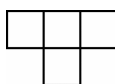


Latvijas Matemātikas kauss 2024

Uzdevums 1. Trijās konfekšu kaudzēs uz galda ir attiecīgi 5, 49 un 51 konfekte. Māris drīkst jebkuras divas uz galda esošas kaudzes apvienot vienā kaudzē, vai arī jebkuru kaudzi, kura satur pāra skaitu konfekšu, sadalīt divās kaudzēs ar vienādu konfekšu skaitu. Vai, veicot atļautās darbības, Māris no sākotnējām 3 kaudzēm var iegūt 105 konfekšu kaudzes, kur katrā no tām ir tieši 1 konfekte?

Uzdevums 2. Katram naturālam skaitlim n noteikt mazāko iespējamo nenoklāto rūtiņu skaitu, ja $2n \times 2n$ rūtiņu kvadrātu noklāj ar T-tetramino (skat.1.att). Figūras drīkst rotēt, tām pilnībā jāatrodas kvadrāta iekšpusē un to malām jāsakrīt ar rūtiņu režģi, kā arī katru rūtiņu drīkst noklāt ne vairāk kā viena figūra.



1. att. T-tetramino.

Uzdevums 3. Atrast visas funkcijas, kas definētas reāliem skaitļiem, pieņem reālas vērtības un kam visiem reāliem x, y izpildās sakarība

$$f(x^2) - f(y)^2 = f(x - y)(f(x) + y).$$

Uzdevums 4. Dots trijstūris ABC . Tā iekšpusē ir atlikts punkts X , pie tam izpildās sakarība $\angle BXC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$. Uz nogriežņa BC atlikti punkti E un F ar īpašību, ka $\angle XAB = \angle XEC$ un $\angle XAC = \angle XFB$, kā arī punkti B, E, F, C atrodas uz taisnes BC tieši šādā secībā. Punkts O ir trijstūrim AEF apvilktās riņķa līnijas centrs. Taisnes OE un OF krusto leņķa BAC bisektrisi attiecīgi punktos Y un Z . Pierādīt, ka $\angle YXZ = \angle BXC$.

Uzdevums 5. Pierādīt, ka vienādojumam

$$\text{LKD}(a, b) + \text{MKD}(a, b) = a^2 - b^2$$

ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos.

Piezīme. Ar $\text{LKD}(a, b)$ apzīmē skaitļu a un b lielāko kopīgo dalītāju, bet ar $\text{MKD}(a, b)$ – skaitļu a un b mazāko kopīgo dalāmo.

Uzdevums 6. Dots šaurleņķu trijstūris ABC , kurā novilkta augstumi AD, BE, CF , kuri krustojas punktā H . Trijstūrim DEF apvilktā riņķa līnija krusto taisnes AD, BE, CF attiecīgi punktos X, Y, Z . Pierādīt, ka

$$\frac{AH}{DX} + \frac{BH}{EY} + \frac{CH}{FZ} \geq 3.$$

*Laiks: 5 astronomiskas stundas
Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-7 punktiem*