# Latvijas Kauss 2024 – atrisinājumi

**1.uzdevums** Trijās konfekšu kaudzēs uz galda ir attiecīgi 5, 49 un 51 konfekte. Māris drīkst jebkuras divas uz galda esošas kaudzes apvienot vienā kaudzē, vai arī jebkuru kaudzi, kura satur pāra skaitu konfekšu, sadalīt divās kaudzēs ar vienādu konfekšu skaitu. Vai, veicot atļautās darbības, Māris no sākotnējām 3 kaudzēm var iegūt 105 konfekšu kaudzes, kur katrā no tām ir tieši 1 konfekte?

*Folklora*

**Atrisinājums.** Vispirms pierādīsim šādu apgalvojumu.

**Apgalvojums.** Ja konfekšu skaits visās kaudzēs dalās ar $p$, kur $p$ ir nepāra pirmskaitlis, tad pēc operāciju veikšanas visās kaudzēs konfekšu skaits joprojām dalās ar $p$.
**Pierādījums.** Apvienojot 2 kaudzes, kurās ir attiecīgi $ap$ un $bp$ konfektes ($a, b$ – naturāli skaitļi), tiks iegūta kaudze ar $(a+b)p$ konfektēm. Savukārt, sadalot kaudzi ar $2ap$ konfektēm, tiks iegūtas 2 kaudzes ar $ap$ konfektēm. Ievērosim, ka neatkarīgi no veiktajām operācijām konfekšu skaits katrā kaudzē joprojām dalās ar $p$.

Tā kā visās kaudzes sākotnēji ir nepāra skaits konfekšu, tad nevienu no tām nav iespējams sadalīt divās vienādas daļās. Tādēļ iespējamas ir tikai trīs operācijas:

- apvienot kaudzes ar 5 un 49 konfektēm. Tādā gadījumā iegūstam kaudzes ar 54 un 51 konfekti. Abās kaudzēs konfekšu skaits dalās ar 3. No apgalvojuma izriet, ka neatkarīgi no veiktajām operācijām konfekšu skaits katrā kaudzē vienmēr dalīsies ar 3. Līdz ar to nevarēs panākt to, ka katrā kaudzē ir tieši 1 konfekte.

- apvienot kaudzes ar 5 un 51 konfekti. Tādā gadījumā iegūstam kaudzes ar 56 un 49 konfektēm. Abās kaudzēs konfekšu skaits dalās ar 7. No apgalvojuma izriet, ka neatkarīgi no veiktajām operācijām konfekšu skaits katrā kaudzē vienmēr dalīsies ar 7. Līdz ar to nevarēs panākt to, ka katrā kaudzē ir tieši 1 konfekte.

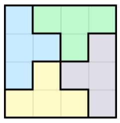
- apvienot kaudzes ar 49 un 51 konfekti. Tādā gadījumā iegūstam kaudzes ar 100 un 5 konfektēm. Abās kaudzēs konfekšu skaits dalās ar 5. No apgalvojuma izriet, ka neatkarīgi no veiktajām operācijām konfekšu skaits katrā kaudzē vienmēr dalīsies ar 5. Līdz ar to nevarēs panākt to, ka katrā kaudzē ir tieši 1 konfekte.

Secinām, ka prasīto panākt nevarēs.

**2.uzdevums** Katram naturālam skaitlim $n$ noteikt mazāko iespējamo nenoklāto rūtiņu skaitu, ja $2n \times 2n$ rūtiņu kvadrātu noklāj ar T-tetramino. Figūras drīkst rotēt, tām pilnībā jāatrodas kvadrāta iekšpusē un to malām jāsakrīt ar rūtiņu režģi, kā arī katru rūtiņu drīkst noklāt ne vairāk kā viena figūra.

*Uzdevuma autori: Ilmārs Štolcers, Kims Georgs Pavlovs*

**Atrisinājums.** Ja $n$ ir pāra skaitlis, tad mazākais nenoklāto rūtiņu skaits ir 0. Ievērosim, ka $4 \times 4$ kvadrātu var noklāt ar tetramino, kā parādīts 1.attēlā.



1.att.

Ievērosim, ka katru $2n \times 2n$ rūtiņu kvadrātu, kur $n$ ir pāra skaitlis, var sagriezt $\frac{n^2}{4}$ kvadrātos ar izmēru $4 \times 4$, līdz ar to varam panākt 0 nenoklātas rūtiņas.

Ja $n$ ir nepāra skaitlis, tad pierādīsim, ka nenoklāto rūtiņu skaits nevar būt 0. Pieņemsim pretējo un izkrāsosim $2n \times 2n$ rūtiņu kvadrātu kā šaha galdiņu. Viegli redzēt, ka ikkatrs tetramino sevī satur 1 melnu vai 3 melnas rūtiņas. Pieņemsim, ka tetramino skaits, kuri satur 1 melnu rūtiņu, ir $X$, bet tetramino skaits, kuri satur 3 melnas rūtiņas, ir $Y$. Kopējais melno rūtiņu skaits kvadrātā $2n \times 2n$ ir $2n^2$, bet kopējais tetramino figūru skaits ir $n^2$. Līdz ar to

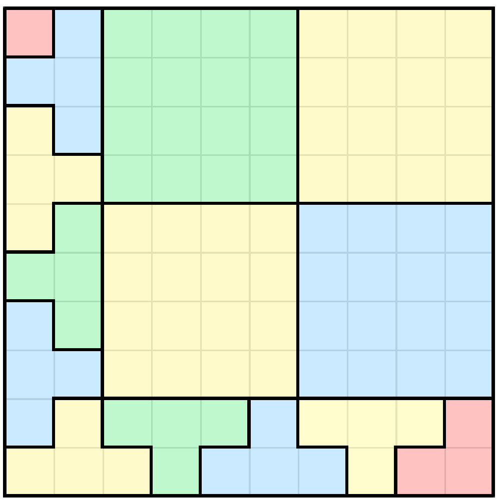
$$X + 3Y = 2n^2 \qquad \text{un} \qquad X + Y = n^2$$

Ievērosim, ka skaitļiem skaitļiem $X + Y$ un $X + 3Y$ ir vienāda paritāte, taču $n^2$ un $2n^2$ ir attiecīgi nepāra un pāra skaitlis – pretruna.

Ja mēs būtu izmantojoši $n^2$ tetramino figūras, tad nenoklāto rūtiņu skaits būtu 0, taču mēs pierādījām, ka šādā veidā kvadrātu $2n \times 2n$ noklāt nevar. Tas nozīmē, ka mums ir jāizmanto $n^2 - 1$ figūra, kas nozīmē, ka mazākais nenoklātu rūtiņu skaits ir 4. To var panākt šādā veidā.

- izgriež no labā apakšējā stūra *L-stūrīti* (3 rūtiņu figūru);
- izgriež kreisā augšējā stūra rūtiņu;
- viegli redzēt, ka var noklāt gan apakšējo, gan kreiso strīpu platumā 2 ar tetramino;
- atliek noklāt kvadrātu, kura laukums ir $2(n-1) \cdot 2(n-1)$, kur $n-1$ pāra skaitlis, taču to var izdarīt pēc uzdevuma sākumā pierādītā.

Zemāk ir parādīta aprakstītā algoritma darbība rūtiņu laukumā $10 \times 10$. Uzdevums ir atrisināts.



2.att.

**3.uzdevums** Atrast visas funkcijas, kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kam visiem reāliem $x, y$ izpildās sakarība

$$f(x^2) - f(y)^2 = f(x-y)(f(x)+y).$$

*Uzdevuma autori: Ilmārs Štolcers, Kims Georgs Pavlovs*

**Atrisinājums.** Ar $P(x,y)$ apzīmēsim doto funkcionālvienādojumu. No $P(0,0)$ izriet, ka

$$f(0) - f(0)^2 = f(0)^2$$
$$f(0)(2f(0)-1) = 0,$$

kas nozīmē, ka $f(0) = 0$ vai $f(0) = \frac{1}{2}$.

Aplūkosim gadījumu, kad $f(0) = \frac{1}{2}$. No $P(x,0)$ varam iegūt, ka

$$f(x^2) - f(0)^2 = f(x)^2$$
$$f(x^2) = f(x)^2 + \frac{1}{4}$$

No $P(x,x)$ un iepriekšējās sakarības varam iegūt

$$f(x^2) - f(x)^2 = f(0)(f(x)+x)$$
$$f(x)^2 + \frac{1}{4} - f(x)^2 = f(0)(f(x)+x)$$
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}(f(x)+x)$$
$$f(x) = \frac{1}{2} - x$$

Pārbaudīsim, vai iegūtā funkcija patiešām der

$$f(x^2) - f(y)^2 = f(x-y)(f(x)+y)$$
$$\frac{1}{2} - x^2 - \left(\frac{1}{2} - y\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - x + y\right)\left(\frac{1}{2} - x + y\right)$$
$$\frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{4} + y - y^2 = \frac{1}{4} + x^2 + y^2 - 2xy - x + y$$
$$2x^2 + 2y^2 - 2xy - x = 0$$

Pēdējā sakarība neizpildās visiem reāliem skaitļiem $x, y$ (piemēram, $x = 1000$ un $y = 0$), līdz ar to funkcija $f(x) = \frac{1}{2} - x$ neapmierina uzdevuma nosacījumus.

Tagad aplūkosim gadījumu, kad $f(0) = 0$. No $P(x,x)$ varam iegūt, ka

$$f(x^2) - f(x)^2 = f(0)(f(x)+x)$$
$$f(x^2) = f(x)^2.$$

No $P(0,x)$ varam iegūt, ka

$$f(0) - f(x)^2 = f(-x)(f(0)+x)$$
$$f(x)^2 = -xf(-x)$$

Tā kā $f(x^2) = f(x)^2$, tad varam ievērot, ka

$$f(-x)^2 = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)^2,$$

kas nozīmē, ka

$$
\begin{gathered}
-xf(-x) = f(x)^2 = f(-x)^2 \\
-xf(-x) = f(-x)^2 \\
f(-x)(f(-x) + x) = 0
\end{gathered}
$$

Aizstājot $-x$ ar $x$ iepriekšējā sakarībā, iegūstam $f(x)(f(x) - x) = 0$. No tā var secināt, ka ikvienam reālam $x$ izpildās $f(x) = 0$ vai $f(x) = x$.

Atliek pārbaudīt, vai neeksistē funkcija $f$ ar īpašību, ka kaut kādiem reāliem skaitļiem $a, b \neq 0$ izpildās $f(a) = 0$ un $f(b) = b$. Pieņemsim, ka tāda funkcija $f$ eksistē. No $P(a, b)$, izmantojot $f(a^2) = f(a)^2$, izriet, ka

$$
\begin{gathered}
f(a)^2 - f(b)^2 = f(a - b)(f(a) + b) \\
-b^2 = f(a - b) \cdot b \\
f(a - b) + b = 0.
\end{gathered}
$$

Aplūkosim visus iespējamos gadījumus.

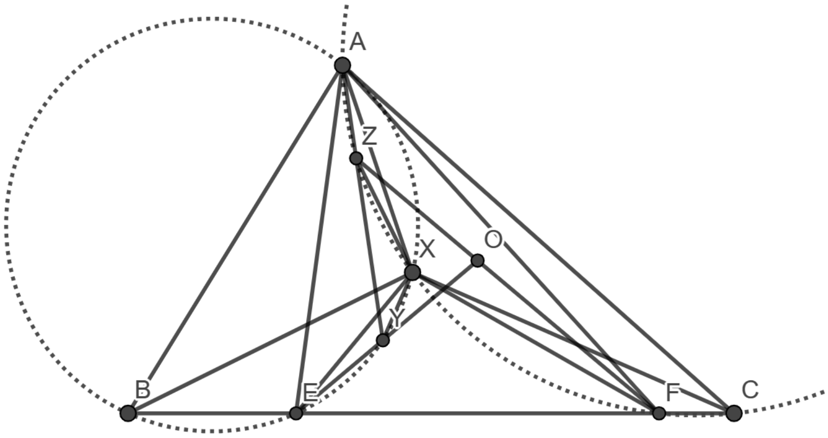
- Ja $f(a-b) = 0$, tad no pēdējās sakarības izriet, ka $b = 0$, kas ir pretruna ar pieņēmumu, ka $b \neq 0$.
- Ja $f(a - b) = a - b$, tad $a - b + b = 0$, kas nozīmē, ka $a = 0$, taču tā ir pretruna ar pieņēmumu, ka $a \neq 0$.

Tātad mūsu pieņēmums ir aplams un šāda funkcija $f$ neeksistē.

Līdz ar to vienīgās funkcijas, kas der, ir $f(x) = 0$ visiem reāliem skaitļiem $x$ un $f(x) = x$ visiem reāliem skaitļiem $x$. Viegli pārbaudīt, ka abas šīs funkcijas apmierina uzdevuma nosacījumus.

**4.uzdevums** Dots trijstūris $ABC$. Tā iekšpusē ir atlikts punkts $X$, pie tam izpildās sakarība $\angle BXC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$. Uz nogriežņa $BC$ atlikti punkti $E$ un $F$ ar īpašību, ka $\angle XAB = \angle XEC$ un $\angle XAC = \angle XFB$, kā arī punkti $B, E, F, C$ atrodas uz taisnes $BC$ tieši šādā secībā. Punkts $O$ ir trijstūrim $AEF$ apvilktās riņķa līnijas centrs. Taisnes $OE$ un $OF$ krusto leņķa $BAC$ bisektrisi attiecīgi punktos $Y$ un $Z$. Pierādīt, ka $\angle YXZ = \angle BXC$.

*Uzdevuma autori: Kims Georgs Pavlovs, Alfrēds Saročinskis*




**Atrisinājums.** Ievērosim, ka, tā kā $\angle XAB = \angle XEC$ un $\angle XAC = \angle XFB$, tad ap četrstūriem $XABE$ un $XACF$ var apvilkt riņķa līnijas.

**Apgalvojums.** Izpildās $\angle EAF = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$.
**Pierādījums.** Ievērosim, ka tā kā ap četrstūriem $XABE$ un $XACF$ var apvilkt riņķa līniju, tad $\angle XAE = \angle XBE$ un $\angle XAF = \angle XCF$. Tas nozīmē, ka

$$\begin{aligned}\angle EAF &= \angle XAE + \angle XAF = \\ &= \angle XBE + \angle XCF = \\ &= 180° - \angle BXC = \\ &= 90° - \frac{1}{2}\angle BAC,\end{aligned}$$

kas arī bija jāpierāda.

**Apgalvojums.** Ap piecstūriem $AXYEB$ un $AZXFC$ var apvilkt riņķa līnijas.
**Pierādījums.** Tā kā punkts $O$ ir trijstūra $AEF$ apvilktās riņķa līnijas centrs, tad

$$\angle EOF = 2\angle AEF = 180° - \angle BAC$$

Ievērosim, ka $OE = OF$ kā rādiusi, tāpēc $\angle OEF = \angle OFE = \frac{1}{2}\angle BAC$. Līdz ar to esam ieguvuši, ka

$$\angle OEF = \angle BAY = \frac{1}{2}\angle BAC \quad \text{un} \quad \angle OFE = \angle CAZ = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

No ievilkta četrstūra pazīmes izriet, ka $AYEB$ un $AZFC$ var apvilkt riņķa līnijas. Tā kā ap četrstūriem $XABE$ un $XACF$ var apvilkt riņķa līnijas, tad secinām, ka ap piecstūriem $AXYEB$ un $AZXFC$ var apvilkt riņķa līnijas, kas arī bija jāpierāda.

Izmantojot iepriekš iegūto, ievērosim, ka

$$\begin{gathered}\angle XBA + \angle XCA = (\angle ABC - \angle XBC) + (\angle ACB - \angle XCB) = \\ = (\angle CBA + \angle ACB) - (\angle XBC + \angle XCB) = (180° - \angle BAC) - (90° - \frac{1}{2}\angle BAC) = \\ = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC.\end{gathered}$$

No ievilktajiem piecstūriem $AXYEB$ un $AZXFC$ zināms, ka $\angle XYZ = \angle XBA$ un $\angle XZY = \angle XCA$. Tad

$$\angle YXZ = 180^\circ - \angle XYZ - \angle XZY = 180^\circ - (\angle XBA + \angle XCA) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC = \angle BXC,$$

kas bija jāpierāda

**5.uzdevums** Pierādīt, ka vienādojumam

$$\mathrm{LKD}(a,b)+\mathrm{MKD}(a,b)=a^2-b^2$$

ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos.

*Piezīme.* Ar $\mathrm{LKD}(a,b)$ apzīmē skaitļu $a$ un $b$ lielāko kopīgo dalītāju, bet ar $\mathrm{MKD}(a,b)$ – skaitļu $a$ un $b$ mazāko kopīgo dalāmo.

*Uzdevuma autori: Kims Georgs Pavlovs, Alfrēds Saročinskis*

**1.atrisinājums.** Skaitļu pāri $(a,b)$ sauksim par *skaistu*, ja $\mathrm{LKD}(a,b)=1$. Ievērosim, ka skaistam skaitļu pārim $(a,b)$ izpildās, ka $\mathrm{MKD}(a,b)=ab$.

Skaitļu pāri $(a,b)$ sauksim par *latvisku*, ja

$$1+ab=a^2-b^2.$$

Mēs pierādīsim, ka eksistē bezgalīgi daudz skaitļu pāru, kas ir gan skaisti, gan latviski.

**Apgalvojums.** Ja $(a,b)$ ir latvisks un skaists pāris, tad pāris $(2a+b,a+b)$ arī ir latvisks un skaists.
**Pierādījums.** Tā kā $(a,b)$ ir skaists, tad $\mathrm{LKD}(a,b)=1$. Pieņemsim, ka $\mathrm{LKD}(2a+b,a+b)\neq 1$, tad eksistē pirmskaitlis $p$ ar īpašību, ka $p\mid 2a+b$ un $p\mid a+b$. Tādā gadījumā

$$p\mid(2a+b)-(a+b)=a$$
$$p\mid(a+b)-a=b$$

Tas ir pretrunā ar to, ka $\mathrm{LKD}(a,b)=1$, līdz ar to secinām, ka $\mathrm{LKD}(2a+b,a+b)=1$ jeb, citiem vārdiem sakot, pāris $(2a+b,a+b)$ ir skaists.
Mums ir jāpārliecinās, ka pāris $(2a+b,a+b)$ arī ir latvisks, kas nozīmē, ka

$$1+(2a+b)(a+b)=(2a+b)^2-(a+b)^2$$
$$1+2a^2+3ab+b^2=4a^2+4ab+b^2-(a^2+2ab+b^2)$$
$$1+2a^2+3ab+b^2=3a^2+2ab$$
$$1+ab=a^2-b^2$$

Pēdējā vienādība ir patiesa, jo pēc pieņēmuma $(a,b)$ ir latvisks.

Tā kā $(2,1)$ ir latvisks un skaists pāris, tad no apgalvojuma izriet, ka pāri

$$(2,1)\to(5,3)\to(13,8)\to(34,21)\to\dots$$

ir skaisti un latviski. Šādā veidā varam atrast bezgalīgi daudz skaitļu pāru, kuri apmieirna uzdevuma nosacījumus.

**2.atrisinājums.** Pieņemsim, ka $\mathrm{LKD}(a,b)=d$, kas nozīmē, ka $a=dx$ un $b=dy$, kur $\mathrm{LKD}(x,y)=1$. Ievērosim, ka $\mathrm{MKD}(a,b)=dxy$. Doto vienādojumu var pārrakstīt kā

$$\mathrm{LKD}(a,b)+\mathrm{MKD}(a,b)=a^2-b^2$$
$$d+dxy=d^2x^2-d^2y^2$$
$$1+xy=d(x-y)(x+y)$$

Ievērosim, ka skaitļi $x = n+2$, $y = n$, $d = \frac{n+1}{4}$ apmierina pēdējo vienādojumu, jo

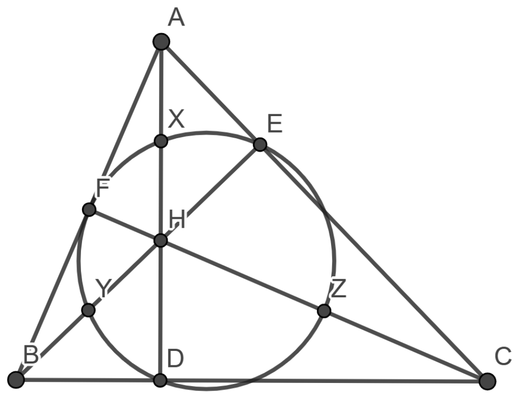
$$1 + n(n+2) = \frac{(n+1)}{4}(n+2-n)(n+2+n)$$
$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Ja $n$ ir nepāra skaitlis, tad $\text{LKD}(x, y) = \text{LKD}(n, n+2) = 1$. Atliek garantēt to, ka $\frac{n+1}{4}$ ir vesels, ko var panākt, ja $n \equiv 3 \pmod 4$. Līdz ar to skaitļu pāri $(a, b) = \left(\frac{(n+2)(n+1)}{4}, \frac{n(n+1)}{4}\right)$, kur $n \equiv 3 \pmod 4$ apmierina uzdevuma nosacījumus. Tā kā eksistē bezgalīgi daudz skaitļu $n \equiv 3 \pmod 4$, tad eksistē arī bezgalīgi daudz meklēto pāru.

**6.uzdevums** Dots šaurleņķu trijstūris $ABC$, kurā novilkti augstumi $AD, BE, CF$, kuri krustojas punktā $H$. Trijstūrim $DEF$ apvilktā riņķa līnija krusto taisnes $AD, BE, CF$ attiecīgi punktos $X, Y, Z$. Pierādīt, ka

$$\frac{AH}{DX} + \frac{BH}{EY} + \frac{CH}{FZ} \geq 3.$$

*Folklora*




**Atrisinājums.** Tas ir labi zināms, ka trijstūra $DEF$ apvilktā riņķa līnija ir trijstūra $ABC$ deviņpunktu riņķa līnija, tāpēc punkti $X, Y, Z$ ir attiecīgi nogriežņu $AH, BH, CH$ viduspunkti.

Apzīmēsim

$$S(\triangle BHC) = a,\ S(\triangle AHC) = b,\ S(\triangle AHB) = c.$$

**Apgalvojums.** Ir spēkā, ka $\frac{AH}{DX} = \frac{2b+2c}{2a+b+c}$.
**Pierādījums.** Ievērosim, ka

$$AD \cdot BC = 2S(\triangle ABC) = 2a + 2b + 2c \quad \text{un} \quad HD \cdot BC = 2S(\triangle BHC) = 2a.$$

Tas nozīmē, ka

$$AH \cdot BC = (AD - HD) \cdot BC = 2b + 2c.$$

Līdz ar to

$$DX \cdot BC = (DH + HX) \cdot BC =$$
$$= (DH + \frac{1}{2}AH) \cdot BC =$$
$$= DH \cdot BC + \frac{1}{2}AH \cdot BC =$$
$$= 2a + b + c.$$

Secinām, ka

$$\frac{AH}{DX} = \frac{AH \cdot BC}{DX \cdot BC} = \frac{2b+2c}{2a+b+c}.$$

Tas pierāda prasīto.

Analoģiski varam iegūt, ka $\frac{BH}{EY} = \frac{2c+2a}{2b+c+a}$, $\frac{CH}{FZ} = \frac{2a+2b}{2c+a+b}$. Līdz ar to mums ir jāpierāda, ka

$$\frac{2b+2c}{2a+b+c} + \frac{2c+2a}{2b+c+a} + \frac{2a+2b}{2c+a+b} \geq 3$$
$$\frac{b+c}{2a+b+c} + \frac{c+a}{2c+a+b} + \frac{a+b}{2c+a+b} \geq \frac{3}{2}$$
$$\frac{b+c}{(a+b)+(c+a)} + \frac{c+a}{(c+a)+(b+c)} + \frac{a+b}{(b+c)+(c+a)} \geq \frac{3}{2}.$$

Apzīmēsim $a+b=x$, $b+c=y$, $c+a=z$, tad ir jāpierāda, ka

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$

No Titu lemmas izriet, ka

$$\begin{aligned}\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}&=\\ =\frac{x^2}{xy+zx}+\frac{y^2}{yz+xy}+\frac{z^2}{zx+yz}&\geq\\ \geq\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)}&.\end{aligned}$$

Atliek pierādīt, ka

$$\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)}\geq\frac{3}{2}.$$

Veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūsim, ka

$$\begin{gathered}(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)\\ x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\geq 3(xy+yz+zx)\\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\geq 0\\ 2x^2+2y^2+z^2-2xy-2yz-2zx\geq 0\\ (x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\geq 0\\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0.\end{gathered}$$

Prasītā nevienādība ir pierādīta.