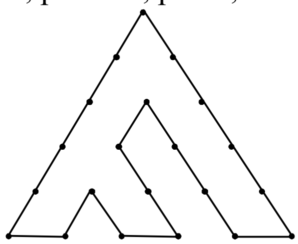
Jauno matemātiķu konkurss 2008./2009. m.g.

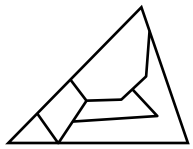
1. kārtas uzdevumu atbildes un īsi atrisinājumi

1. Uzdevumam ir tikai viens atrisinājums:

$$\begin{array}{r} 4\,9\,7\,3 \\ \cdot \quad\quad 8 \\ \hline 3\,9\,7\,8\,4 \end{array}$$

2. Tā kā jāiegūst slēgta lauzta līnija, kas iet caur katru doto punktu un pati sevi nekrusto, tad katrā punktā „satiekas” tieši 2 nogrieznīši (par *nogrieznīti* sauksim nogriezni, kas savieno divus secīgus punktus uz lauztās līnijas; nogrieznīša garums var būt 1 vai arī lielāks nekā 1; lauztās līnijas posmi var sastāvēt arī no vairākiem *nogrieznīšiem*). Tātad pavisam meklējamā lauztā līnija sastāv no $\frac{21 \cdot 2}{2} = 21$ nogrieznīšiem. Katra nogrieznīša mazākais garums ir 1 vienība, tātad lauztās līnijas **mazākais iespējamais** garums ir 21·1=21 vienība. Tas, ka 21 vienību garu lauzto līniju tiešām var iegūt, parādīts, piem., 2. zīm.


2. zīm.


3. zīm.

3. Atbilde: nē, nav iespējams.

Risinājums. Ievērosim, ka, ja sākotnējais skaitlis dalās ar 3, tad izpildot atļautās darbības, rezultāts arī **dalīsies ar 3**: a) acīmredzami; b) 6 dalās ar 3, un divus skaitļu, kas dalās ar 3, starpība arī dalās ar 3; c) ja skaitlis dalās ar 3, tā ciparu summa arī dalās ar 3, un divu skaitļu, kas dalās ar 3, summa arī dalās ar 3.

Tā kā 33 dalās ar 3, tad minēto darbību izpildes rezultātā varēs iegūt tikai skaitļus, kas dalās ar 3, bet 2008 ar 3 nedalās.

4. Jā, var. Skat., piem. 3. zīm.

5. Ja Pūks kā pirmo izvēlēsies trauciņu ar 30 g medus, tad Trusītis var izvēlēties trauciņu ar 70 g medus. Kamēr Trusītis vēl mieloties no 70 g trauciņa, Pūks jau varēs izvēlēties nākamos trauciņus. Taču: ja Pūks izvēlēsies 110 g trauku, tad, kamēr vāl Pūks mielosies ar to, Trusītis būs pieveicis 70 g trauku, varēs paņemt un izēst arī 50 g trauku (un Pūks joprojām vēl ēdīs 110 g trauku) un paspēs paņemt vēl arī 90 g trauku; tātad kopā Trusītis dabūs 210 g medus. Savukārt, ja Pūks kā otro izvēlēsies 50 g vai 90 g trauku, Trusītis ar savu 70 g trauciņu būs ticis galā ātrāk nekā Pūks izēdīs abus paņemtos traukus, un kā nākamo trauciņu Trusītis izvēlēsies 110 g trauku, līdz ar to kopā iegūdams vismaz 180 g medus, kas ir vairāk nekā puse visa medus daudzuma.

Ja Pūks kā pirmo izvēlēsies 50 g trauciņu, tad Trusītis vispirms izēdīs 30 g trauciņu, tad 70 g trauciņu, un Pūks varēs dabūt austākais vēl tikai 110 g, līdz ar to kopā tikai 160 g medus, un Trusītis atkal būs apēdis vairāk.

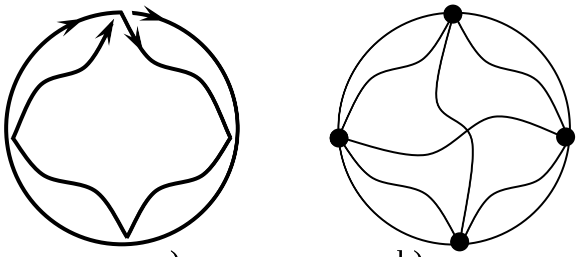
Ja Pūks kā pirmo izvēlēsies 90 g trauku, tad, kamēr vēl Pūks našķosies no šī trauka, Trusītis paspēs izēst 30 g trauku, 50 g trauku un vēl paņemt 110 g trauku, līdz ar to kopā notiesājot vairāk nekā pusi visa medus.

Ja Pūks kā pirmo izvēlēsies 110 g trauku, tad Trusītis paspēs izēst 30 g un 70 g traukus, un paņemt vēl arī 90 g trauku, līdz ar to atkal iegūstot vairāk nekā pusi visa medus.

Savukārt ja Pūks kā pirmo izvēlēsies 70 g trauku, viņš varēs iegūt vairāk nekā pusi visa medus – vismaz 180 g. Atstājam lasītājam pašam izanalizēt visus gadījumus un pašam par to pārliecināties.

2. kārtas uzdevumu atbildes un īsi atrisinājumi

1. a) var; skat., piem., 2. zīm.



a) b)

2. zīm.

b) nevar. Lai kādu figūru varētu uzzīmēt, neatraujot zīmuli no papīra un nevienu līniju nenovelkot divas reizes, figūrā nedrīkst būt vairāk nekā 2 tādi punkti, kuros „satiekas" nepāra skaits līniju. Tik tiešām, ja zīmējot figūru mēs nonākam kādā punktā pa vienu līniju, tad jābūt citai līnijai, pa kuru iziet ārā. Ja šai punktā atgriežamies vēl kādu reizi, atkal jābūt vēl vienai līnijai, pa kuru aiziet prom. Vienīgie izņēmumi var būt sākuma un beigu punkti (nepārtrauktam zīmējumam ir viens sākuma un viens beigu punkts)– ja tie nesakrīt, tad katrā no tiem „jāsatiekas" nepāra skaitam līniju. Savukārt b) zīmējumā attēlotajā figūrā ir četri punkti, kuros „satiekas" pa 5 līnijām. Tātad to nevar uzzīmēt atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.

2. Piemēram,

a) $8:8+(8-8)\cdot 8=1$;

b) $(8+8):8+8-8=2$;

c) $(8+8):8+8:8=3$;

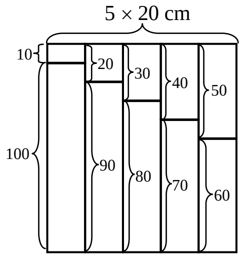
d) $(8+8+8+8):8=4$;

e) $8-(8+8+8):8=5$.

3. Pārveidojot doto vienādību, iegūstam $4a+5b=40$. Tā kā a un b ir naturāli skaitļi, tātad pozitīvi skaitļi, tad jābūt $4a<40$ jeb $a<10$ un $5b<40$ jeb $b<8$. Pārbaudot septiņas iespējamās b vērtības (1; 2; 3; 4; 5; 6; 7), redzam, ka doto vienādību apmierina tikai skaitļi ***a*=5** un ***b*=4.**

b	**5*b***	**40-5*b***	**Vai *a*=(40-5*b*):4 ir naturāls skaitlis?**
1	5	35	nē
2	10	30	nē
3	15	25	nē
4	20	20	**jā; *a*=5**
5	25	15	nē
6	30	10	nē
7	34	5	nē

4. Jā, var; piemēram, var salikt taisnstūri ar malu garumiem 110 cm × 100 cm; skat. 3.zīm.



3. zīm.

5. Ar trīs svēršanām pietiek, lai atrastu „nepareizo” lodīti, ja rīkosies sekojoši.

1. svēršanā uz viena svaru kausa uzliksim lodītes ar uzrakstiem „1 g” un „4 g”, uz otra svaru kausa – „2 g” un „3 g”.

Ja svari ir līdzsvarā, tad visām šīm lodītēm uzraksti ir pareizi, bet tā kā vienai lodītei jābūt nepareizam uzrakstam, tad tā būs malā palikusī lodīte ar uzrakstu „5 g”; šajā gadījumā esam jau atraduši meklēto.

Ja svari nav līdzsvarā, tad „nepareizā” lodīte ir viena no šīm četrām, tāpēc malā palikušajai lodītei ar uzrakstu „5 g” svars norādīts pareizi. Šajā gadījumā svēršana jāturpina.

2.svēršanā uz viena svaru kausa uzliksim lodītes ar uzrakstiem „1 g” un „4 g”, uz otra – lodīti, kura sver 5 g (iepriekšējā svēršanā secinājām, ka tas uzraksts atbilst patiesībai).

A. Ja svari ir līdzsvarā, tad pareizi uzraksti ir arī lodītēm ar masu 1 g un 4 g, tātad nepareizs uzraksts ir vai nu „2 g”, vai „3 g”. Lai noskaidrotu, kura tieši, nepieciešama vēl vismaz viena svēršana.

3.svēršana. uz viena svaru kausa uzliksim lodītes ar uzrakstiem „1 g” un „3 g”, uz otra – lodīti, kura sver 4 g (iepriekšējās svēršanās secinājām, ka „1 g” un „4 g” ir pareizi uzraksti).

Ja svari ir līdzsvarā, tad arī „3 g” ir pareizs uzraksts, un nepareizam jābūt uzrakstam „2 g”;

ja svari nav līdzsvarā, tad lodīte ar uzrakstu „3 g” ir meklētā.

B. Ja svari 2.svēršanā nav līdzsvarā, tad „nepareizā” lodīte šobrīd atrodas uz svariem. Tā kā „5 g” ir pareizs uzraksts, tad aplams ir vai nu „1 g”, vai „4 g”. Lai noskaidrotu, kura tieši, arī šajā gadījumā nepieciešama vēl vismaz viena svēršana.

3.svēršana. uz viena svaru kausa uzliksim lodītes ar uzrakstiem „1 g” un „2 g”, uz otra – lodīti, kura sver 3 g (iepriekšējās svēršanās secinājām, ka „2 g” un „3 g” ir pareizi uzraksti).

Ja svari ir līdzsvarā, tad arī „1 g” ir pareizs uzraksts, un nepareizam jābūt uzrakstam „4 g”;

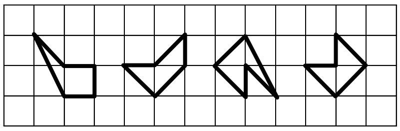
ja svari nav līdzsvarā, tad lodīte ar uzrakstu „1 g” ir meklētā.

3. kārtas uzdevumu atbildes un īsi atrisinājumi

1. Ir jāatrod skaitlis $\overline{A19} = A \cdot 100 + 19$, kur A – skaitlis, kas dalās ar 19, un kura ciparu summa ir 19-(1+9)=9. Taču, tā kā skaitļa A ciparu summa ir 9, tad pašam skaitlim A jādalās arī ar 9 (dalāmības pazīme). 19 nedalās ar 9, tāpēc apskatām skaitli 9·19=171. Tā kā 1+7+1=9, tad 171 varam ņemt A vietā, līdz ar to viens no uzdevumā meklētajiem skaitļiem ir **17119**.

Kopumā šim uzdevumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu; vēl uzdevumu apmierina arī, piemēram, skaitļi 34219, 102619, 1710019 utt.

2. Meklētie piecstūri ir ieliekti, izliektu piecstūri atbilstoši uzdevuma prasībām uzzīmēt nevar. Piemērus skat. 1.zīm.



1.zīm.

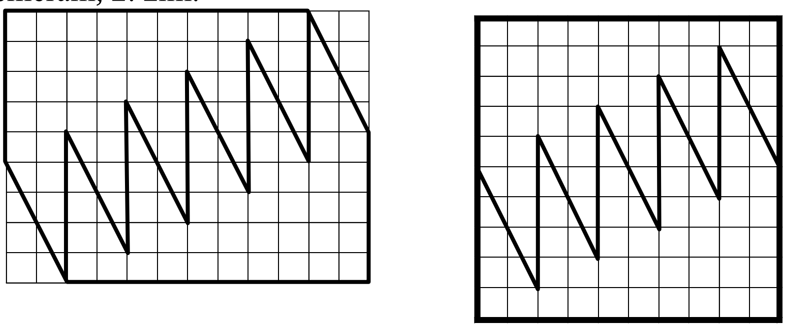
3. Ir jāatrod tādi skaitļi *n*, ka $1004 = n \cdot k + 14$ jeb $n \cdot k = 1004 - 14 = 990$, kur *k* ir vesels skaitlis, *n*>14 (jo atlikumam jābūt mazākam nekā dalītājam), tātad par *n* der visi skaitļa 990 dalītāji, kas lielāki nekā 14.

Sadalām skaitli 990 pirmreizinātājos: $990=2\cdot3^2\cdot5\cdot11$. Uzrakstīsim visus skaitļa 990 dalītājus:

1	2·3·3·5·11=**990**
2	3·3·5·11=**495**
3	2·3·5·11=**330**
5	2·3·3·11=**198**
11	2·3·3·5=**90**
2·3=6	3·5·11=**165**
2·5=10	3·3·11=**99**
2·11=**22**	3·3·5=**45**
3·3=9	2·5·11=**110**
3·5=**15**	2·3·11=**66**
3·11=**33**	2·3·5=**30**
5·11=**55**	2·3·3=**18**

Redzam, ka par skaitli *n* no šiem der 16 izceltie skaitļi.

4. Skat., piemēram, 2. zīm.



2.zīm.

5. Tā kā vienā spēlē piedalījās tieši divi zēni, tad pavisam tika izspēlēta (10+15+17):2=21 spēle. Pie tam neviens zēns nevar stāvēt malā 2 vai vairāk spēles – pēc katras spēles malā stāvētājs mainās ar zaudētāju. Tā kā Jānis ir piedalījies 10 spēlēs, tad 21-10=11 spēles viņš ir stāvējis malā. Bet tas ir iespējams tikai tādā gadījumā, ja Jānis stāvējis malā 1., 3., 5., ..., 21. spēli. Savukārt visas spēles, kurās viņš piedalījās (2., 4., 6., ..., 20.), Jānis zaudēja. Tātad otrajā spēlē zaudēja **Jānis**.

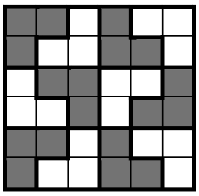
Vēl tikai atliek parādīt piemēru, ka **ir iespējams** realizēt turnīru saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem:

spēles Nr.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.
uzvar	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	A	A	A	A	A	A	A	A	A
zaudē	A	J	A	J	A	J	A	J	A	J	A	J	P	J	P	J	P	J	P	J	P
stāv malā	J	A	J	A	J	A	J	A	J	A	J	A	J	P	J	P	J	P	J	P	J

4. kārtas uzdevumu atbildes un īsi atrisinājumi

1. Vispirms ievērojam, ka **A=9**, **E=1** un **T=0**. No vienu un desmitu šķirām iegūstam E+D=S jeb S=D+1. Savukārt simtu un tūkstošu šķirās pastāv divas iespējas:
1) C+P=B un B+S=10+E (t.i. B+S=11) vai
2) C+P=B+10 un B+S+1=E+10 (t.i., B+S=10).
Pārbaudot visas iespējamās B vērtības, katrā gadījumā iegūstam 2 atrisinājumus, tātad pavisam šim uzdevumam ir 4 atrisinājumi: **97231+4513=101744**; **97531+4213=101744**; **93861+7516=101377**; **93561+7816=101377**.

2. Skat., piem., 2. zīm.



2. zīm.

3. Tā kā ruksītis Nif-Nifs viens pats mājiņu var uzcelt 8 dienās, tad vienā dienā viņš uzceļ $\frac{1}{8}$ visas mājas, arī ruksītis Nuf-Nufs vienā dienā uzceļ $\frac{1}{8}$ mājas; ruksītis Naf-Nafs viens pats vienā dienā uzceļ $\frac{1}{6}$ mājas un pelēns Tims vienā dienā viens pats uzbūvē $\frac{1}{12}$ mājas. Tāpēc visi četri draugi, strādājot kopā, vienā dienā uzceltu $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{3+3+4+2}{24}=\frac{1}{2}$ mājas. Ja pusmājas uzcelšanai jāpatērē 1 diena, tad visu šādu māju sivēntiņi un pelēns, strādājot kopā, uzceltu 2 dienās.

4. Uz visu 20 kartīšu abām pusēm kopumā ir uzrakstīti visi skaitļi no 1 līdz 40, to kopējā summa ir $1+2+...+40=\frac{(1+40)\cdot 40}{2}=820$. Tātad uz katras kartītes abu uzrakstīto skaitļu summa ir 820:20=41. (Apskatāmās kartītes ir (1; 40), (2; 39), ..., (19; 22) un (20; 21).)
41,dalot ar 3, dod atlikumu 2. Naturālu skaitli dalot ar 3, atlikums var būt 0, 1 vai 2. Lai divu skaitļu summai atlikums, dalot ar 3, būtu 2, jāsaskaita vai nu
a) divi skaitļi, kuri dod atlikumu 1,dalot ar 3 (tādas ir, piem., kartītes (1; 40), (4; 37); ...), vai arī
b) skaitlis, kas dalās ar 3, un skaitlis, kas dod atlikumu 2, dalot ar 3 (tādas ir piem., kartītes (2; 39), (3; 38), (5; 36), (6; 35), ...). (*Pārbaudiet paši, ka citos gadījumos summas atlikums, dalot ar 3, nav 2!*)
Uz labu laimi izvēloties četras no dotajām kartītēm, var būt, ka tiek izvēlētas:

A. Četras a) tipa kartītes; uz galda noliek jebkuras trīs no tām (ar jebkuru skaitli uz augšu), šo skaitļu summa, dalot ar 3, dod tādu pašu atlikumu, kā atlikumu summa: 1+1+1=3 jeb dalās ar 3 (uzdevuma prasības izpildītas).

B. Trīs a) tipa kartītes uz viena b) tipa kartīte; uz galda noliek visas trīs a) tipa kartītes, to, ka uzdevuma noteikumi izpildās, skat. A. gadījumā.

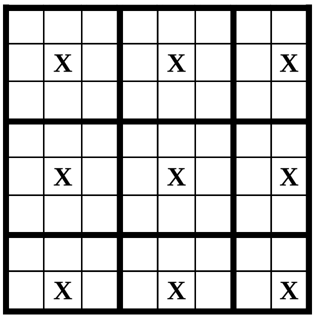
C. Divas a) tipa kartītes un divas b) tipa kartītes; Uz galda noliek vienu b) tipa kartīti ar skaitli, kas dalās ar 3, uz augšu, vienu b) tipa kartīti, ar skaitli, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 2, un vienu a) tipa kartīti; šo skaitļu summa, dalot ar 3, dod tādu pašu atlikumu kā 0+2+1=3 jeb dalās ar 3 (uzdevuma prasības izpildītas).

D. Viena a) tipa kartīte un trīs b) tipa kartītes; uz galda noliek visas trīs b) tipa kartītes, piemēram, ar skaitļiem, kas dalās ar 3, uz augšu (vairāku skaitļu, kas dalās ar 3, summa arī dalās ar 3).

E. Četras b_ tipa kartītes; līdzīgi kā D. gadījumā, uz galda noliekam trīs kartītes ar skaitļiem, kas dalās ar 3, uz augšu.

Ir apskatītas visas iespējas, un vienmēr uzdevuma prasības izpildīt ir iespējams.

5. ***Atbilde:*** 9 figūriņas.



3. zīm.

Sadalīsim šaha galdiņu 9 taisnstūros kā parādīts 3.zīmējumā. Katrā no šiem taisnstūriem vismaz vienu figūriņu varēs izvietot neatkarīgi no tā, kā ir izvietotas figūriņas pārējos taisnstūros. Tāpēc nepieciešamas vismaz 9 figūriņas. Savukārt 3.zīmējumā ar **X** atzīmētajās rūtiņās ievietojot pa figūriņai, vairāk nevienu figūriņu atbilstoši uzdevuma nosacījumiem ievietot nevar – tātad 9 ir arī pietiekamais skaits.

5. kārtas uzdevumu atbildes un īsi risinājumi

1. Atbilde: piemēram, A=12 (jo 12+2·12·12=300=100·(1+2)).

2. Atbilde: 0.

Tā kā uzrakstītās virknes paši pēdējie cipari ir ...00, bet jebkurš skaitlis ir lielāks par 0, tad agri vai vēlu no virknes tiks izsvītroti visi cipari, kas atšķiras no 0, bet vairāku nuļļu summa ir 0.

3. No dotajiem sprunguļiem trijstūri var izveidot 7 veidos: (20 cm, 30 cm, 40 cm), (20 cm, 40 cm, 50 cm), (20 cm, 50 cm, 60 cm), (30 cm, 40 cm, 50 cm), (30 cm, 40 cm, 60 cm), (30 cm, 50 cm, 60 cm), (40 cm, 50 cm, 60 cm). Tā kā nevienā veidā neietilpst 10 cm garš sprungulis, tad nevar gadīties, ka spēles beigās abi spēlētāji var izveidot pa trijstūrim. Gudri spēlējot, neviens no spēlētājiem iespējami ilgi centīsies neizvēlēties pašu īsāko sprunguli, tāpēc, tas, kuram pēdējā gājienā būs tas jāpaņem noteikti zaudēs.

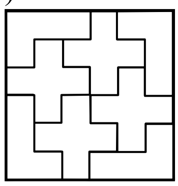
Atliek pamatot, ka lai kā arī Bazilio censtos, viņš nevarēs panākt, ka arī Alisei neizdodas izveidot trijstūri (jo varbūt var gadīties, ka neviens no viņiem neuzvar).

Alisei kā pirmo būtu jāizvēlas sprunguli, ar kuru var izveidot visvairāk trijstūrus, tādi ir 40 cm un 50 cm gari sprunguļi (abi ietilpst piecos veidos). Pieņemsim, ka Alise izvēlas **40 cm** garu sprunguli. Tālāk jāaplūko visas iespējas, kā varētu rīkoties Bazilio, un jāparāda, ka katrā gadījumā Alise var panākt sev vēlamo rezultātu. Visas iespējas apkopotas tabulā.

	Bazilio izvēle	**Atlikušie trijstūru veidi, ko Alise varētu iegūt**	**Alises izvēle**	**Alises izvēlētie sprunguļi**
1.	20	(30, 40, 50), (30, 40, 60), (40, 50, 60)	30	[40, 30]

2.	50 (vai 60)	(30, 40, 60) (vai (30, 40, 50))	60 (vai 50)	[30, 40, 60] (vai [30, 40, 50]) var *izveidot trijstūri*
1.	30	(20, 40, 50), (40, 50, 60)	50	[40, 50]
2.	20 (vai 60)	(40, 50, 60) (vai (20, 40, 50))	60 (vai 20)	[40, 50, 60] (vai [20, 40, 50]) var *izveidot trijstūri*
1.	50	(20, 30, 40), (30, 40, 60),	30	[40, 30]
2.	20 (vai 60)	(30, 40, 60) (vai (20, 30, 40))	60 (vai 20)	[30, 40, 60] (vai [20, 30, 40]) var *izveidot trijstūri*
1.	60	(20, 30, 40), (20, 40, 50), (30, 40, 50)	30	[40, 30]
2.	20 (vai 50)	(30, 40, 50) (vai (20, 30, 40))	50 (vai 20)	[30, 40, 50] (vai [20, 30, 40]) var *izveidot trijstūri*

4. Atbilde: a) jā, skat., piem. zīm.; b) nē.



b) Izkrāsosim kvadrātu 7x7 rūtiņas šaha galdiņa veidā; tad melno rūtiņu ir par 1 vairāk nekā balto. L-veida figūriņa, lai kā mēs to novietotu šajā kvadrātā, noklās 2 baltas un 2 melnas rūtiņas, t.i., starpība starp balto un melno rūtiņu skaitu ir 0. Savukārt X-veida figūriņa var noklāt vai nu 4 melnas un 1 baltu rūtiņu, vai arī 4 baltas un 1 melnu rūtiņu, t.i., starpība starp dažādas krāsas rūtiņām ir 3. Ja uzdevuma prasības būtu iespējams izpildīt, tad visā lielajā kvadrātā starpība starp balto un melno rūtiņu skaitu dalītos ar 3. Tā kā 1 nedalās ar 3, uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams.

5. Atbilde: 825 dažādos veidos

Risinājums. Apzīmēsim zaļos cimdus ar Z, sarkanos – ar S, labās rokas cimdus – ar L, kreisās rokas – ar K; piemēram, pieraksts „SL" apzīmē sarkanu labās rokas cimdu. Lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, ir 3 iespējas, kādi cimdi ir izvēlēti:

1) SL, SK, ZL, ZK,
2) SL, SL, ZK, ZK,
3) SK, SK, ZL, ZL.

Aprēķināsim, cik veidos var izvēlēties katru no šīm 3 kombinācijām.

1) Vienu SL var izvēlēties 5 veidos, vienu SK – arī 5 veidos, vienu ZL – arī 5 veidos un vienu ZK – arī 5 veidos. Tātad 1) veida kombināciju var izvēlēties $5\cdot5\cdot5\cdot5=625$ veidos.

2) Divus SL no 5 pieejamajiem var izvēlēties 10 veidos, līdzīgi – divus ZK arī var izvēlēties 10 veidos. Tātad 2) veida kombināciju var izvēlēties $10\cdot10=100$ veidos.

3) veida kombināciju var izvēlēties tikpat veidos kā 2) veida kombināciju, t.i., 100 veidos.

Tātad Pepija vajadzīgos 4 cimdus var izvēlēties 625+100+100=825 dažādos veidos.