tad A, B, C un D ir meklētais „četrinieks”.