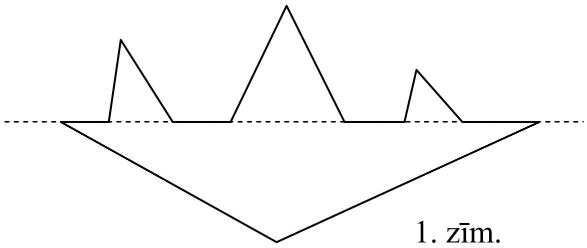
Jauno matemātiķu konkurss 2009./2010. m.g.

1. kārtas uzdevumu atbildes un īsi atrisinājumi

1. Der, piemēram, skaitļi 199 (1+9+9=19; 199·199=39601 un 3+9+6+0+1=19), 289 (289·289=83521), 955 (955·955=912025) un citi.

2. Skat., piemēram, 1. zīm.



1. zīm.

3. Atbilde : cipars 1.

Rindā būs uzrakstīti četri viencipara skaitļi, tātad 4 cipari.

Pēc tam būs uzrakstīti visi 45 pāra divciparu skaitļi, kopā 90 cipari.

Pavisam ir 450 pāra trīsciparu skaitļu, kopā 1350 cipari.

Tātad, izrakstot visus pāra skaitļus no 2 līdz 998 ieskaitot, virknē būs uzrakstīti 4+90+1350=1444 cipari.

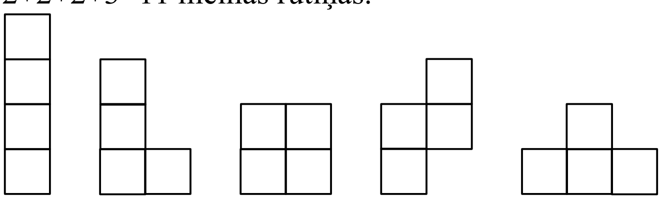
Uzrakstot vēl visus 100 pāra skaitļus no 1000 līdz 1198 ieskaitot, būs uzrakstīti vēl 400 cipari; tātad kopā jau 1844 cipari. Līdz 2009. ciparam jāuzraksta vēl 2009-1844=165 cipari jeb 41 četrciparu skaitlis un pirmais cipars no nākamā skaitļa (uzrakstot visus 50 pāra skaitļus no 1200 līdz 1298, tiktu uzrakstīti vēl 200 cipari, tātad interesējošais 2009. cipars ir kādā no šiem četrciparu skaitļiem). Tātad 2009. vietā ir cipars 1.

4. Atbilde: nē, nevar.

Katra figūriņa aizņem 4 rūtiņas, pavisam ir piecas figūriņas, tātad to kopējais laukums ir 20 rūtiņas. Taisnstūra, kura laukums ir 20 rūtiņas, izmēri var būt 2×10 rūtiņas vai 4×5 rūtiņas.

Pieņemsim, ka no dotajām figūriņām ir iespējams salikt kādu no minētajiem taisnstūriem. Izkrāsosim šī taisnstūra rūtiņas melnā un baltā krāsā šaha galdiņa veidā. Gan taisnstūrī 2×10 rūtiņas, gan 4×5 rūtiņas melnas būs tieši 10 rūtiņas.

Savukārt viegli pārbaudīt, ka 2.zīm. a) figūriņa, lai arī kā būtu novietota taisnstūrī, nosedz tieši divas melnas, tāpat arī 2. zīm. b), c) un d) figūriņas nosedz tieši divas melnas rūtiņas, bet 2.zīm. e) figūriņa nosedz vai nu 1, vai 3 melnas rūtiņas. Tātad visas piecas figūriņas kopā nosedz 2+2+2+2+1=9 vai 2+2+2+2+3=11 melnas rūtiņas.



a) b) c) d) e)

2. zīm.

Esam ieguvuši pretrunu, jo taisnstūrī melnas ir tieši 10 rūtiņas (nevis 9 vai 11), tāpēc dotās piecas figūriņas nevar savietot tā, lai veidotos taisnstūris.

Piezīme: uzdevuma risinājumā izmantojām *invariantu metodi*: atradām nemainīgu lielumu (melno rūtiņu kopējais skaits), un pamatojām, ka ar dotajām figūriņām kopā nevar iegūt tieši tādu pašu lielumu.

5. Lielākais skolēnu skaits būs tad, ja katrs bērns būs izlasījis tieši vienu grāmatu, tātad kopā var būt ne vairāk kā 6+7+8=21 skolēni.

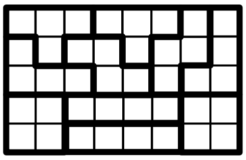
Savukārt mazākais skolēnu skaits būs tad, ja iespējami daudz bērnu ir izlasījuši trīs vai divas grāmatas. Trīs grāmatas var būt izlasījuši ne vairāk kā 6 skolēni (jo grāmatu par Alisi ir izlasījuši tikai 6 skolēni). Ja ir 6 skolēni, kas izlasījuši visas trīs grāmatas, tad vēl jābūt vienam skolēnam,

kas nav lasījis grāmatu par Alisi, bet izlasījis grāmatu par Karlsonu. Šis pats skolēns var būt izlasījis arī grāmatu par Vinniju Pūku; tad jau ir 7 skolēni, kas izlasījuši grāmatu par Vinniju Pūku, bet jābūt vēl vienam skolēnam, kas izlasījis šo grāmatu, tātad tas skolēns ir izlasījis tikai grāmatu par Vinniju Pūku. Tātad mazākais iespējamais skolēnu skaits ir 6+1+1=8.
Taču skolēnu skaits klasē var būt jebkurš vesels skaitlis starp 8 un 21 ieskaitot. Pilnā risinājumā nepieciešams uzrādīt piemēru katram gadījumam.

2. kārtas uzdevumu atbildes un īsi risinājumi

1. Tā kā skaitlis 6·A beidzas ar ciparu 0, tad A var būt vai nu 0, vai 5. Ja A ir 0, tad skaitlim 5·K jābeidzas ar 8, kas nav iespējams. Tātad **A=5**. Tālāk ievērojam, ka der tikai **K=1** (citos gadījumos summā simtu pozīcijā neiegūsim 0), **S=2** un **P=7**.

2. Skat., piemēram, 2. zīmējumu.



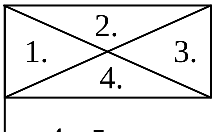
2. zīm.

3. a) Jā var; skat., piem., 3.zīm.

3. zīm.

b) Nē, nevar. Vispirms ievērosim, ka, tā kā visi aplīšos ierakstītie skaitļi ir veseli, un divu skaitļu vidējais aritmētiskais ir puse no šo skaitļu summas, tad visos baltajos aplīšos jābūt ierakstītiem vienas paritātes skaitļiem (t.i., visi pāra skaitļi vai visi nepāra skaitļi). Tāpat ievērosim, ka divu dažādu skaitļu vidējais aritmētiskais ir **lielāks par mazāko** skaitli un **mazāks par lielāko** skaitli. Tātad nedz skaitlis 1, nedz skaitlis 10 nevar būt ierakstīts pelēkā aplītī, tāpēc tiem abiem ir jābūt ierakstītiem baltajos aplīšos. Bet 1 ir nepāra skaitlis, bet 10 – pāra skaitlis. Ir iegūta pretruna ar pasvītroto apgalvojumu.

4. Atbilde: 84 karogus.



4. zīm.

Skaidrs, ka 1. trijstūri var nokrāsot jebkurā no 4 krāsām (skat. 4.zīm.). Kad 1. trijstūris nokrāsots, 2. trijstūri varam krāsot jebkurā no atlikušajām trīs krāsām, tātad 1. un 2. trijstūri kopā varam izkrāsot 4·3=12 dažādos veidos. Tagad krāsosim 3. trijstūri. Šķirosim divus gadījumus:
1) 3. trijstūris ir tādā pašā krāsā kā 1. trijstūris; tad atlikušo 4.trijstūri var krāsot jebkurā no krāsām, kas atšķiras no 1. trijstūra krāsas, tātad 3 iespējas. Pavisam varam iegūt 12·3=36 dažādus karogus, kam 1. un 3. trijstūri ir vienā krāsā.
2) 3. trijstūris ir citā krāsā nekā 1.trijstūris; tad 3.trijstūri var izkrāsot vienā no divām krāsām (kuras vēl nav izmantotas 1. un 2. trijstūra krāsošanai). Pēc tam 4. trijstūri arī varēs izkrāsot vienā no 2 krāsām (tādā, kas vēl nav izmantota 1. un 3. trijstūra krāsošanai). Tātad pavisam varam iegūt 12·2·2=48 tādus karogus, kam 1. un 3. trijstūris ir dažādās krāsās.
Līdz ar to, izmantojot dotās 4 krāsas, var iegūt 36+48=**84** dažādus karogus.

5. Atbilde: bulciņa maksā 19 santīmus, bet tējas tase maksā 2 santīmus.
Apzīmēsim bulciņas cenu ar b, tējas cenu – ar t. Pie tam ievērosim, ka visas cenas ir vesels skaits santīmu. Tad uzdevuma situāciju raksturo divas nevienādības:

$$5b+3t>100 \text{ jeb } 5b+3t\geq 101 \quad (*)$$

$$3b+2t<62 \text{ jeb } 3b+2t\leq 61. \quad (**)$$

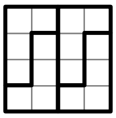
No nevienādību (**), iegūstam pareizu nevienādību $6b+4t \le 122$ (t.i., ja 3 bulciņas un 2 tējas tases maksā ne vairāk kā 61 santīmu, tad divreiz lielāks pirkums maksās ne vairāk kā $2 \cdot 61 = 122$ sant.).

$$6b+4t=(5b+3t)+(b+t) \le 122$$

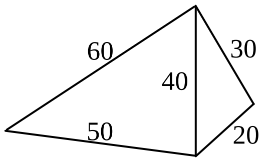
Tā kā $5b+3t \ge 101$, tad jābūt $\boldsymbol{b+t \le 21}$ (citādi kopējā summa būs lielāka nekā 122).
Tāpat varam ievērot, ka $10b+6t=b+(9b+6t) \ge 202$, bet $9b+6t=3(3b+2t) \le 3 \cdot 61=183$. Tāpēc $\boldsymbol{b \ge 19}$.
Pārbaudot visas b un t vērtības, kas apmierina izceltos nosacījumus (t.i., $b=19$ un $t=1$; $b=19$ un $t=2$; $b=20$ un $t=1$), redzam, ka uzdevuma nosacījumus apmierina tikai vērtības $b=19$ un $t=2$.

3. kārtas uzdevumu atbildes un īsi risinājumi

1. Skat., piem., 1. zīm.



1. zīm.



2. zīm.

2. Stienītis 10 cm nevar tikt izmantots neviena trijstūra veidošanā, jo no atlikušajiem 5 stienīšiem nevar piemeklēt tādus divus, ar kuriem izpildītos trijstūra nevienādība: *trijstūrī jebkuru divu malu garumu summa ir **lielāka** nekā trešās malas garums*. No atlikušajiem pieciem stienīšiem vienlaicīgi var izveidot ne vairāk kā divus trijstūrus (skat. 2. zīm., pie malām uzrakstīti to garumi cm). Viena trijstūra izveidei jāizmanto 3 stienīši. Pie tam, ja no trīs stienīšiem var izveidot trijstūri, tad to var izdarīt vienā vienīgā veidā, t.i., leņķu lielumi starp malām ir noteikti viennozīmīgi.
Tā kā atlikuši neizmantoti tikai divi stienīši, lai iegūtu vēl citus trijstūrus, par to malām jāizmanto vismaz viena no jau izveidotā trijstūra malām. Ja izmantotu divas jau izveidotā trijstūra malas (un kā jau atzīmējām augstāk – leņķis starp šīm malām arī ir noteikts viennozīmīgi), tad varētu iegūt tikai tādu pašu trijstūri, kas jau ir izveidots. Bet nav divu vienāda garuma stienīšu. Tāpēc jaunam trijstūrim var izmantot ne vairāk kā vienu jau izveidotā trijstūra malu, tātad kopā var izveidot ne vairāk kā vēl vienu jaunu trijstūri.

3. Atbilde: der, piemēram, skaitlis 21200 – tā pierakstā ir 2 nulles, 1 vieninieks, 2 divnieki un nav neviena trijnieka un četrinieka.

4. Trīsriteņu skaitam jābūt pāra skaitlim, citādi kopējais riteņu skaits būs nepāra skaitlis, bet 60 ir pāra skaitlis. Tā kā pavisam ir 20 braucamrīki, un zināms, ka trīsriteņu ir vismazāk, tad to mazāk nekā trešdaļa no braucamrīkiem, t.i., ne vairāk kā 6. Vēl var pamatot, ka kvadriciklu un divriteņu skaits ir vienāds. Ņemot vērā augstāk minēto un apskatot visas iespējas, iegūstam, ka pavisam ir trīs iespējas (ja pieņemam, ka pārdod vismaz vienu katra veida braucamrīku) vai četras iespējas (ja pieļaujam, ka pārdošanā ir 0 kāda veida braucamrīku):
1) 6 trīsriteņi, 7 divriteņi un 7 kvadricikli
2) 4 trīsriteņi, 8 divriteņi un 8 kvadricikli
3) 2 trīsriteņi, 9 divriteņi un 9 kvadricikli
4) 0 trīsriteņi, 10 divriteņi un 10 kvadricikli.

5. Atbilde: abos gadījumos pastaiga beigsies, pirmajā gadījumā pēc 17 *apstāšanās* reizēm, otrajā gadījumā, mainot virzienus – pēc 13 *apstāšanās* reizēm.

4. kārtas uzdevumu atbildes un īsi risinājumi

1. Atbilde:

$$\begin{array}{r} \mathbf{8\,9\,9} \\ \underline{\mathbf{1\,1\,1}} \\ \mathbf{8\,9\,9} \\ \mathbf{8\,9\,9} \\ \underline{\mathbf{8\,9\,9}} \\ \mathbf{9\,9\,7\,8\,9} \end{array}$$

2. Tā kā kopš diennakts sākuma pagājis piecreiz ilgāks laiks nekā vēl atlicis līdz pusnaktij, tad līdz pusnaktij vēl atlikusi sestdaļa diennakts jeb 24:6=4 stundas. Tātad tobrīd pulkstenis rādīja **20:00**.

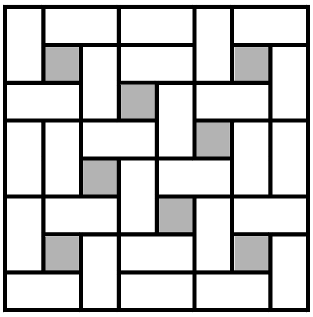
3. Tā kā kvadrātiņā 2×2 rūtiņas katrai rūtiņai ir vai nu kopīga mala, vai kopīgs stūris ar pārējām trim rūtiņām, tad tām visām jābūt nokrāsotām dažādās krāsās. Tātad vismaz četras krāsas ir nepieciešamas. 1. zīmējumā parādīts piemērs, ka ar četrām krāsām pietiek.

1	2	1	2
3	4	3	4
1	2	1	2
3	4	3	4

1. zīm.

4. Ievērojam, ka vienu burvju stīgu sadalot 7 stīgās, stīgu kopējais skaits palielinās par 6, bet sadalot to 10 stīgās, kopējais stīgu skaits palielinās par 9. Tātad ar katru dalīšanu kopējais stīgu skaits palielinās par skaitli, kas dalās ar 3. Sākumā bija tieši viena burvju stīga, tāpēc uz planētas Zvaigzne stīgu kopējais skaits vienmēr būs skaitlis, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1. Tā kā 2010 dalās ar 3 bez atlikuma, tad **nav iespējams**, ka katram planētas iedzīvotājam pieder tieši viena burvju stīga.

5. Skat., piem., 2. zīm.



2. zīm.

5. kārtas uzdevumu atbildes un īsi risinājumi

1. Atbilde: Ar zvaigznīti aizstāts skaitlis 144.

Apzīmēsim: $a_1 = 9$, $a_2 = 18$, $a_3 = 36$, $a_4 = 63$, $a_5 = 99$, $a_6 = *$, $a_7 = 198$. Tad redzam, ka katru no skaitļu virknes zināmajiem locekļiem varam izteikt kā vesela skaitļa reizinājumu ar skaitli 9:

$$a_1 = 9\cdot 1,\ a_2 = 9\cdot 2,\ a_3 = 9\cdot 4,\ a_4 = 9\cdot 7,\ a_5 = 9\cdot 11,\ a_7 = 9\cdot 22.$$

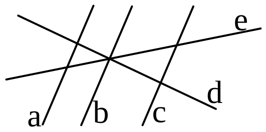
Savukārt katram virknes loceklim, sākot ar otro, veselais reizinātājs tiek iegūts, saskaitot iepriekšējā virknes locekļa kārtas skaitli ar tā veselo reizinātāju.

Tātad ar zvaigznīti apzīmētā virknes locekļa a_6 veselais reizinātājs būs $5+11=16$, līdz ar to $a_6 = 9\cdot 16 = 144$.

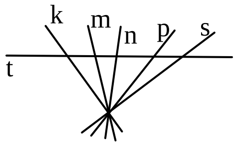
Tālāk līdzīgi iegūstam nākamos divus virknes locekļus: $a_8 = 9 \cdot (7+22) = 9 \cdot 29 = 261$ un $a_9 = 9 \cdot (8+29) = 9 \cdot 37 = 333$.

2. a) Vienu no variantiem, kā uzzīmēt piecas taisnes tā, lai tām būtu tieši pieci krustpunkti, skat., piem., 1. zīm. Šajā attēlā taisnes *a, b* un *c* ir paralēlas, bet taisnes *b, e* un *d* krustojas vienā punktā.

b) Vienu no iespējām, kā var uzzīmēt sešas taisnes tā, lai tām būtu tieši seši krustpunkti, skat., piem., 2. zīm. Šajā zīmējumā piecas taisnes (*k, m, n, p, s*) krustojas visas vienā punktā, un sestā taisne *t* krusto pārējās piecas.



1.zīm.



2.zīm.

3. Tā kā Māris ieguva 1 punktu, viņš noteikti atbildēja pareizi uz vismaz vienu no jautājumiem.

Ievērojam, ka lielākais iespējamais Māra pareizo atbilžu skaits ir 6. Ja Māris atbildētu pareizi uz 7 jautājumiem, tad viņš jau būtu ieguvis $7 \cdot 7 = 49$, bet, lai kopsummā iegūtu 1 punktu, viņam jāatbild nepareizi uz $48 : 4 = 12$ jautājumiem, tad kopā viņš būtu atbildējis uz 17 jautājumiem, bet tas nav iespējams, jo pavisam viņam tika uzdoti 16 jautājumi.

Ja ar x apzīmējam jautājumu skaitu, uz kuriem Māris atbildēja pareizi, bet ar y – jautājumu skaitu, uz kuriem Māris atbildēja nepareizi, tad par pareizi atbildētajiem jautājumiem viņš kopā bija saņēmis $7x$ punktus, bet par nepareizi atbildētajiem – zaudējis $4y$ punktus. Tā kā kopā viņš ieguva 1 punktu, varam sastādīt vienādību $7x - 4y = 1$.

Apskatot visas iespējamās naturālās x vērtības (mazākas par 7), redzam, ka vienīgais gadījums, kad Māris rezultātā var iegūt tieši 1 punktu, ir, ja viņš **atbildēja pareizi uz 3 eksāmenā uzdotajiem jautājumiem**, bet nepareizi – uz 5 uzdotajiem jautājumiem.

4. Atbildes: a) jā, var; **b)** nē, nevar.

Risinājums: a) Varam izveidot četru atsvaru komplektu, kur atsvaru masas ir $1g$, $2g$, $4g$ un $8g$. Patstāvīgi pārliecinieties, ka ar šo atsvaru komplektu var nosvērt jebkuru veselu gramu skaitu no $1g$ līdz $15g$ ieskaitot.

b) Pieņemsim pretējo, ka ir izdevies izveidot šādu četru atsvaru komplektu, kurā atsvaru masas ir A, B, C un D grami. Apskatīsim, cik dažādas masas varam ar tiem nosvērt.

- Ja uz svaru kausa uzliekam tikai vienu no atsvariem, pavisam varam nosvērt 4 dažādas masas (A, B, C un D gramus smagas).
- Ja uz svaru kausa uzliekam vienlaicīgi jebkurus divus atsvarus, pavisam varam nosvērt ne vairāk kā 6 dažādas masas (A+B, A+C, A+D, B+C, B+D, C+D gramus smagas).
- Ja uz svaru kausa uzliekam vienlaicīgi jebkurus trīs atsvarus, pavisam varam nosvērt ne vairāk kā 4 dažādas masas (A+B+C, A+B+D, A+C+D, B+C+D gramus smagas).
- Ja uz svaru kausa uzliekam visus četrus atsvarus, varam nosvērt tikai masu, kas ir A+B+C+D gramus smaga.

Tātad pavisam varam nosvērt ne vairāk kā $4+6+4+1=15$ dažādas masas. Iegūta pretruna ar pieņēmumu. Tātad nevar izveidot tādu četru atsvaru komplektu, ka, izmantojot tikai šos četrus atsvarus, uz sviras svariem var nosvērt jebkuru veselu gramu skaitu no 1 g līdz 16 g ieskaitot.

5. Tā kā nav divu spēlētāju ar vienādu vārdu un uzvārdu, tad katram no uzvārdiem atbilst spēlētājs ar vārdu Andris, bet katram no vārdiem atbilst viens spēlētājs ar uzvārdu Kalniņš.

Kopā ar jau doto, esam uzzinājuši 8 spēlētāju vārdu un uzvārdu: Andris Bērziņš, Andris Kalniņš, Andris Krūmiņš, Andris Ezeriņš, Kārlis Kalniņš, Roberts Kalniņš, Jānis Kalniņš un Roberts Ezeriņš.

Vēl jāuzzina vārds un uzvārds 3 spēlētājiem. Mums ir atlikuši šādi uzvārdi – divi Bērziņi un viens Krūmiņš, kā arī šādi vārdi – divi Kārļi un viens Roberts. Tātad noteikti viens no atlikušajiem spēlētājiem ir Kārlis Bērziņš, tāpēc otram Kārlim uzvārds būs Krūmiņš, savukārt Roberta uzvārds būs Bērziņš.