**Jauno matemātiķu konkurss 2012./13. m.g.**

**1. kārtas uzdevumu atrisinājumi**

**1.** ***Aritmētiskais šifrs***

Tā kā D+D=D, tad **D=0**.

Ja saskaitot divus četrciparu skaitļus summā tika iegūts piecciparu skaitlis, tad summas pirmais cipars var būt tikai 1, tātad **E=1**.

Esam ieguvuši, ka ABC0+AB10=10CA0. Tātad **A=5**: ja A>5, tad A+A>10; ja A<5, tad A+A≤8 un pārnesums no iepriekšējās šķiras nevar pārsniegt 1, tāpēc summa būs ≤9.

No 5BC0+5B10=10C50 iegūstam, ka **C=4** un **B=2** un aizšifrētais piemērs bija **5240+5210=10450**.

**2.** ***Neparastais bankomāts***

**a)** Jā, var. Ievērosim, ka Ellai visu laiku ir tikai 2 banknotes – sākumā viņai bija divas banknotes, bet ievadot bankomātā divas banknotes, tas atgriež atkal tikai divas banknotes. Tātad nākamjā maiņā var izmantot tikai tās divas banknotes, kas tika iegūtas iepriekšējā maiņā.

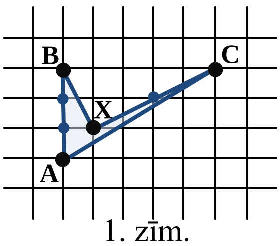
Pieraksts $(x, y) \to (a, b)$ nozīmē, ka ievadot banknotes ar vērtībam $x$ un $y$, bankomāts izdod banknotes ar vērtībām $(a, b)$.

(1, 1)→(3, 1), (1, 3)→(5, 1), (1, 5)→(7, 3), (3, 7)→(**13**, 1).

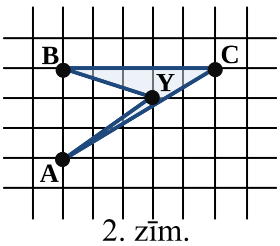
**b)** Ievērosim, ka, ja $x$ un $y$ abi ir nepāra skaitļi, tad gan $(2 \cdot x + y)$ , gan $(2 \cdot x - y)$, $(y - 2 \cdot x)$ būs nepāra skaitļi. Tā kā Ellai sākumā abas banknotes bija 1 (nepāra skaitlis) salāra vērtībā, tad arī vairākkārtēju maiņu rezultātā viņa var iegūt **tikai** banknotes, kuru vērtība ir nepāra skaits salāru. Tāpēc 2 salāru banknote nekad netiks iegūta.

**3.** ***Mazākais četrstūris***

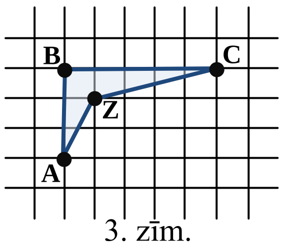
**1. risinājums.** Lai iegūtu četrstūri ar mazāko iespējamo laukumu, ceturtajai virsotnei jātrodas trijstūra ABC iešpusē, pie tam tā, lai četrstūris veidotos no trijstūra ABC izgriežot trijstūri ar vislielāko iespējamo laukumu. Tā kā ir jāpievieno tikai viena jauna virsotne, tad izgrieztajam trijstūrim būs divas sākotnējā trijstūra ABC virsotnes (jeb viena trijstūra ABC mala). Apskatīsim, kādi ir lielākie iespējamie izgrieztie trijstūri, kam viena no malām ir AB, BC vai AC un trešā virsotne ir rūtiņas virsotne trijstūra ABC iekšpusē: 1. zīm. tiek izgriezts trijstūris BCX, iegūtā četrstūra ABXC laukums ir 2,5 rūtiņas; 2. zīm. tiek izgriezts trijstūris ABY, iegūtā četrstūra AYBC laukums ir 3 rūtiņas; 3. zīm. tiek izgriezts trijstūris ACZ, iegūtā četrstūra ABCZ laukums ir 4 rūtiņas. Tātad, lai iegūtu četrstūri ar vismazāko laukumu, kā ceturtais jānokrāso punkts X (skat. 1. zīm.) un jāizveido četrstūris ABXC.



1. zīm.



2. zīm.



3. zīm.

**2. risinājums.** Daudzstūriem, kuru visas virsotnes ir rūtiņu virsotnēs, laukumu var aprēķināt pēc Pīka formulas $S = i + \frac{r}{2} - 1$, kur $i$ ir daudzstūra iekšpusē esošo rūtiņu virsotņu skaits, r – uz daudzstūra kontūra esošo rūtiņu virsotņu skaits (ieskaitot arī daudzstūra virsotnes). Tātad, lai četrstūra laukums būtu mazākais iespējamais, tā iekšpusē nedrīkst atrasties neviena rūtiņas virsotne, kā rī uz kontūra jābūt iespējami maz rūtiņu virsotnēm. Tā kā iegūtajam četrstūrim divas no malām būs trijstūra ABC malas, tad tās būs malas AC (uz tās nav nevienas rūtiņu virsotnes, neskaitot A un

C) un mala AB (uz tās bez virsotnēm A un B ir vēl divas rūtiņu virsotnes bet uz malas BC bez virsotnēm ir vēl četras citas rūtiņu virsotnes). Taču mēģinot izvietot ceturto punktu X tā, lai četrstūra ABXC iekšpusē nebūtu neviena rūtiņas virsotne, nav iespējams panākt lai ne mala BX, ne mala CX neietu ne caur vienu citu rūtiņas virsotni. Tātad uz četrstūra ABXC kontūra ir vismaz 7 rūtiņu virsotnes (4 četrstūra virsotnes + 2 punkti uz malas AB + 1 punkts uz malas XC).

Ja kā četrstūra malas būtu malas BC un AC, tad uz kontūra būtu vismaz 8 rūtiņu virsotnes, tātad četrstūra ABXC laukums vienalga ir mazāks.

Tātad iegūstamā četrstūra laukums ir vismaz $0+\frac{7}{2}-1=2{,}5$ rūtiņas. Tas, ka var iegūt četrstūri ar laukumu 2,5 rūtiņas, parādīts 1. zīm.

**4.** ***Par pankūkām***

Pankūku dalīšanu varētu veikt sekojoši.

Vispirms pankūku ar diametru 11 cm uzliekam uz jebkura šķīvja (3 iespējas). Pēc tam 12 cm lielo pankūku noliekam uz viena no tiem šķīvjiem, uz kura nav nolikta 11 cm lielā pankūka (2 iespējas). Tad izvēlamies vienu no diviem šķīvjiem, uz kura nav 12 cm lielā pankūka, un uzliekam 13 cm lielo pankūku. Tā pēc kārtas izvēlamies, uz kura šķīvja tiks uzlikta 14 cm, 15 cm un 16 cm lielās pankūkas (katrai būs 2 iespējas).

Tātad pavisam pankūkas pa šķīvjiem var sadalīt $3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=96$ veidos. Taču starp šiem veidiem ir arī tādi, kad viens no šķīvjiem ir palicis tukšs. Tas ir iespējams tikai tādā gadījumā, ja uz viena šķīvja ir pankūkas 11 cm, 13 cm, 15 cm, bet uz otra – 12 cm, 14 cm, 16 cm. Pie tam šie gadījumi pa trīs šķīvjiem var būt izkārtojušies 6 veidos.

Tātad uzdevuma prasībām atbilstošo sadalījumu skaits ir 96-6=**90**.

Savukārt, ja nebūtu svarīga šķīvju secība, t.i., svarīgi tikai „pankūku komplekti” (piemēram, ir iepriekšēja vienošanās, ka Didzim vienmēr tiek šķīvis, uz kura ir 11 cm pankūka, mammai – šķīvis, uz kura ir 12 cm pankūka, bet tētim – trešais šķīvis), tad uzdevuma atbilde būtu 90:6=15 veidos, jo katru „pankūku komplektu” pa trīs šķīvjiem var sadalīt $3\cdot2\cdot1=6$ veidos.

**5.** ***Noslēpumainie mākslinieki***

Tā kā Baltiņam nav blondi mati un viņš nav arī tumšmatis (jo tumšmatis bija otrs runātājs), tad Baltiņam ir rudi mati.

Tā kā Melnītim nav tumši mati un nav arī rudi mati (jo rudi mati ir Baltiņam), tad Melnītim ir blondi mati.

No tā savukārt seko, ka gleznotājs Rudais ir tumšmatis.

## 2. kārtas uzdevumu atrisinājumi

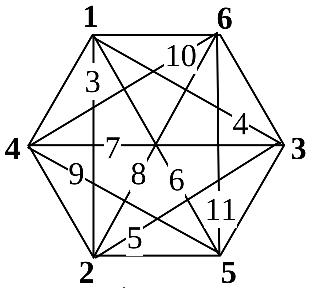
**1.** ***Neparastais skaitlis***

**Atbilde:** 95210.

Tā kā jāmeklē vislielākais skaitlis, tad pirmajam ciparam jābūt iespējami lielam, t.i., 9. Tātad pārējo četru ciparu summa nedrīkst pārsniegt 8. Visiem cipariem jābūt dažādiem, jo katrs cipars ir lielāks nekā tam sekojošo ciparu summa. Tāpēc lielākās iespējamās pārējo ciparu vērtības ir 5, 2, 1 un 0.

**2.** ***Sešstūra virsotņu numurēšana***

**Atbilde:** Jā var gadīties, skat., piem., 4. zīm.




4. zīm.

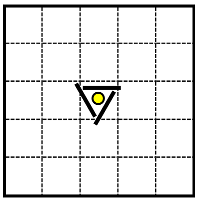
| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **2** | | | 5 | 6 | 7 | 8 |
| **3** | | | | 7 | 8 | 9 |
| **4** | | | | | 9 | 10 |
| **5** | | | | | | 11 |
| **6** | | | | | | |

5. zīm.

Izliektam 6-stūrim ir 9 diagonāles. No skaitļiem 1, 2, 3, 4, 5, un 6, ņemot to summas pa divi, var iegūt 9 dažādas vērtības (skat. 5. zīm.). Tātad ir jāparādās visām iespējamajām summu vērtībām. Ievērsosim, ka četras summas var iegūt tikai vienā veidā: 3=1+2, 4=1+3, 10=4+6 un 11=5+6. Tātad šiem skaitļiem jāatrodas diagonāļu galapunktos.

**3.** ***Istaba un prožektors***

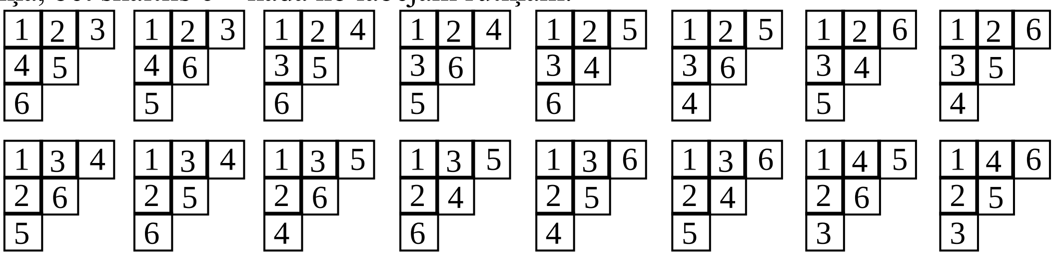
**Atbilde:** pietiek ar 3 prožektoriem, skat., piem. 6. zīm. (aizslietņi novietoti diezgan tuvu viens otram, bet nesaskaras).



6. zīm.

**4.** ***Cipari rūtiņās***

Pavisam to var izdarīt 16 veidos, skat. 7. zīm. Ievērojam, ka skaitlis 1 var atrasties tikai kreisajā augšējā rūtiņā, bet skaitlis 6 – kādā no labējām rūtiņām.




7. zīm.

**5.** ***Ceļu būve***

Uzvarēt var firma „CAB”, ja rīkosies sekojoši: ja firma „BAC” ir noasfaltējusi kādu ceļa, tad nākamajā gājienā firma „CAB” paskatās, vai ar viena posma noasfaltēšanu jau nevar uzvarēt (t.i., trūkst tieši viens posms, kas veido nepārtrauktu noasfaltētu ceļu no X uz Y). Ja ir tāds viens posms, tad asfaltē to. Ja tāda posma nav, tad „CAB” asfaltē posmu, kas ir centrāli simetrisks „BAC” tikko noasfaltētajam posmam. Tādējādi pēc katra „CAB” gājiena noasfaltētie posmi veidos centrāli simetrisku attēlu, kurā ar viena posma noasfaltēšanu noteikti nepietiks, lai pabeigtu ceļu. Tāpēc firma „BAC” nākamajā gājienā uzvarēt nevarēs un firma „CAB” varēs izdarīt nākamo gājienu.

## 3. kārtas uzdevumu atrisinājumi

**1.** ***Atrodi skaitli!***

Apzīmēsim skaitļa N desmitu ciparu ar a, bet vienu ciparu – ar b. Tad N=10a+b.

No (1) nosacījuma iegūstam $100a+50+b=10a+b+230$, no kurienes seko, ka a=2.

No otrā nosacījuma iegūstam, ka $500+10a+b=k(10a+b)$. Zinot, ka $a$=2, izteiksim $k$: $k=\frac{520+b}{20+b}=\frac{(520+26b)-25b}{20+b}=26-\frac{25b}{20+b}$. Tā kā $k$ ir vesels skaitlis, tad daļas $\frac{25b}{20+b}$ vērtība arī vesels skaitlis, t.i., $25b$ dalās ar $(20+b)$, tātad $b$ dalās ar 5. Tā kā $b$ ir cipars, tad $b$ var būt tikai 0 vai 5.

Pārbaudot redzam, ka abi skaitļi **20** un **25** apmierina uzdevuma nosacījumus.

**2. *Trijstūris***

No trijstūra nevienādības seko, ka trešās malas garums ir mazāks nekā pārējo divu malu garumu summa un lielāks nekā pārējo divu malu garumu starpība. Ja trešās malas garums ir $a$ centimetri, kur $6<a<20$, tad trijstūra perimetrs $P=20+a$ centimetri un $26<P<40$. Tā kā $P$ ir pirmskaitlis, tad tas var būt 29 *cm*, 31 *cm* vai 37 *cm*. Tad atbilstoši trijstūra trešās malas garums $a$ var būt **9 *cm***, **11 *cm*** vai **17 *cm***.

**3. *Skaitļu virkne***

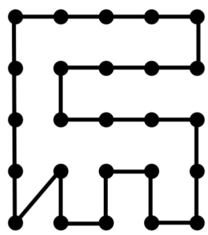
Apskatīsim virknes, kuru pirmie locekļi ir dotie skaitļi. Ievērosim: ja virknē kāds skaitlis atkārtojas, tad visa turpmākā virkne arī periodiski atkārtosies, jo katrs nākamais virknes loceklis ir iegūstams no iepriekšējā virknes locekļa.

2, 4, 4, …
3, 6, 5, 10, 7, 14, 9, 6, 5, …
**4**, 4, …
**5**, 10, 7, 14, 9, 6, 5, …
**6**, 5, 10, 7, 14, 9, 6, …
**7**, 14, 9, 6, 5, 10, 7, …
8, 4, 4, …
**9**, 6, 5, 10, 7, 14, 9, …

Redzam, ka virknē pirmais loceklis vēl atkārtosies gadījumos, kad virknes pirmais loceklis ir 4, 5, 6, 7 vai 9. Savukārt pārējos gadījumos virknes pirmais loceklis neatkārtosies. Piemēram, 2 un 3 noteikti nevar atkārtoties, jo mazākā divu pirmskaitļu summa var būt 2+2=4>3.

**4. *Lauztā līnija***

Skat., piem., 8. zīm.



8. zīm.

**5. *Meļi un bruņinieki***

Ja doto apgalvojumu „*Manā ciltī man ir vairāk draugu nekā kaimiņu ciltī.*" ir izteicis bruņinieks, tad tas ir patiess un nozīmē, ka bruņiniekam draugu-bruņinieku ir vairāk nekā draugu-meļu. Savukārt, ja šo apgalvojumu ir izteicis melis, tad tas nozīmē, ka melim draugu-meļu ir ne vairāk kā draugu-bruņinieku. Tātad katram salas iemītniekam draugu-meļu ir ne vairāk kā draugu-bruņinieku.

Var gadīties, ka meļu ir vairāk nekā bruņinieku. Piemēram, uz salas dzīvo 3 bruņinieki, kas visi draudzējas savā starpā, bet neviens nedaudzējas ne ar vienu meli (tātad katram bruņiniekam ir 2 draugi-bruņinieki un 0 draugi-meļi), un 4 meļi, kas ne ar vienu nedraudzējas (tātad katram bruņiniekam ir 0 draugi-bruņinieki un 0 draugi-meļi). Visi uzdevuma nosacījumi ir apmierināti.

Piezīme. Dotais nav vienīgais piemērs, kas apmierina uzdevuma nosacījumus.

## 4. kārtas uzdevumu atrisinājumi

**1.** ***Daļas, daļas, daļas…***

$$1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{5}}}}=1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\left(1:\frac{19}{5}\right)}}=1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\frac{5}{19}}}=$$

$$=1-\cfrac{1}{2-\left(1:\frac{52}{19}\right)}=1-\cfrac{1}{2-\frac{19}{52}}=1-\left(1:\frac{85}{52}\right)=1-\frac{52}{85}=\frac{33}{85}$$

**2.** ***Akmeņu dalīšana***

Katrā kaudzītē jābūt 111:3=37 akmentiņiem.

**A.** Ievērosim, ka sešus akmentiņus, kas sver attiecīgi $n$ g, $n$+1 g, $n$+2 g, $n$+3 g, $n$+4 g, $n$+5 g, var sadalīt trīs kaudzītēs tā, ka katrā kaudzītē ir vienāds skaits akmeņu un vienāda to kopējā masa, piem., 1. kaudzīte: $n$ g un $n$+5 g, 2. kaudzītē: $n$+1 g un $n$+4 g, 3. kaudzītē: $n$+2 g un $n$+3 g.

**B.** Arī akmeņus, kas sver 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g, 6 g, 7 g, 8 g, 9 g, var sadalīt trīs kaudzītēs minētajā veidā, piem., 1. kaudzīte: 1 g, 6 g un 8 g, 2. kaudzītē: 2 g, 4 g un 9 g, 3. kaudzītē: 3 g, 5 g un 7 g.

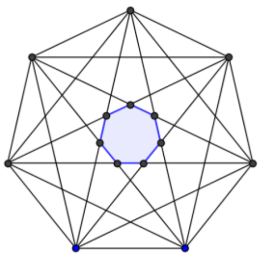
Tā kā 111=9+6·17, tad Anna akmeņus var sadalīt sekojošā veidā: vispirms akmeņus, kas sver 1 g – 9 g sadala tā, kā aprakstīts B punktā, pārējos akmeņus vispirms sadala kaudzītēs pa sešiem pēc kārtas (pēc svara) sekojošiem akmeņiem, katru no šīm kaudzītēm sadala trīs daļās kā aprakstīts A punktā un pievieno pa vienai daļai pie katras no veidojamajām kaudzēm.

*Piezīme. Uzdevumam ir arī daudzi citi atrisinājumi.*

**3.** ***Daudzstūrainie daudzstūri***

**Atbilde:** 7 malas.

Griešanas rezultātā iegūto daudzstūra malas var atrasties vai nu uz dotā septiņstūra malām vai diagonālēm. Pie tam **ne vairāk kā divas** no vienas virsotnes izejošās diagonāles var saturēt kāda viena mazā daudzstūra malas. Tā kā katra diagonāle savieno divas virsotnes, tad nevienam iegūtajam mazajam daudzstūrim nevar būt vairāk nekā (2·7):2=7 malas. Piemērs 9. zīm. parāda, ka 7 malas var būt.



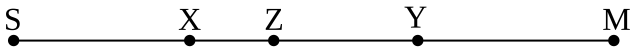
9. zīm.

**4.** ***Ceļotāji***

**Atbilde:** Egons no Mežciema izgāja par $\frac{3}{11}$ stundām (~16 min.) ātrāk nekā Andris un Bērtulis no Sūnu ciema.

Tā kā Andris un Bērtulis vienlaicīgi izgāja no Sūnu ciema un vienlaicīgi nokļuva Mežciemā, tad abi draugi ceļā kopumā pavadīja vienādu laiku, pie tam, tā kā abiem ir vienādi pārvietošanās ātrumi, abi vienādi ilgi bija gājuši kājām un vienādi ilgi bija braukuši ar velosipēdu. (Pretējā gadījumā, tas, kurš ilgāk brauktu ar velosipēdu, galamērķi sasniegtu ātrāk.)

Pieņemsim, ka Andris un Bērtulis kājām gāja $t_k$ stundas, bet ar velosipēdu brauca $t_v$ stundas.




10. zīm.

Zīmējumā shematiski attēlosim draugu satikšanās punktus (skat. 10. zīm.): S – Sūnu ciems, M – Mežciems, Y – vieta, kur Egons satikās ar Bērtuli, Z – vieta, kur Egons satikās ar Andri, X – tik tālu bija ticis Andris, kad Bērtulis satikās ar Egonu.

Tā kā Egons līdz punktam Y nogāja tik pat lielu attālumu, kā pēc tam kājām nogāja Bērtulis un abiem ir vienāds iešanas ātrums, tad Egons no M līdz Y ceļā bija pavadījis $t_k$ stundas.

Bērtulis attālumu SY veica $t_v$ stundās, tātad Andris attālumu SX arī veica tikpat ilgā laikā, t.i., $t_v$ stundās. Savukārt SZ ir viss attālums, ko Andris veica kājām, tātad šajā posmā viņš ceļā pavadīja $t_k$ stundas, bet posmā XZ Andris pavadīja $t_k - t_v$ stundas. Tā kā Andris no punkta X un Egons no punkta Y kustību sāka vienlaicīgi, tad līdz satikšanās vietai Z abi ceļā bija pavadījuši vienādu laiku, tātad Egons attālumu YZ nobrauca $t_k - t_v$ stundās.

Izmantojot ieviestos apzīmējumus un uzdevumā doto, iegūstam:

$$\mathrm{SM} = 6t_k + 15t_v = 15$$

$$\mathrm{SX} = 6t_v,\ \mathrm{SY} = 15t_v,\ \mathrm{YM} = 6t_k$$

$$\mathrm{XY} = \mathrm{SY} - \mathrm{SX} = 15t_v - 6t_v = 9t_v,\ \mathrm{XZ} = 6(t_k - t_v),\ \mathrm{YZ} = 15(t_k - t_v)$$

$$\mathrm{XZ} + \mathrm{YZ} = \mathrm{XY} \Rightarrow\ 6(t_k - t_v) + 15(t_k - t_v) = 9t_v$$

$$21t_k = 30t_v$$

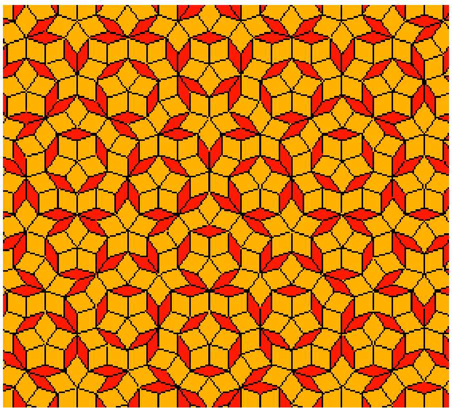
$$t_v = \frac{7}{10}t_k$$

$$6t_k + 15\cdot\frac{7}{10}t_k = 15 \Rightarrow \frac{33}{2}t_k = 15 \Rightarrow t_k = \frac{30}{33} = \frac{10}{11},\ t_v = \frac{7}{10}\cdot\frac{10}{11} = \frac{7}{11}$$

Andris līdz punktam Z ceļā pavadīja $t_k = \frac{10}{11}$ stundas, bet Egons līdz šim pašam punktam ceļā pavadīja $t_k + (t_k - t_v) = 2t_k - t_v = 2\cdot\frac{10}{11} - \frac{7}{11} = \frac{13}{11}$ stundas, t.i., par $\frac{13}{11} - \frac{10}{11} = \frac{3}{11}$ stundām vairāk. Egons no Mežciema izgāja par $\frac{3}{11}$ stundām (~16 min.) ātrāk nekā Andris un Bērtulis no Sūnu ciema.

**5. *Mozaīka***

No dotā veida rombiem var izveidot dažādas mozaīkas, arī tādas kuras var turpināt bezgalīgi un pārklāt visu plakni. Piemēram, novietojot rombiņus joslās vai tā, kā parādīts 11. zīm. (to sauc par Penrouza mozaīku).



11. zīm.

## 5. kārtas uzdevumu atrisinājumi

**1. *Lielais skaitlis***

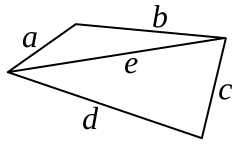
Ievērosim, ka 213=3·71. Tātad, lai iegūtais 27 ciparu skaitlis dalītos ar 213, tam jādalās ar 3 un ar 71. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3. Ja 9 reizes pēc kārtas uzrakstīti vieni un tie paši 3 cipari, tad to summa dalās ar 3. Tātad, lai iegūtais skaitlis dalītos ar 213, pietiek, ka trīsciparu skaitlis, kas atkārtojas, dalās ar 71. Par meklēto skaitli der, piemēram, skaitlis **142**.

**2. *Četrstūris***

Apzīmēsim četrstūra malu garumus ar *a*, *b*, *c* un *d*, bet diagonāles garumu – ar *e* (skat. 12. zīm.). Diagonāle četrstūri sadala divos trijstūros, pie tam četrstūra diagonāle ir mala katrā nos šiem trijstūriem. Katrā trijstūrī ir spēkā trijstūra nevienādības, t.i., $a+b>e$, $|a-b|<e$ un $c+d>e$, $|c-d|<e$.

Ievērosim, ka 2 cm nogrieznis var veidot trijstūri tikai kopā ar nogriežņiem 3 cm un 4 cm, pieņemsim, ka *a, b, e* garumi 2 cm, 3 cm un 4 cm (kaut kādā secībā). Skaidrs, ka $e \neq 2$ cm (jo 2 cm nogrieznis var būt mala tikai vienā trijstūrī), tātad $e = 3$ cm vai $e = 4$ cm. Ja $e = 3$ cm, tad *c* un *d* ir 6 cm un 9 cm, bet tad $3+6=9$, un šie nogriežņi neveido trijstūri. Tātad $e \neq 3$ cm.

Ja $e = 4$ cm, tad *a* un *b* ir 2 cm un 3 cm, bet *c* un *d* ir 6 cm un 9 cm – abos trijstūros izpildās trijstūra nevienādības. Tātad diagonāles garums ir 4 cm.




12. zīm.

**3. *Klucīšu piramīda***

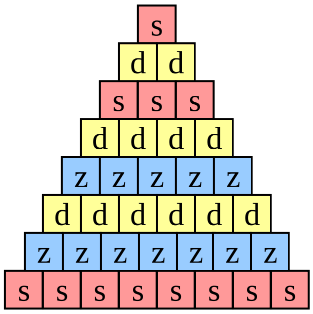
No (4) nosacījuma izriet, ka piramīdā kopā izmantoto klucīšu skaits dalās ar 3. Piramīdā ar *n* rindām izmantoto klucīšu skaits ir $1+2+3+...+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, tātad vai nu *n* vai *n* + 1 jādalās ar 3. Tāpēc ir vērts apskatīt tikai piramīdas ar 2, 3, 5, 6, 8, 9, utt. rindām.

Tā kā katrā rindā ir vienas krāsas klucīši, un pavisam ir izmantoti visu trīs krāsu klucīši, tad piramīdā ir jābūt vismaz trīs rindām. Taču ar trīs rindām nepietiek, jo tad jābūt vienai zilo klucīšu rindai, vienai sarkano klucīšu rindai un vienai dzelteno klucīšu rindai, bet katrā rindā klucīšu skaits ir atšķirīgs (tātad neizpildās (4) nosacījums).

Piramīdā, kas sastāv no 5 rindām, pavisam ir izmantoti 1+2+3+4+5=15 klucīši, tātad katrā no trīs krāsām ir 15 : 3 = 5 klucīši. Tos var sakombinēt tikai vienā veidā: vienā krāsā ir tikai pēdējā rinda, otrā krāsā ir 1. rinda un 4. rinda, bet trešā krāsā ir 2. un 3. rinda, bet tas neatbilst (3) nosacījumam.

Piramīdā, kas sastāvo 6 rindām, pavisam ir izmantoti 1+2+3+4+5+6=21 klucīši, tātad katrā no trīs krāsām ir 21 : 3 = 7 klucīši. Atkal iespējama tikai viena kombinācija: 6. rindai un 1. rindai jābūt vienā krāsā, 5. rindai un 2. rindai jabūt otrā krāsā, tātad 3. un 4. rindas ir trešā krāsā, kas atkal neatbilst (3) nosacījumam.

Piramīdā, kas sastāvo 8 rindām, pavisam ir izmantoti 1+2+3+4+5+6+7+8=36 klucīši, tātad katrā no trīs krāsām ir 36 : 3 = 12 klucīši. Tos var izvietot atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, skat., piem., 13. zīm.




13. zīm.

**4.** ***Skaitļu tabula***

Vairāku skaitļu summa dalās ar 3, ja to atlikumu, dalot ar 3, summa dalās ar 3. Tāpēc apskatīsim tabulu, kurā dotos skaitļus aizstāsim ar atlikumiem, kādus tie dod, dalot ar 3, skat. 14. zīm.

| | | |
|---|---|---|
| **1** | **2** | **1** |
| **2** | **1** | **1** |
| **1** | **1** | **2** |

14. zīm.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **11** | **5** | **8** | =24 |
| **7** | **10** | **16** | =33 |
| **22** | **19** | **4** | =45 |

15. zīm.

Ir jāpanāk, lai šajā tabulā katras rindiņas skaitļu summa dalās ar 3; tas būs gadījumā, ja vienā rindiņā būs skaitļi (atlikumi) 2, 2, 2, bet divās rindiņās – skaitļi (atlikumi) 1, 1, 1. Ar vienu gājienu nav iespējams iemainīt visus 2 vienā rindā (jo katrā rindā ir tikai viens 2), tātad ir vajadzīgi vismaz divi gājieni.

Ar diviem gājieniem uzdevuma prasības var izpildīt, piemēram, vispirms samaina vietām skaitļus 7 un 11, bet pēc tam – skaitļus 4 un 8, iegūstot 15. zīm. attēloto tabulu.

**5.** ***Kabatas nauda***

Apzīmēsim Anša saņemto kabatasnaudu (santīmos) ar $A$, bet pārējo brāļu saņemtās kabatasnaudas attiecīgi ar $B_1$, $B_2$, $B_3$ un $B_4$ (divas no šīm summām ir Jāņa un Mārtiņa kabatas naudas, bet nav zināms – kuras tieši, zināms tikai, ka Mārtiņš saņēma vairāk nekā Jānis).

Tad $A = 2 \cdot B_1 = 3 \cdot B_2 = 4 \cdot B_3 = 5 \cdot B_4$. Tā kā katrs brālis saņēma veselu skaitu santīmu, tad $A$ jādalās gan ar 2, gan ar 3, gan ar 4, gan ar 5, tātad $A$ jādalās ar 60 jeb $A = 60 \cdot k$ ($k$ – vesels skaitlis). Tad $B_1 = 30 \cdot k$, $B_2 = 20 \cdot k$, $B_3 = 15 \cdot k$ un $B_4 = 12 \cdot k$.

Apskatīsim visas iespējas, kādas var būt Mārtiņa un Jāņa kabatas naudas.

* Ja Mārtiņš saņēma $B_1 = 30 \cdot k$ un Jānis saņēma $B_2 = 20 \cdot k$ santīmus, tad $30 \cdot k - 20 \cdot k = 10 \cdot k = 30$, tātad $k = 3$ un $A = 60 \cdot 3 = 180 \text{ sant.} = 1{,}80 \text{ Ls}$.

* Ja Mārtiņš saņēma $B_1 = 30 \cdot k$ un Jānis saņēma $B_3 = 15 \cdot k$ santīmus, tad $30 \cdot k - 15 \cdot k = 15 \cdot k = 30$, tātad $k = 2$ un $A = 60 \cdot 2 = 120 \text{ sant.} = 1{,}20 \text{ Ls}$.

* Ja Mārtiņš saņēma $B_1 = 30 \cdot k$ un Jānis saņēma $B_4 = 12 \cdot k$ santīmus, tad $30 \cdot k - 12 \cdot k = 18 \cdot k = 30\ -k$ nav vesels skaitlis, tātad šāda situācija nav iespējama.

* Ja Mārtiņš saņēma $B_2 = 20 \cdot k$ un Jānis saņēma $B_3 = 15 \cdot k$ santīmus, tad $20 \cdot k - 15 \cdot k = 5 \cdot k = 30$, tātad $k = 6$ un $A = 60 \cdot 6 = 360 \text{ sant.} = 3{,}60 \text{ Ls}$.

* Ja Mārtiņš saņēma $B_2 = 20 \cdot k$ un Jānis saņēma $B_4 = 12 \cdot k$ santīmus, tad $20 \cdot k - 12 \cdot k = 8 \cdot k = 30 - k$ nav vesels skaitlis, tātad šāda situācija nav iespējama.

* Ja Mārtiņš saņēma $B_3 = 15 \cdot k$ un Jānis saņēma $B_4 = 12 \cdot k$ santīmus, tad $15 \cdot k - 12 \cdot k = 3 \cdot k = 30$, tātad $k = 10$ un $A = 60 \cdot 10 = 600 \text{ sant.} = 6{,}00 \text{ Ls}$.

Tātad Ansis varēja saņemt 1,20 Ls, 1,80 Ls, 3,60 Ls vai 6,00 Ls.