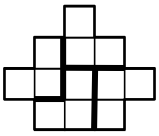
**Jauno matemātiķu konkurss 2011./12. m.g.**

**1. kārtas uzdevumu atrisinājumi**

**1. Atbilde:** Skat. 1. zīm.
Ievērojam, ka, tā kā katrā rūtiņā jāieraksta viens cipars, apakšējo rindiņu var aizpildīt vienā vienīgā veidā: 8·1:8=1. Kreisā stabiņa otrajā rindā jābūt skaitlim, ar kuru dalās 4 (1, 2, vai 4), bet trešajā rindiņā – skaitlim, kas dalās ar 3 (3, 6 vai 9). Pārbaudot iegūstam, ka vienīgā iespēja, kā aizpildīt kreiso stabiņu, ir 4:2+6=8. Tagad varam viennozīmīgi aizpildīt otro un trešo rindiņu, kā arī otro un trešo stabiņu, līdz ar to visas rūtiņas ir aizpildītas.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | · | 2 | − | 3 | = | 5 |
| : | | · | | : | | + |
| 2 | + | 2 | − | 1 | = | 3 |
| + | | − | | + | | − |
| 6 | : | 3 | + | 5 | = | 7 |
| = | | = | | = | | = |
| 8 | · | 1 | : | 8 | = | 1 |

1. zīm.

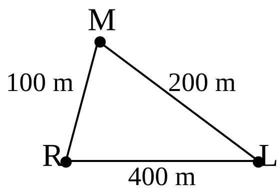


2. zīm.

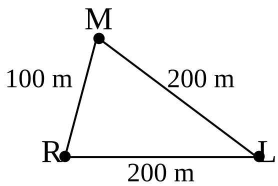
**2.** Skat., piem. 2. zīm.

**3.** Apzīmēsim Votivapas ar V, Šilišallas – ar S, Lubilellus – ar L, Rumpellus – ar R, Zimzapus – ar Z. Pēc uzdevuma nosacījumiem vienā koalīcijā kopā nevar darboties Z un V, kā arī S un R. Tātad koalīcijā var apvienoties ne vairāk kā 3 partijas. Iespējamās koalīcijas ir: V+S+L (75%), V+L+R (65%), L+Z+S (55%), L+Z+R (45%), V+S (55%), V+L (50%), V+R (45%), S+L (45%), S+Z (35%), L+R (35%), L+Z (30%), R+Z (25%). Četras no šīm koalīcijām apvieno vairāk nekā pusi no visiem deputātiem.

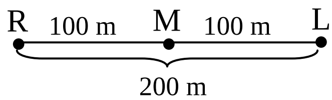
**4.** Ja Maksis un Leo abi būtu teikuši patiesību, tad būtu 5. zīm. attēlotā situācija. Taču tā būt nevar, jo trijstūra katru divu malu summai jābūt lielākai nekā trešā mala. Tātad vai nu Maksis, vai Leo melo.




5. zīm.




6. zīm.




7. zīm.

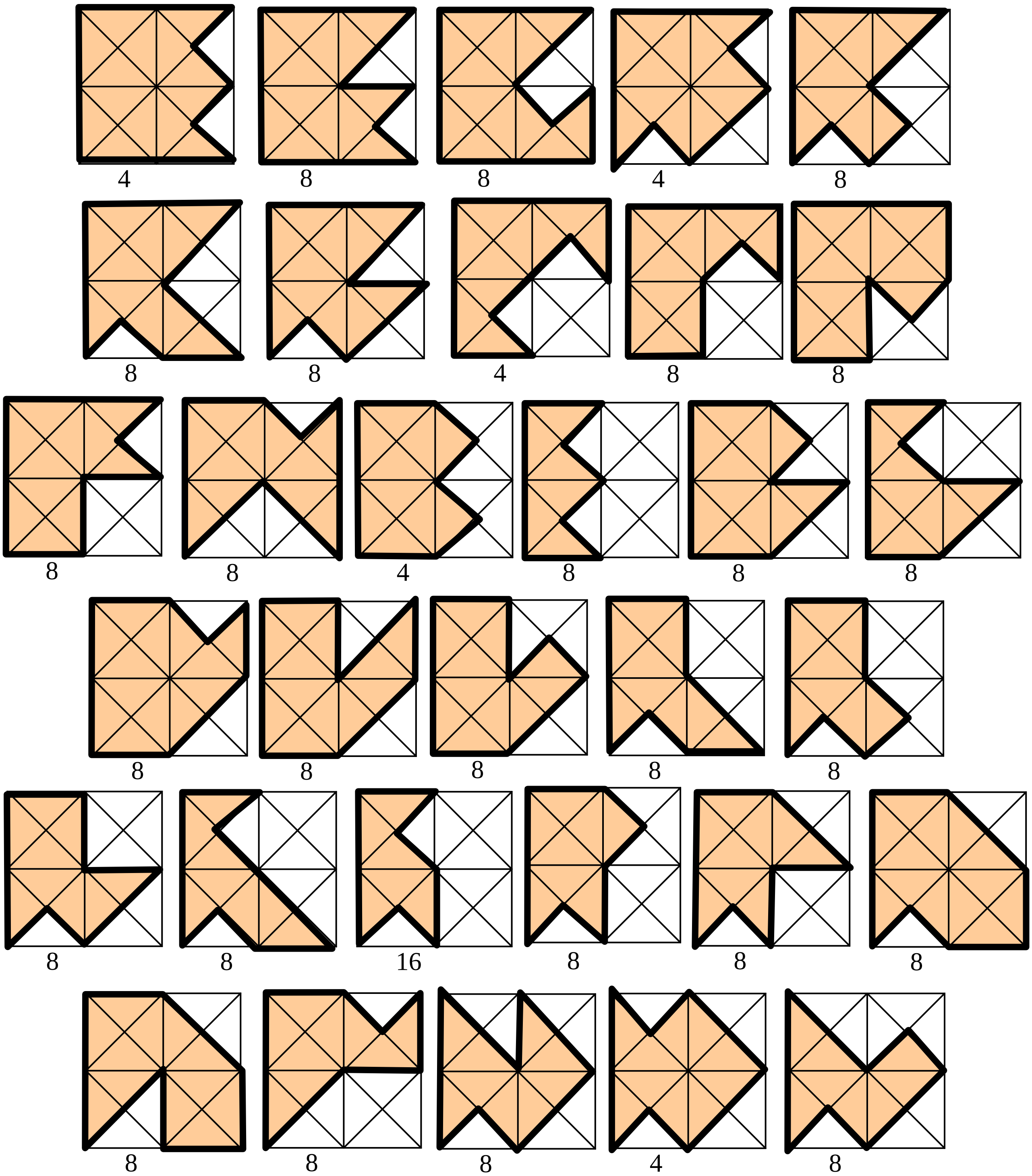
Ja patiesību teikuši Maksis un Ričs, iegūstam 6. zīm. attēloto situāciju, bet, ja patiesību teikuši Leo un Ričs – 7. zīm. attēloto situāciju.

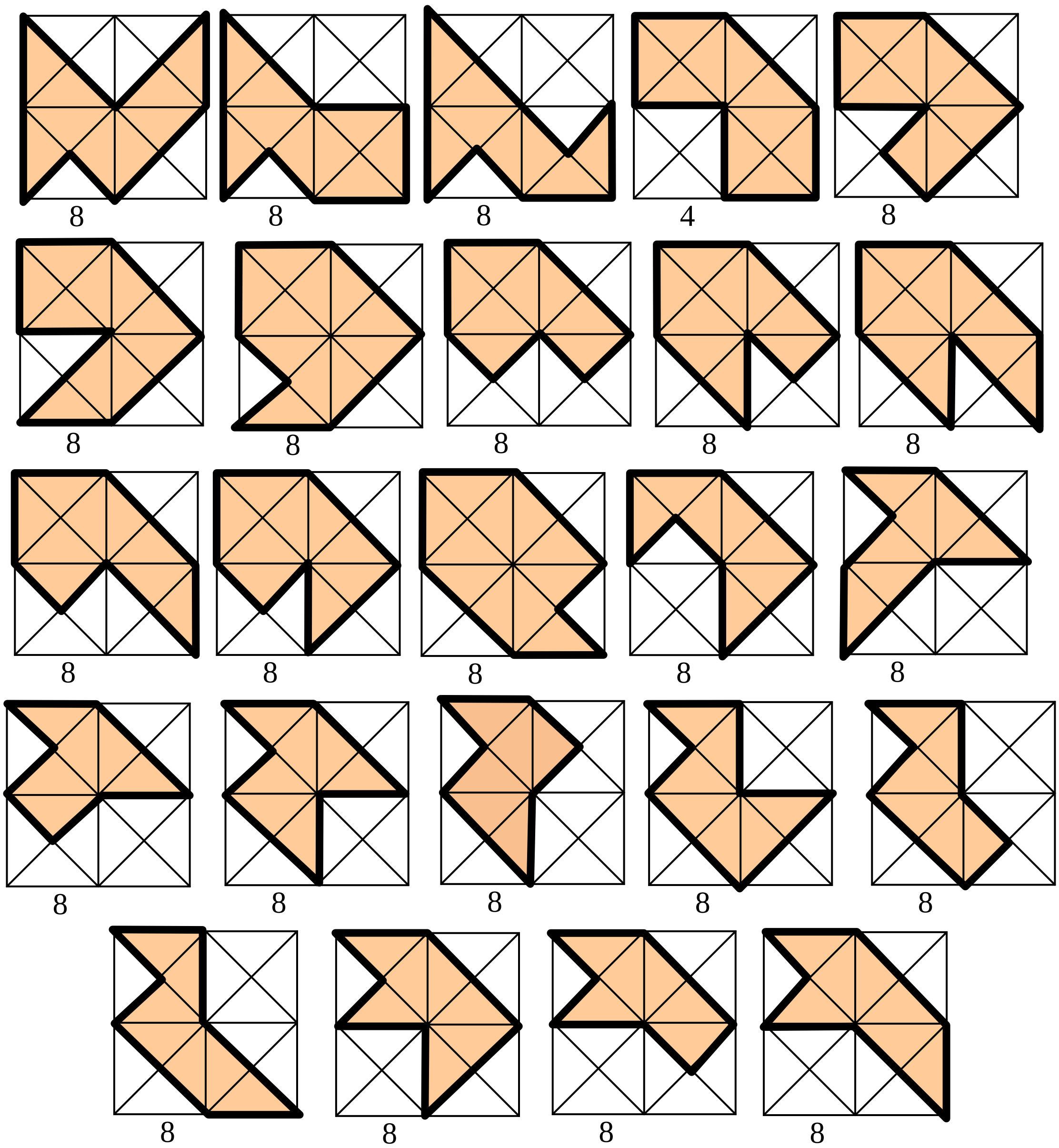
**5.** No 11 kartiņām var izveidot 165 dažādus kartiņu trijniekus, pie tam katrs trijnieka summa var pieņemt tikai 142 dažādas vērtības (no 6 līdz 147). Tāpēc būs divi trijnieki, kas pieņem vienādas vērtības. Atliek pārliecināties, ka ir divi tādi trijnieki, kuros visi seši skaitļi ir dažādi.

**2. kārtas uzdevumu atrisinājumi**

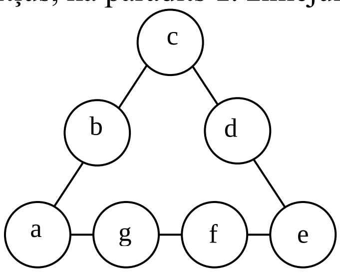
**1.** Trīs *obligātajās* kauzdītēs kopā ir 6,66 Ls. Katras kaudzītes izveidošanai mazākais nepieciešamais monētu skaits ir 4: 1,32 Ls=1 Ls + 20 sant. +10 sant. + 2 sant., 2,13 Ls=2 Ls+10 sant. +2 sant.+1 sant., 3,21 Ls=2 Ls+1 Ls+20 sant.+1 sant. Taču šādā gadījumā netiek izmantotas monētas 50 sant. un 5 sant. Tāpēc, lai izveidotu *obligātās* kaudzītes, būs jāizmanto vismaz 14 monētas – vienu 1 Ls monētu jāaizstāj ar divām 50 sant. monētām, un vienu 10 sant. monētu – ar divām 5 sant. monētām. Vēl sešas monētas Mārtiņš var izvēlēties patvaļīgi, tāpēc viņš ņemt visas 2 Ls monētas, tādējādi kopā iegūt 6,66 Ls+6·2 Ls=**18,66 Ls**.

**2.** Pavisam dotajā režģī var uzzīmēt 56 dažādus septiņstūrus; skat. zīmējumus. Seši no tiem ir simetriski, tos var pagriezt 4 dažādos veidos, vienu septiņstūri dotajā režģī var uzzīmēt 16 veidos, bet pārējos septiņstūrus – 8 veidos. Skaitlis zem katra septiņstūra norāda, cik veidos to var uzzīmēt šajā režģī. Piemēram, 8 veidi tiek iegūti vispirms doto figūru attēlojot simetriski vienai no kvadrāta simetrijas asīm, un pēc tam abas iegūtās figūras pagriežot par 90°, 180°, 270°. Ja dotajai figūrai nav nevienas simetrijas ass, visi 8 iegūtie atēli būs dažādi.






**3.** Apzīmēsim aplīšos ierakstītos skaitļus, kā parādīts 1. zīmējumā.

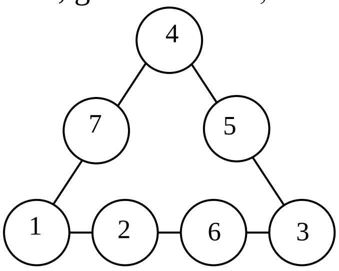



1. zīm.

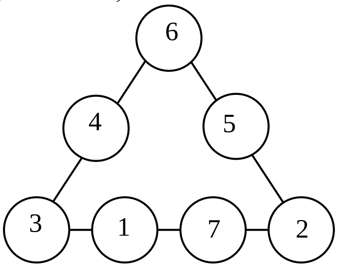
Tad
$$a+b+c=c+d+e=a+g+f+e=s,$$
$$a+b+c+d+e+f+g=1+2+3+4+5+6+7=28,$$
savukārt
$$3s=(a+b+c+d+e+f+g)+(a+c+e)=28+(a+c+e).$$
Tātad $28+(a+c+e)$ jādalās ar 3. $a+c+e$ mazākā vērtība var būt 6=1+2+3, bet lielākā 18=5+6+7. Balstoties uz šiem secinājumiem, tabulā apkoposim iespējamās *s* vērtības.

| 3$s$=28+$a$+$c$+$e$ | $s$ | $a$+$c$+$e$ |
|---|---|---|
| 36 | 12 | 8 |
| 39 | 13 | 11 |
| 42 | 14 | 14 |
| 45 | 15 | 17 |

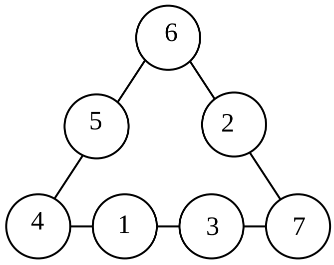
Vērtībām $s$=12, $s$=13 un $s$=15 piemēri doti attiecīgi 2., 3. un 4. zīmējumā. Gadījumā $s$=14 gan $a$+$b$+$c$=14, gan $a$+$c$+$e$=14, tātad jābūt $b$=$e$, kas nevar būt.



2. zīm.



3. zīm.



4. zīm.

Tātad uz vienas trijstūra malas uzrakstīto skaitļu summas var būt 12, 13 vai 15.

**4.** Skaitlim 8192=$2^{13}$ *garums* ir 13. Ja kādu no pirmreizinājiem 2 aizstāsim ar 3 vai lielāku skaitli, reizinājums būs vismaz $2^{12}\cdot 3$=12288 – vismaz piecciparu skaitlis. Arī $2^{14}$>9999. Tātad četrciparu skaitlim lielākais *garums* ir 13, un ir tikai viens tāds skaitlis.

**5. a)** Paņemot 77 bumbiņas, var gadīties, ka ir paņemtas visas 30 zilās, visas 30 dzeltenās, visas 10 baltās un melnās bumbiņas un tikai 7 sarkanās bumbiņas. Tāpēc, lai noteikti būtu vismaz 8 darkanās bumbiņas, no maisa jāizvelk 78 bumbiņas.

**b)** Ja tiks izvilktas 49 bumbiņas, var gadīties, ka ir paņemtas 13 zilās, 13 sarkanās, 13 dzeltenās un visas 10 baltās un melnās bumbiņas. Tāpēc, lai noteikti būtu vismaz 14 bumbiņas vienā krāsā, no maisa jāpaņem 50 bumbiņas.

**c)** Nav zināms, cik tieši melnās bumbiņas ir maisā: varbūt ir tikai viena. Tāpēc paņemot mazāk nekā 100 bumbiņas, var gadīties, ka vienīgā melnā bumbiņa palikusi maisā. Tāpēc, lai noteikti būtu izvilkta arī melnā bumbiņa, no maisa jāizņem visas 100 bumbiņas.

## 3. kārtas uzdevumu atrisinājumi

**1.** Ja divciparu skaitlim pieskaitot viencipar skaitli tiek iegūts trīsciparu skaitlis, tad summas simtu skaits ir H=1, bet divciparu saskaitāmajam jābūt vismaz 91, tātad A=9. Līdz ar to vienīgais atrisinājums ir 91+9=100.

**2.** Apzīmēsim ģimenes locekļu vecumus attiecīgi ar A, B, C, D un E. Zināms, ka A+B+C+D+E=88, A+B=39, B+C=19, C+D=44, D+E=38.

Tad E=(A+B+C+D+E)-(A+B)-(C+D)=88-39-44=5, D=(D+E)-E=33, C=(C+D)-D=11, B=(B+C)-C=8, A=(A+B)-B=31.

Tātad Annai ir 31 gads, Beātei – 8 gadi, Centim – 11 gadi, Didzim – 33 gadi un Edgaram – 5 gadi.

**3.** No dotajiem stienīšiem var izveidot tikai viena veida trijstūri – izmantojot stienīšus 3 dm, 5 dm un 7 dm. Citos gadījumos neizpildās trijstūra nevienādība – garākā mala ir garāka vai vienāda ar īsāko malu summu.

Četrstūrus var izveidot no četriem stienīšu komplektiem: 1 dm, 2 dm, 3 dm, 5 dm; 1 dm, 2 dm, 5 dm, 7 dm; 1 dm, 3 dm, 5 dm, 7 dm; 2 dm, 3 dm, 5 dm, 7 dm (tā kā 1 dm+2 dm+3 dm<7 dm, no šiem stienīšiem izveidot četrstūri nevar). Katra komplekta stienīšus var sakārtot 3 dažādos veidos (piem., 1 2 3 5; 1 3 2 5; 1 3 5 2), bet no katra sakārtojuma, mainot leņķus, var iegūt bezgalīgi daudz dažādus četrstūrus (piem, savienojot šos stienīšus galapuntos ar kustīgu savienojumu vai uzverot uz aukliņas četrus attiecīgā garuma salmiņus un aukliņas galus sasienot kopā, iegūstam kustīgu četrstūri, kuram brīvi varam mainīt leņķus; savukārt līdzīgā veidā savienojot trīs stienīšus, iegūstam vienu noteiktu trijstūri).

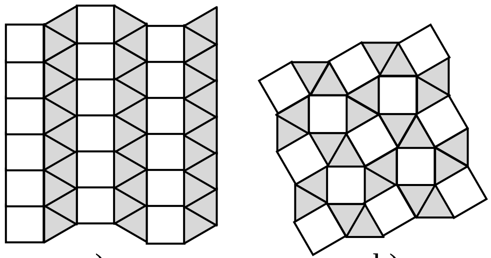
Izmantojot visu piecu garumu stienīšus varam izveidot piecstūri. Pavisam šos stienīšus var sakārtot 12 dažādos veidos. (Piecus stienīšus rindā var sakārtot $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ veidos, taču, izveidojot slēgtu lauztu līniju, ir vienalga, ar kuru stienīti sāk skaitīt, tāpēc no piecām virknēm var iegūt vienu un to pašu piecstūri, piem., no virknēm 1 2 3 4 5; 2 3 4 5 1; 3 4 5 1 2; 4 5 1 2 3; 5 1 2 3 4, savienojot to galapunktus, tiek iegūts viens un tas pats daudzstūris. Arī uzskaitot daudzstūra malas pretējā virzienā netiek iegūts jauns daudzstūris, t.i., piem., piecstūri, kuru malas ir izvietotas secībā 1 2 3 4 5 un 1 5 4 3 2, ir vienādi, ja atbilstošie leņķi ir vienādi. Tātad piecus stienīšus var sakārtot $120:5:2=12$ dažādos veidos.). Līdzīgi kā četrstūru gadījumā, arī no katra piecu stienīšu sakārtojuma, mainot leņķus, var iegūt bezgalīgi daudz piecpiecstūrus.

**4. a)** Virzienā Rīga – Carnikava no Rīgas var nopirkt 11 dažādas biļetes, no Zemitāniem – 10 dažādas biļetes, …, no Garupes – 1 biļeti, tātad pavisam kopā vienā virzienā ir $11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=66$ dažādas biļetes, bet abos virzienos kopā ir $2 \cdot 66=132$ dažādas biļetes.

**b)** <u>Atbilde:</u> nē, nevar apgalvot, ka noteikti ir divi pasažieri ar vienādās biļetēm.

Piemēram, posmā Ziemeļblāzma – Vecdaugava vilcienā var atrasties pasažieri, kas iekāpuši kādā no iepriekšējām sešām pieturām un brauc līdz kādai no nākamajām sešām pieturām, tātad tiem var būt pavisam $6 \cdot 6=36$ dažādas biļetes. Ja šajā posmā vilcienā ir 35 pasažieri, var gadīties, ka viņiem visiem ir dažādas biļetes.

**5.** Skat., piem., 1. a) un b) zīmējumus. Katru no šiem rakstiem var turpināt, noklājot visu kvadrātu 20 cm × 20 cm.



a) b)

1. zīm.

## 4. kārtas uzdevumu atrisinājumi

**1. Atbilde: a)** Piemēram, 102, 204, 306, 816, 1020 u.c.

**b)** Piemēram, 625, 3125, 9375, 6250 u.c.

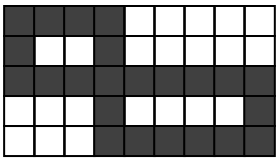
**Risinājums.** Meklējamo skaitli apzīmēsim ar $\overline{aB} = a \cdot 1\underbrace{0...0}_{k \ nulles} + B$, kur $a$ ir skaitļa pirmais cipars, bet $B$ ir skaitlis, kas paliek, nosvītrojot pirmo ciparu $a$ (pieņemsim, ka tam ir $k$ cipari).

Tad **a)** gadījumā ir spēkā vienādība $\overline{aB} = a \cdot 1\underbrace{0...0}_{k \ nulles} + B = 51 \cdot B$ jeb $a \cdot 1\underbrace{0...0}_{k \ nulles} = 50 \cdot B$. Tātad $B$ ir jābūt pāra skaitlim, bet $a$ var būt jebkurš cipars no 1 līdz 9. Piemēram, ja $B$ vērtības 2 (tad meklējais skaitlis ir 102), 4 (204), 6 (306), 8 (408), 10 (510), 12 (612), 14 (714), 16 (816), 18 (918), kā arī visi šie skaitļi, pareizināti ar 10, 100, 1000 utt.

**b)** gadījumā jāizpildās vienādībai $\overline{aB} = a \cdot 1\underbrace{0...0}_{k \ nulles} + B = 25 \cdot B$ jeb $a \cdot 1\underbrace{0...0}_{k \ nulles} = 24 \cdot B = 3 \cdot 8 \cdot B$.

Tā kā skaitlis 10…0 nedalās ar 3, tad $a$ jādalās ar 3 (tātad $a$ var būt 3, 6 vai 9), bet $B$ jādalās ar 5). Ja $a$=3, tad $B$=125 un meklējamais skaitlis ir 3125 (kā arī 31250, 312500 utt.), ja $a$=6, tad $B$=25 un meklējamais skaitlis ir 625 (kā arī 6250, 62500 utt.), ja $a$=9, tad $B$=375 un meklējamais skaitlis ir 9375 (kā arī 93750, 937500 utt.).

**2. a)** Jā, var, skat., piem., 1. zīm.



1. zīm.

**b)** Nē, nevar. Pieņemsi, ka izdevies nokrāsot 23 rūtiņas, lai katrai būtu nepāra skaits kaimiņu. Saskaitīsim **visas rūtiņu malas, kas kopīgas divām rūtiņām**, ieskaitot katru malu tik reizes, cik rūtiņām tā pieder. Tā kā ir 23 (nepāra skaits) rūtiņu, un katrai ir nepāra skaits kaimiņu (tātad no katras rūtiņas tiek ieskaitīts nepāra skaits malu), tad kopā iegūstam nepāra skaitu. Taču katra skaitāmā mala ir kopīga tieši divām kaimiņu rūtiņām, tātad ir ieskaitīta tieši divas reizes. Tāpēc to kopējam skaitam jābūt pāra skaitlim. Bet viens un tas skaits nevar būt reizē pāra un nepāra skaitlis, tātad tāda situācija nav iespējama.

**3. a)** Sadalīsim visus izvēlētos skaitļus septiņās grupās:
1. grupā – skaitļi, kas dalās ar 7;
2. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 1, dalot ar 7;
3. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 2, dalot ar 7;
4. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 3, dalot ar 7;
5. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 4, dalot ar 7;
6. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 5, dalot ar 7;
7. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 6, dalot ar 7.

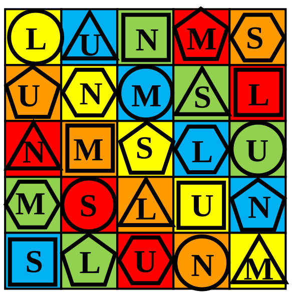
Tā kā $7\cdot 14=98<100$, tad kādā no grupā būs vismaz 15 skaitļi, tie der par meklētajiem: ja divi skaitļi dod vienādu atlikumu, dalot ar 7, tad to starpība dalās ar 7.

**b)** Piemēram, apskatot visus naturālos skaitļus no 1 līdz 100, starp tiem nav 16 tādu, kas dod vienādu atlikumu, dalot ar 7, tātad ne vienmēr varēs atrast 16 skaitļus ar minēto īpašību.

**4.** Apzīmēsim komandas dalībnieku skaitu ar $n$, ar $k$ apzīmēsim, cik pilnas reizes tika apskriets stadions, līdz stafete beidzās.

Tad $75\cdot n=330\cdot x$ jeb $5\cdot n=22\cdot x$ pie tam $x$ ir mazākais no skaitļiem, ar kuru šī vienādība ir patiesa. Tātad $x=5$ un $n=22$. Tātad komandā ir 22 dalībnieki, pavisam kopā viņi noskrēja 330 m $\cdot 5=1650$ m=1 km 650 m. Visi stafetes kociņa nodošanas punkti ir dažādi, jo pretējā gadījumā finišs tiktu sasniegts jau ātrāk, tātad pavisam ir 22 šādi punkti (ieskaitot startu/finišu), pie tam tie ir izvietoti pa stadionu vienādos attālumos ik pēc 330 m : 22=15 m.

**5.** Skat., piem., 2. zīm.




2. zīm.

**5. kārtas uzdevumu atrisinājumi**

**1. Atbilde:** 6 dienas.

No sestdienas līdz otrdienai pa vidu ir divas dienas (svētdiena un pirmdiena), bet no otrdienas līdz sestdienai – trīs dienas (trešdiena, ceturtdiena un piektdiena). Lai iespējami daudz dienas pēc kārtas Brunis drīkstētu spēlēt datorspēles, dienās, kas nav otrdiena vai sestdiena, jābūt nepāra datumiem. Tā kā viena mēneša ietvaros datumi mainās pamīšus nepāra – pāra – pāra…, tad divas dienas pēc kārtas nepāra datumi var būt tikai tad, kad mainās mēneši (piem., viena mēneša 31. datums un nākamā mēneša 1. datums); trīs dienas pēc kārtas nepāra datumi nevar būt. Tātad, lielākais secīgu *labo* dienu skaits būs, piemēram, piektdiena, **29**. datums, **sestdiena**, 30. datums, svētdiena, **31**. datums, pirmdiena, **1**. datums, **otrdiena,** 2. datums, trešdiena, **3**. datums. (Iepriekšējā diena ir ceturtdiena, 28. datums un nākamā diena ir ceturtdiena, 4. datums – nav *labās* dienas.)

**2.** Uzdevumā aprakstītajā veidā sadalot taisnstūri, mazākā iegūta kvadrāta malas garums būs vienāds ar sākotnējā taisnstūra malu garumu lielāko kopīgo dalītāju (dotais process ilustrē Eiklīda algoritmu lielākā kopīga dalītāja atrašanu). Tātad mazākā iegūtā kvadrāta malas garums ir LKD(141; 324)=3 cm.

No taisnstūra 141 cm × 324 cm var nogriezt **2 kvadrātus** 141 cm × 141 cm, paliek taisnstūris 141 cm × 42 cm. No tā var nogriezt **3 kvadrātus** 42 cm × 42 cm, paliek taisnstūris 42 cm × 15 cm. No tā savukārt var nogriezt **2 kvadrātus** 15 cm × 15 cm, paliek taisnstūris 15 cm × 12 cm. No nogriežot **1 kvadrātu** 12 cm × 12 cm, paliek taisnstūris 12 cm × 3 cm, ko var sadalīt **4 kvadrātos** 3 cm × 3 cm. Tātad pavisam dalījumā ir iegūti **12 kvadrāti**.

**3.** Tā kā pa līdzenu vietu abi slēpo ar vienādu ātrumu, tad līdzenu posmu garums neietekmē to, kurš finišēs pirmais, tāpēc to var neņemt vērā. Pieņemsim, ka maršrutā *a* km ved kalnā augšup, bet *b* km – no kalna lejā.

Izmantojot formulu *ceļš* = *ātrums* · *laiks*, izteiksim, cik ilgā laikā maršruta *slīpos* posmus veica mazdēls: $t_m = \frac{a}{4} + \frac{b}{20}$ un vectēvs: $t_v = \frac{a}{6} + \frac{b}{8}$.

Ja pirmais finišēja mazdēls, tad $t_m < t_v$ jeb $\frac{a}{4} + \frac{b}{20} < \frac{a}{6} + \frac{b}{8} \Rightarrow \frac{1}{4}a - \frac{1}{6}a < \frac{1}{8}b - \frac{1}{20}b \Rightarrow$ $\frac{1}{4}a - \frac{1}{6}a < \frac{1}{8}b - \frac{1}{20}b \Rightarrow \frac{1}{12}a < \frac{3}{40}b \Rightarrow a < \frac{36}{40}b < b$, tātad nobraucieni no kalna bija vairāk nekā augšup kalnā.

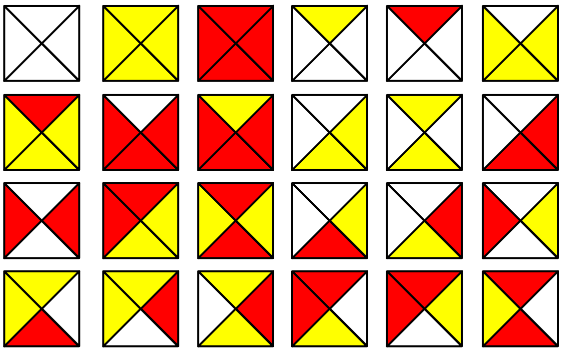
Ja pirmais finišēja vectēvs, tad $t_m > t_v$ jeb $\frac{a}{4} + \frac{b}{20} > \frac{a}{6} + \frac{b}{8} \Rightarrow \frac{1}{12}a > \frac{3}{40}b \Rightarrow$ $a > \frac{36}{40}b = \frac{9}{10}b$. Šajā gadījumā nevar viennozīmīgi pateikt, vai $a > b$, $a = b$ vai arī $a < b$, jo iegūto nevienādību apmierina, piem., $a$=11 km > $b$ = 10 km, $a$=10 km = $b$ = 10 km, kā arī $a$=9,5 km < $b$ = 10 km.

**4.** Apskatīsim, cik veidos, lasot atļautajā veidā, var nonākt katrā rūtiņā (skat. 1. zīm.). (Lai aizpildītu tabulu, pieņemam, ka katrā rūtiņā ar burtu K varam nonākt 1 veidā, bet pārējās rūtiņās var nonākt tikai no rūtiņas pa kreisi vai no rūtiņas augšā, tātad ir jāsaskaita abās šajās rūtiņas ierakstītos skaitļus.) Tā kā vārds KARTUPELIS var beigties jebkurā rūtiņā ar burtu S, lai noteiktu, cik veidos to var izlasīt, jāsaskaita, cik veidos var nonākt katrā rūtiņā ar burtu S, t.i., 1+10+46+130+256+382+466+502+511+512=2816 veidos.

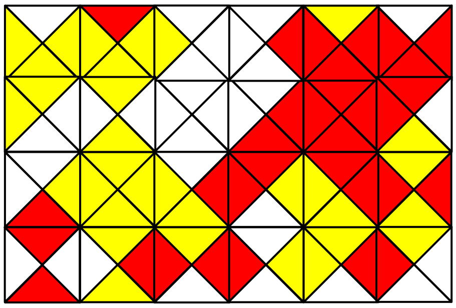
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 1 | 1 | 1R | T | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| | | | | | | | 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | 16 | 22 | 29 | 37 | 46 | | |
| | | | | | | 1 | 2 | 4 | 8 | 15 | 26 | 42 | 64 | 93 | 130 | | | |
| | | | | | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 31 | 57 | 99 | 163 | 256 | | | | |
| | | | | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 63 | 120 | 219 | 382 | | | | | |
| | | | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 127 | 247 | 466 | | | | | | |
| | | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 255 | 502 | | | | | | | |
| | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 511 | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | | | | | | | | | |

1. zīm.

**5.** Pavisam ir 24 dažādi *trīskrāsu kvadrātdomino*, skat. 2. zīm. Piemēru, kā no tiem var salikt taisnstūri, skat. 3. zīm.



2. zīm.



3. zīm.