Jauno matemātiķu konkurss 2010./11. m.g.

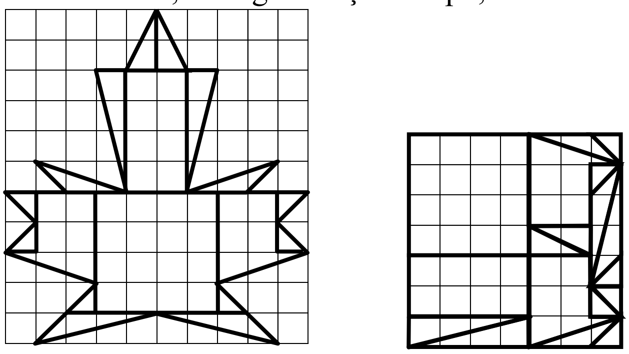
1. kārtas uzdevumu atbildes

1. Atbilde: uzrakstot skaitļus 1020 un 1021.

2. Atbilde: 34,3%.

3. Abiem bērniem ir 6 gadi.

4. Kļavas lapa sastāv no 49 rūtiņām, tāpēc iegūtā kvadrāta malas garumam jābūt 7 rūtiņas. 1. zīmējumā parādīts viens no veidiem, kā sagriezt kļavas lapu, lai saliktu kvadrātu.



1. zīm.

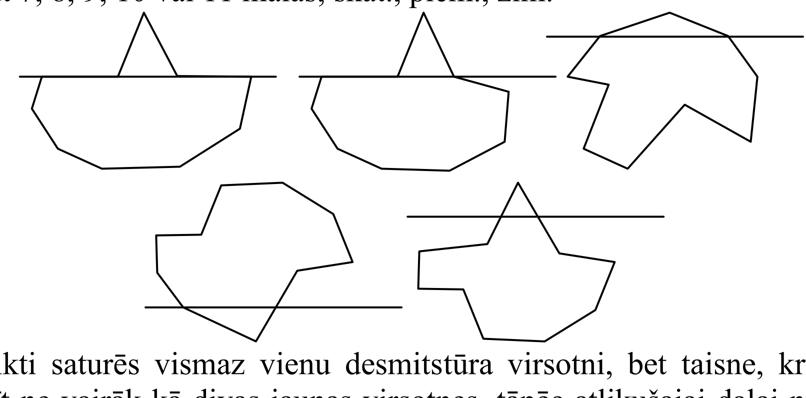
5. Baiba vienmēr varēs panākt savu mērķi. Katrā gājienā Baiba raksta tādu ciparu, kas summā ar Andra tikko uzrakstīto ciparu dod 6 (to viņa var izdarīt vienmēr). Beigās visu 12 uzrakstīto ciparu summa būs 6·6=36, kas dalās ar 9, tātad viss iegūtais 12-ciparu skaitlis dalās ar 9.

2. kārtas uzdevumu atbildes

1. Piemēram,

$$\begin{array}{r} 5\ 2\ 4\ 1\ 0 \\ +3\ 9\ 0\ 7\ 6 \\ \hline 9\ 1\ 4\ 8\ 6 \end{array}$$

2. Atbilde: var būt 7, 8, 9, 10 vai 11 malas; skat., piem., zīm.



Trijstūris noteikti saturēs vismaz vienu desmitstūra virsotni, bet taisne, krustojot desmitstūra malas, var radīt ne vairāk kā divas jaunas virsotnes, tāpēc atlikušajai daļai nevar būt vairāk par 10-1+2=11 virsotnēm un malām.

3. Piemēram,

$$1:(2:3:4:5):(6:7:8:9):(10:11):12=231$$

4. Pieņemsim, ka tādu daudzstūru, kam visas virsotnes ir baltas, ir N. Katram šādam daudzstūrim pievienojot sarkano virsotni, iegūstam daudzstūri, kam viena virsotne ir sarkana. Bez tam vēl ir trijstūri, kam viena virsotne ir sarkana un kurus nevar iegūt no daudzstūriem, kam visas virsotnes ir baltas. Tātad daudzstūru ar sarkano virsotni ir vairāk.

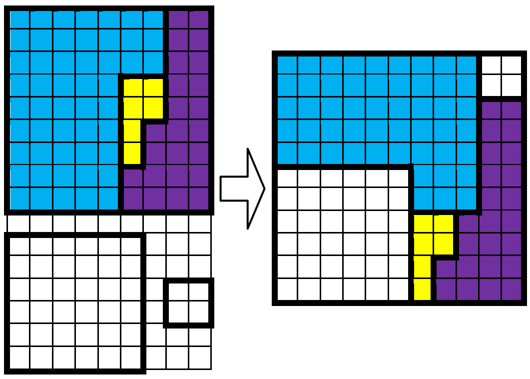
5. Sulainis paspēs atrast burvju akmeni. Sākumā sadala visus 16 akmeņus divās kaudzītēs pa 8 akmeņiem katrā, un pārbauda vienu kaudzīti. Neatkarīgi no pārbaudes rezultāta, varēs pateikt kurā kaudzītē ir meklētais akmens. Pēc tam to kaudzīti, kurā ir burvju akmens, atkal sadala divās daļās, pa 4 akmeņiem katrā un pārbauda vienu no tām. Tālāk kaudzīti, kurā ir meklētais akmens, atkal sadala 2 daļās pa 2 akmeņiem katrā un atkal pārbauda vienu no tām. Beidzot pārbauda vienu no diviem akmeņiem, starp kuriem ir īstais akmens un noskaidro, kurš tieši tas ir. Pavisam tika veiktas 4 pārbaudes, tātad patērētas 40 minūtes, kas ir mazāk nekā viena stunda.

3. kārtas uzdevumu atbildes

1. Apskatām starpības starp blakusesošiem virknes locekļiem; tās veido virkni $1\cdot 10$, $2\cdot 10$, $4\cdot 10$, ... Nākamajām starpībām būtu jābūt $8\cdot 10$ un $16\cdot 10$. Tik tiešām, $317-77=240=80+160$. Tātad „*” vietā ir jābūt skaitlim $77+80=157$.

2. Tā kā Notiņš mēneša pirmajā otrdienā un pirmajā otrdienā pēc pirmās pirmdienas bija dažādās vietās, tad šīs abas otrdienas bija dažādas dienas. Tas iespējams tad, ja mēneša 1.datums ir otrdienā. Tā kā divos mēnešos pēc kārtas 1. datumam jābūt otrdienā, tad pirmajā mēnesī ir jābūt tieši pilnām 4 nedēļām, tāds mēnesis ir tikai februāris. Tātad Daugavpilī Notiņš bija 1.februārī, Stokholmā – 8.februārī, Valmierā – 1.martā un Berlīnē – 8. martā.

3. Skat., piem., zīm.; kvadrāti 2×2 un 6×6 rūtiņas netiek sagriezti, bet kvadrātu 9×9 rūtiņas jāsagriež 3 daļās.



4. Tabulā parādīta shēma, kā, izmantojot tikai mucu, ķipīti un vienu spaini, tajā var ieliet tieši 6 *l* ūdens. Otrā spainī 6 *l* iegūst, rīkojoties pēc tādas pašas shēmas, tikai mucā tad būs par 6 *l* mazāk ūdens.

muca	18	14	14	10	10	**17**	17	13	13	9	9	**16**	16	12	12
ķipītis	0	**4**	0	**4**	1	1	0	**4**	0	**4**	2	2	0	**4**	0
spainis	0	0	**4**	4	**7**	0	**1**	1	**5**	5	**7**	0	**2**	2	**6**

5. Pietiek ar 8 monētām: 1 sant., 2 sant., 2 sant., 5 sant., 10 sant., 10 sant., 20 sant., 50 sant.

4. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde: A=1 un B=9.

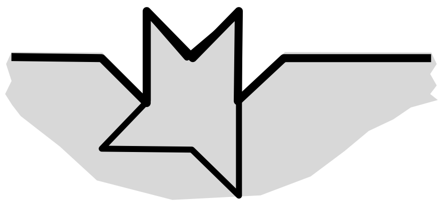
Tā kā reizinājuma B·B pēdējais cipars ir A un A≠B, iespējamās A vērtības ir 1 (B=9), 4 (B=2 vai 8), 6 (B=4) vai 9 (B=3 vai 7). Izanalizējot visus gadījumus, iegūstam, ka der tikai A=1 un B=9.

$$\begin{array}{r} \mathbf{12345679} \\ \cdot \qquad\quad \mathbf{9} \\ \hline \mathbf{111111111} \end{array}$$

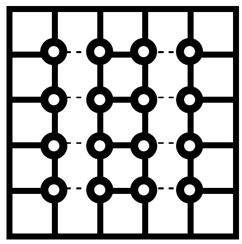
2. Atbilde: x=16 un y=8.

Pēc uzdevuma nosacījumiem seko, ka (1) $x \text{ h } y \text{ min.} + x \text{ h } y \text{ min.} = y \text{ h } x \text{ min.}$ vai (2) $x \text{ h } y \text{ min.} + x \text{ h } y \text{ min.} = (y+24) \text{ h } x \text{ min.}$ Tā kā gan x, gan y apzīmē arī stundas, un diennaktī ir 24 stundas (elektroniskais pulkstenis rāda tikai 23 stundas – pēc rādījuma 23:59 seko rādījums 00:00), tad gan x<24, gan y<24. Ja būtu patiesa vienādība (1), iegūstam, ka $2y = x$ un $2x = y$, tas iespējams tikai tad, ja x=y=0 – tātad Žanis pusnaktī uzkāpa uz kuģa un acumirklī nokāpa – nekāda ceļojuma nebija. No vienādības (2) seko, ka $2y = x$ un $2x = y + 24$, no kurienes iegūstam $y = 8$ un $x = 16$. Tātad Žanis uzkāpa uz kuģa plkst. 16:08, ceļoja 16 stundas un 8 minūtes un no kuģa nokāpa nākamajā rītā plkst. 8:16.

3. Skat. 1. zīmējumu.



1. zīm.



2. zīm.

4. Atbilde: pietiek slēgt 8 ielu posmus, skat., piem., 2. zīm.

Pavisam ir 16 „*sliktie*” krustojumi, no kuriem sākotnēji varēja aizbraukt 4 virzienos (2. zīm. attēloti ar aplīšiem). Slēdzot vienu ielas posmu, divos krustojumos (kurus savieno slēgtais posms) iespējamais virzienu skaits samazinās par 1. Tāpēc nepieciešams slēgt vismaz 16:2=8 ielu posmus.

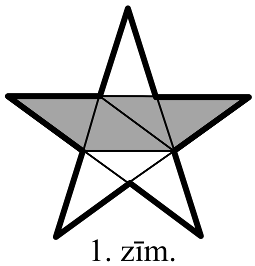
5. Atbilde: 10 godīgie un 10 meļi.

Skaidrs, ka pirmais cilvēks meloja, bet pēdējais teica patiesību. Pie tam, ja kāds cilvēks bija teicis patiesību, tad arī nākamais aiz viņa ir teicis patiesību. Apskatīsim k-to cilvēku: viņš apgalvo, ir ne vairāk kā k-1 godīgais cilvēks, tātad ir vismaz $20-(k-1) = 21-k$ meļi. Lai k-tais cilvēks būtu godīgs, jāizpildās nevienādībai $k > 21-k$ jeb $k > 10$. Tātad patiesu apgalvojumu pirmais pateica 11. cilvēks.

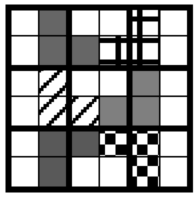
5. kārtas uzdevumu atbildes

1. Trīs pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus varam apzīmēt ar n, n+1 un n+2; to summa ir 3n+3=3(n+1), tā dalās ar 3. Tātad kā trīs pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu var izteikt visus tos un tikai tos naturālos skaitļus, kas dalās ar 3 un ir vismaz 6(=1+2+3 – mazākā iespējama trīs pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summa). Tātad 123=40+41+42 var izteikt prasītajā veidā, bet 2011 nedalās ar 3. tāpēc to nevar tā izteikt.

2. Atbilde: iekrāsota puse no piecstaru zvaigznes (skat. 1. zīm.).



1. zīm.



2. zīm.

3. Vienīgā atbilde ir:

„*Šajā teikumā cipars 0 sastopams 1 reizi,*
cipars 1 sastopams 7 reizes,
cipars 2 sastopams 3 reizes,
cipars 3 sastopams 2 reizes,
cipars 4 sastopams 1 reizes,
cipars 5 sastopams 1 reizes,
cipars 6 sastopams 1 reizes,
cipars 7 sastopams 2 reizes,
cipars 8 sastopams 1 reizes,
cipars 9 sastopams 1 reizes.”

4. Atbilde: jāiekrāso vismaz 6 stūrīši, skat., piem., 2.zīm.

Sadalām kvadrātu 9 kvadrātiņos ar izmēriem 2×2 rūtiņas. Katrā kvadrātiņā jābūt iekrāsotām vismaz 2 rūtiņām, pretējā gadījumā no šī kvadrātiņa varēs iekrāsot vēl vienu stūrīti. Tātad jāiekrāso vismaz 9·2=18 rūtiņas jeb 18:3=6 „stūrīšus”.

5. Pieņemsim, ka tomēr nav iespējams no Šallijas aizbraukt līdz Dallijai. Tad pilsēta Šallija kopā ar vairākām citām pilsētām, no kurām no katras iziet pa 10 ceļiem, veido noslēgtu sistēmu (visi ceļi, kas iziet no šīs sistēmas pilsētām, beidzas tikai šīs sistēmas pilsētās, tātad neviens ceļš no šīs sistēmas neaiziet līdz pilsētai Dallijai) Apskatīsim, cik *ceļa galu* ir ceļu sistēmā, kurā ietilpst pilsēta Šallija. Pieņemsim, ka šajā sistēmā ietilpst a pilsētas, no kurām iziet pa 10 ceļiem. Tad *ceļa galu* skaits šajā sistēmā ir $17+10a$ – nepāra skaitlis. Bet katram ceļam ir tieši divi *gali*, tāpēc kopējais *ceļa galu* skaits ir pāra skaitlis. Ir iegūta pretruna, tāpēc mūsu pieņēmums ir aplams, un pilsētas Šallija un Dallija atrodas vienā sistēmā, t.i., ir iespējams aizbraukt no vienas līdz otrai, braucot tikai pa esošajiem ceļiem.