

# MAZĀ MATEMĀTIKAS UNIVERSITĀTE



LATVIJAS  
UNIVERSITÄTE  
ANNO 1919



Fazer



FIZMAT.LV



# **Brauna kustība matemātiskajā statistikā**

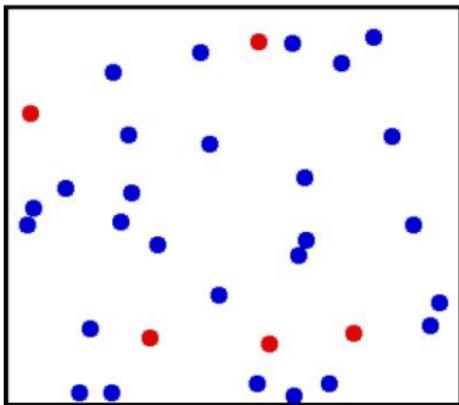
LU FMF docents  
Jānis Valeinis

LU studente  
Lidija Januševa

# Saturs

- ① Brauna kustība fizikā
- ② Vēsture
  - Roberts Brauns
  - Alberts Einšteins
  - Norberts Vīners
- ③ Brauna kustība matemātikā
- ④ Gadījuma lielums
- ⑤ Histogramma un normālais sadalījums
- ⑥ Stohastisks process
- ⑦ Brauna kustība finanšu matemātikā

# Brauna kustība fizikā



**Brauna kustība** ir gāzē vai šķidrumā izsētu vieglu daļiņu (putekļu, augu sporu, dūmu daļiņu) haotiska kustība. Brauna kustību izraisa vielas atomu vai jonu siltumkustība.

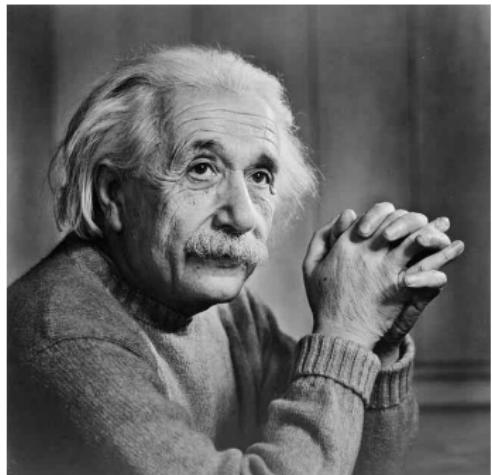
## Roberts Brauns (1773. – 1858.)

- Skotu botānikis, kurš pirmais novēroja vielas daļiņu siltumkustību šķidrumā.
- 1827. gadā mikroskopā novēroja staipekņu sporas ūdenī un ievēroja, ka sporas ūdenī nemitīgi un neregulāri pārvietojas.
- Šī kustība tika nosaukta Brauna vārdā, lai arī viņš neizveidoja tās teoriju.



## Alberts Einšteins (1879. – 1955.)

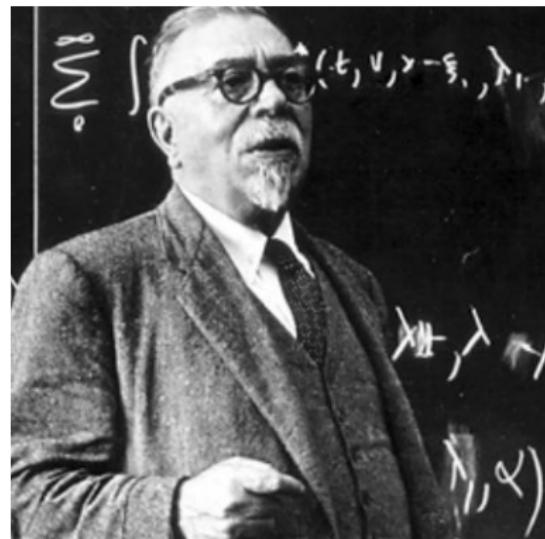
1905. gadā Alberts Einšteins izveidoja Brauna kustības molekulāri kinētisko teoriju.



# Vēsture

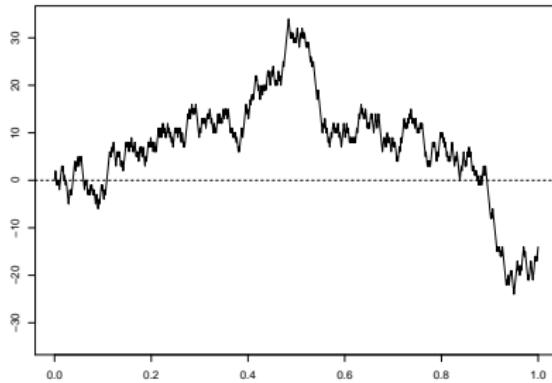
## Norberts Vīners (1894. – 1964.)

- 1923. gadā Norberts Vīners izveidoja Brauna kustības precīzu matemātisku aprakstu.
- Brauna kustību sauc arī par Vīnera procesu.



# Brauna kustība matemātikā

Matemātikā Brauna kustība apraksta daļiņu (molekulu) trajektorijas kā stohastisku procesu, kas norisinās laikā.



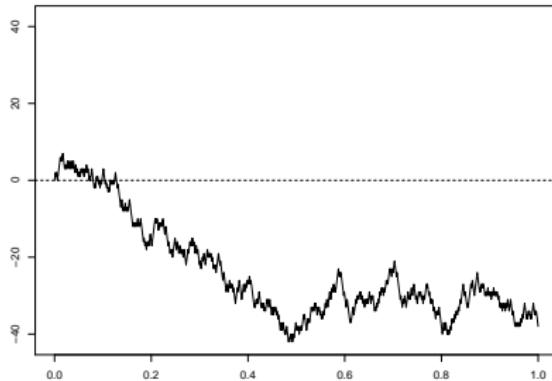
## Definīcija

Stohastisku procesu  $B(t) : t \geq 0$  sauc par standarta **Brauna kustību**, ja izpildās:

- ①  $B(0) = 0$ ,
- ② pieaugumi  $B(t_i) - B(t_{i-1})$  ir neatkarīgi  $\forall t_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ ,
- ③  $\forall t \geq 0$  un  $h > 0$  pieaugumi  $B(t+h) - B(t)$  ir normāli sadalīti ar matemātisko cerību nulle un dispersiju  $h$ .

# Brauna kustība matemātikā

Matemātikā Brauna kustība apraksta daļiņu (molekulu) trajektorijas kā stohastisku procesu, kas norisinās laikā.



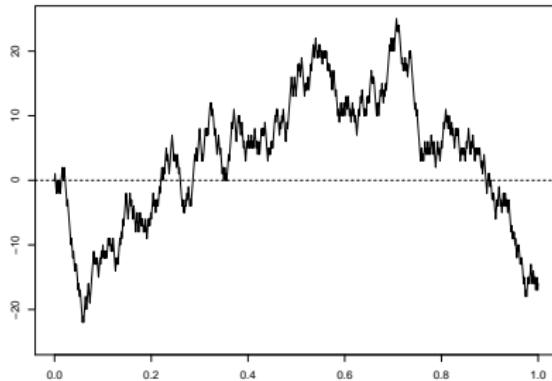
## Definīcija

Stohastisku procesu  $B(t) : t \geq 0$  sauc par standarta **Brauna kustību**, ja izpildās:

- ①  $B(0) = 0$ ,
- ② pieaugumi  $B(t_i) - B(t_{i-1})$  ir neatkarīgi  $\forall t_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ ,
- ③  $\forall t \geq 0$  un  $h > 0$  pieaugumi  $B(t+h) - B(t)$  ir normāli sadalīti ar matemātisko cerību nulle un dispersiju  $h$ .

# Brauna kustība matemātikā

Matemātikā Brauna kustība apraksta daļiņu (molekulu) trajektorijas kā stohastisku procesu, kas norisinās laikā.



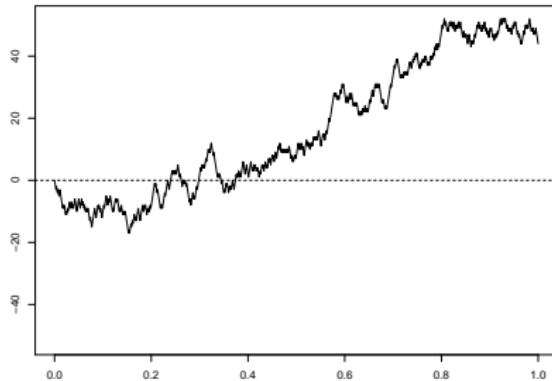
## Definīcija

Stohastisku procesu  $B(t) : t \geq 0$  sauc par standarta **Brauna kustību**, ja izpildās:

- ①  $B(0) = 0$ ,
- ② pieaugumi  $B(t_i) - B(t_{i-1})$  ir neatkarīgi  $\forall t_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ ,
- ③  $\forall t \geq 0$  un  $h > 0$  pieaugumi  $B(t+h) - B(t)$  ir normāli sadalīti ar matemātisko cerību nulle un dispersiju  $h$ .

# Brauna kustība matemātikā

Matemātikā Brauna kustība apraksta daļiņu (molekulu) trajektorijas kā stohastisku procesu, kas norisinās laikā.



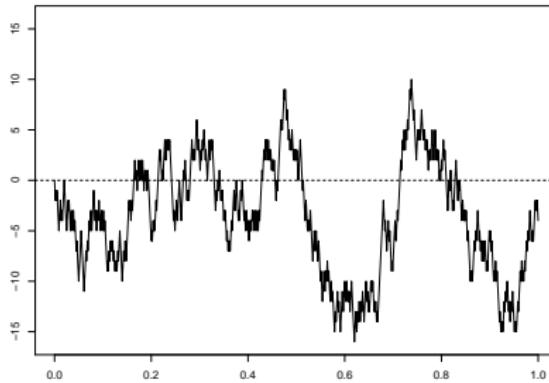
## Definīcija

Stohastisku procesu  $B(t) : t \geq 0$  sauc par standarta **Brauna kustību**, ja izpildās:

- ①  $B(0) = 0$ ,
- ② pieaugumi  $B(t_i) - B(t_{i-1})$  ir neatkarīgi  $\forall t_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ ,
- ③  $\forall t \geq 0$  un  $h > 0$  pieaugumi  $B(t+h) - B(t)$  ir normāli sadalīti ar matemātisko cerību nulle un dispersiju  $h$ .

# Brauna kustība matemātikā

Matemātikā Brauna kustība apraksta daļiņu (molekulu) trajektorijas kā stohastisku procesu, kas norisinās laikā.



## Definīcija

Stohastisku procesu  $B(t) : t \geq 0$  sauc par standarta **Brauna kustību**, ja izpildās:

- ①  $B(0) = 0$ ,
- ② pieaugumi  $B(t_i) - B(t_{i-1})$  ir neatkarīgi  $\forall t_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ ,
- ③  $\forall t \geq 0$  un  $h > 0$  pieaugumi  $B(t+h) - B(t)$  ir normāli sadalīti ar matemātisko cerību nulle un dispersiju  $h$ .

## Gadījuma lielums: 1. piemērs

Veic eksperimentu (piemēram, met spēļu kauliņu).



$\Omega$  - visi eksperimenta iespējamie iznākumi (notikumi).

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

$\omega_1$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_2$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_3$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_4$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_5$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_6$  - notikums, ka uzkrīt



## Gadījuma lielums: 1. piemērs

Veic eksperimentu (piemēram, met spēļu kauliņu).



$\Omega$  - visi eksperimenta iespējamie iznākumi (notikumi).

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

$\omega_1$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_2$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_3$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_4$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_5$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_6$  - notikums, ka uzkrīt



**Mērķis:** Rēķināt varbūtības.

## Gadījuma lielums: 1. piemērs

Veic eksperimentu (piemēram, met spēļu kauliņu).



$\Omega$  - visi eksperimenta iespējamie iznākumi (notikumi).

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

$\omega_1$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_2$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_3$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_4$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_5$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_6$  - notikums, ka uzkrīt



**Mērķis:** Rēķināt varbūtības.

$$P(\omega_1) = \frac{1}{6}$$

## Gadījuma lielums: 1. piemērs

Veic eksperimentu (piemēram, met spēļu kauliņu).



$\Omega$  - visi eksperimenta iespējamie iznākumi (notikumi).

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

$\omega_1$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_2$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_3$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_4$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_5$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_6$  - notikums, ka uzkrīt



**Mērķis:** Rēķināt varbūtības.

$$P(\omega_1) = \frac{1}{6}$$

$$P(\omega_1 \text{ vai } \omega_2 \text{ vai } \omega_3 \text{ vai } \omega_4) = \frac{2}{3}$$

# Gadījuma lielums: 1. piemērs

Veic eksperimentu (piemēram, met spēļu kauliņu).



$\Omega$  - visi eksperimenta iespējamie iznākumi (notikumi).

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

$\omega_1$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_2$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_3$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_4$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_5$  - notikums, ka uzkrīt



$\omega_6$  - notikums, ka uzkrīt



**Mērķis:** Rēķināt varbūtības.

$$P(\omega_1) = \frac{1}{6}$$

$$P(\omega_1 \text{ vai } \omega_2 \text{ vai } \omega_3 \text{ vai } \omega_4) = \frac{2}{3}$$

**Problēma:** Grūti pierakstīt notikumus, kuri mūs interesē.

## Gadījuma lielums

**Gadījuma lielums**  $X$  ir funkcija, kas notikumiem piekārto reālus skaitļus, t. i.,  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ .

# Gadījuma lielums

**Gadījuma lielums**  $X$  ir funkcija, kas notikumiem piekārto reālus skaitļus, t. i.,  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ .

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

$\omega_1$  - notikums, ka uzkrīt 

$\omega_2$  - notikums, ka uzkrīt 

$\omega_3$  - notikums, ka uzkrīt 

$\omega_4$  - notikums, ka uzkrīt 

$\omega_5$  - notikums, ka uzkrīt 

$\omega_6$  - notikums, ka uzkrīt 

## Gadījuma lielums

**Gadījuma lielums**  $X$  ir funkcija, kas notikumiem piekārto reālus skaitļus, t. i.,  $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ .

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

$\omega_1$  - notikums, ka uzkrīt 

$\omega_2$  - notikums, ka uzkrīt 

$\omega_3$  - notikums, ka uzkrīt 

$\omega_4$  - notikums, ka uzkrīt 

$\omega_5$  - notikums, ka uzkrīt 

$\omega_6$  - notikums, ka uzkrīt 

$$\begin{cases} X(\omega_1) = 1 \\ X(\omega_2) = 2 \\ X(\omega_3) = 3 \\ X(\omega_4) = 4 \\ X(\omega_5) = 5 \\ X(\omega_6) = 6 \end{cases}$$

## Gadījuma lielums: 1. piemērs

$\omega_i$						
$X(\omega_i)$	1	2	3	4	5	6

- $P(X = 2) = \frac{1}{6}$

## Gadījuma lielums: 1. piemērs

$\omega_i$						
$X(\omega_i)$	1	2	3	4	5	6

- $P(X = 2) = \frac{1}{6}$
- $P(\omega_1 \text{ vai } \omega_2 \text{ vai } \omega_3 \text{ vai } \omega_4) = P(X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

## Gadījuma lielums: 1. piemērs

$\omega_i$						
$X(\omega_i)$	1	2	3	4	5	6

- $P(X = 2) = \frac{1}{6}$
- $P(\omega_1 \text{ vai } \omega_2 \text{ vai } \omega_3 \text{ vai } \omega_4) = P(X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- $P(X > 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

## Gadījuma lielums: 2. piemērs

Met divus spēļu kauliņus.

## Gadījuma lielums: 2. piemērs

Met divus spēļu kauliņus.

- Gadījuma lielums  $X$  apraksta uzmesto punktu summu.

## Gadījuma lielums: 2. piemērs

Met divus spēļu kauliņus.

- Gadījuma lielums  $X$  apraksta uzmesto punktu summu.
- $X(\{\omega_1, \omega_1\}) = 2, X(\{\omega_1, \omega_2\}) = 3, X(\{\omega_2, \omega_5\}) = 7$  utt..

## Gadījuma lielums: 2. piemērs

Met divus spēļu kauliņus.

- Gadījuma lielums  $X$  apraksta uzmesto punktu summu.
- $X(\{\omega_1, \omega_1\}) = 2, X(\{\omega_1, \omega_2\}) = 3, X(\{\omega_2, \omega_5\}) = 7$  utt..
- Vispārīgā gadījumā  $X(\{\omega_i, \omega_j\}) = i + j$ , kur  $i, j = 1, 2, \dots, 6$ .

## Gadījuma lielums: 2. piemērs

Met divus spēļu kauliņus.

- Gadījuma lielums  $X$  apraksta uzmesto punktu summu.
- $X(\{\omega_1, \omega_1\}) = 2, X(\{\omega_1, \omega_2\}) = 3, X(\{\omega_2, \omega_5\}) = 7$  utt..
- Vispārīgā gadījumā  $X(\{\omega_i, \omega_j\}) = i + j$ , kur  $i, j = 1, 2, \dots, 6$ .

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14
9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	13	14	15	16
11	12	13	14	15	16	17
12	13	14	15	16	17	18
13	14	15	16	17	18	19
14	15	16	17	18	19	20
15	16	17	18	19	20	21
16	17	18	19	20	21	22
17	18	19	20	21	22	23
18	19	20	21	22	23	24
19	20	21	22	23	24	25
20	21	22	23	24	25	26
21	22	23	24	25	26	27
22	23	24	25	26	27	28
23	24	25	26	27	28	29
24	25	26	27	28	29	30
25	26	27	28	29	30	31
26	27	28	29	30	31	32
27	28	29	30	31	32	33
28	29	30	31	32	33	34
29	30	31	32	33	34	35
30	31	32	33	34	35	36
31	32	33	34	35	36	37
32	33	34	35	36	37	38
33	34	35	36	37	38	39
34	35	36	37	38	39	40
35	36	37	38	39	40	41
36	37	38	39	40	41	42
37	38	39	40	41	42	43
38	39	40	41	42	43	44
39	40	41	42	43	44	45
40	41	42	43	44	45	46
41	42	43	44	45	46	47
42	43	44	45	46	47	48
43	44	45	46	47	48	49
44	45	46	47	48	49	50
45	46	47	48	49	50	51
46	47	48	49	50	51	52
47	48	49	50	51	52	53
48	49	50	51	52	53	54
49	50	51	52	53	54	55
50	51	52	53	54	55	56
51	52	53	54	55	56	57
52	53	54	55	56	57	58
53	54	55	56	57	58	59
54	55	56	57	58	59	60
55	56	57	58	59	60	61
56	57	58	59	60	61	62
57	58	59	60	61	62	63
58	59	60	61	62	63	64
59	60	61	62	63	64	65
60	61	62	63	64	65	66
61	62	63	64	65	66	67
62	63	64	65	66	67	68
63	64	65	66	67	68	69
64	65	66	67	68	69	70
65	66	67	68	69	70	71
66	67	68	69	70	71	72
67	68	69	70	71	72	73
68	69	70	71	72	73	74
69	70	71	72	73	74	75
70	71	72	73	74	75	76
71	72	73	74	75	76	77
72	73	74	75	76	77	78
73	74	75	76	77	78	79
74	75	76	77	78	79	80
75	76	77	78	79	80	81
76	77	78	79	80	81	82
77	78	79	80	81	82	83
78	79	80	81	82	83	84
79	80	81	82	83	84	85
80	81	82	83	84	85	86
81	82	83	84	85	86	87
82	83	84	85	86	87	88
83	84	85	86	87	88	89
84	85	86	87	88	89	90
85	86	87	88	89	90	91
86	87	88	89	90	91	92
87	88	89	90	91	92	93
88	89	90	91	92	93	94
89	90	91	92	93	94	95
90	91	92	93	94	95	96
91	92	93	94	95	96	97
92	93	94	95	96	97	98
93	94	95	96	97	98	99
94	95	96	97	98	99	100

## Gadījuma lielums: 2. piemērs

Met divus spēļu kauliņus.

- Gadījuma lielums  $X$  apraksta uzmesto punktu summu.
- $X(\{\omega_1, \omega_1\}) = 2, X(\{\omega_1, \omega_2\}) = 3, X(\{\omega_2, \omega_5\}) = 7$  utt..
- Vispārīgā gadījumā  $X(\{\omega_i, \omega_j\}) = i + j$ , kur  $i, j = 1, 2, \dots, 6$ .

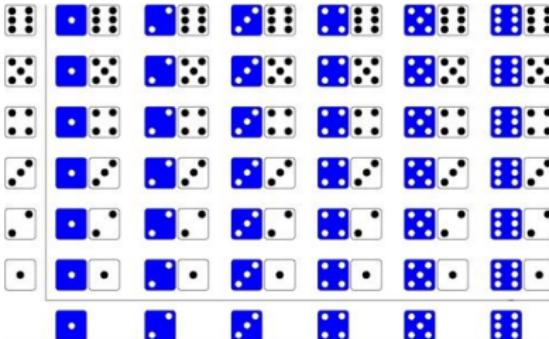
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14
9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	13	14	15	16
11	12	13	14	15	16	17
12	13	14	15	16	17	18
13	14	15	16	17	18	19
14	15	16	17	18	19	20
15	16	17	18	19	20	21
16	17	18	19	20	21	22
17	18	19	20	21	22	23
18	19	20	21	22	23	24
19	20	21	22	23	24	25
20	21	22	23	24	25	26
21	22	23	24	25	26	27
22	23	24	25	26	27	28
23	24	25	26	27	28	29
24	25	26	27	28	29	30
25	26	27	28	29	30	31
26	27	28	29	30	31	32
27	28	29	30	31	32	33
28	29	30	31	32	33	34
29	30	31	32	33	34	35
30	31	32	33	34	35	36

$$P(X = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

## Gadījuma lielums: 2. piemērs

Met divus spēļu kauliņus.

- Gadījuma lielums  $X$  apraksta uzmesto punktu summu.
- $X(\{\omega_1, \omega_1\}) = 2, X(\{\omega_1, \omega_2\}) = 3, X(\{\omega_2, \omega_5\}) = 7$  utt..
- Vispārīgā gadījumā  $X(\{\omega_i, \omega_j\}) = i + j$ , kur  $i, j = 1, 2, \dots, 6$ .



$$P(X = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(X > 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

## Gadījuma lielums 3. piemērs



Met monētu.

## Gadījuma lielums 3. piemērs



Met monētu.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \text{ kur}$$

- $\omega_1$  - notikums, ka uzkrīt cipars,
- $\omega_2$  - notikums, ka uzkrīt ģerbonis.

## Gadījuma lielums 3. piemērs



Met monētu.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \text{ kur}$$

- $\omega_1$  - notikums, ka uzkrīt cipars,
- $\omega_2$  - notikums, ka uzkrīt ģerbonis.

$\omega_i$		
$X(\omega_i)$	0	1

## Gadījuma lielums 3. piemērs



Met monētu.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \text{ kur}$$

- $\omega_1$  - notikums, ka uzkrīt cipars,
- $\omega_2$  - notikums, ka uzkrīt ģerbonis.

$\omega_i$		
$X(\omega_i)$	0	1

$$X(\omega_1) = 0$$

## Gadījuma lielums 3. piemērs



Met monētu.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \text{ kur}$$

- $\omega_1$  - notikums, ka uzkrīt cipars,
- $\omega_2$  - notikums, ka uzkrīt ģerbonis.

$\omega_i$		
$X(\omega_i)$	0	1

$$X(\omega_1) = 0$$

$$X(\omega_2) = 1$$

## Gadījuma lielums 3. piemērs



Met monētu.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \text{ kur}$$

- $\omega_1$  - notikums, ka uzkrīt cipars,
- $\omega_2$  - notikums, ka uzkrīt ģerbonis.

$\omega_i$		
$X(\omega_i)$	0	1

$$X(\omega_1) = 0$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

$$X(\omega_2) = 1$$

## Gadījuma lielums 3. piemērs



Met monētu.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \text{ kur}$$

- $\omega_1$  - notikums, ka uzkrīt cipars,
- $\omega_2$  - notikums, ka uzkrīt ģerbonis.

$\omega_i$		
$X(\omega_i)$	0	1

$$X(\omega_1) = 0$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

$$X(\omega_2) = 1$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

## Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).

## Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).
- *Nepārtraukts gadījuma lielums  $X$*  var pieņemt jebkuru vērtību no kāda intervāla. **Piemēram:**

## Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).
- *Nepārtraukts gadījuma lielums  $X$*  var pieņemt jebkuru vērtību no kāda intervāla. **Piemēram:**
  - gaisa temperatūra;

## Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).
- *Nepārtraukts gadījuma lielums  $X$*  var pieņemt jebkuru vērtību no kāda intervāla. **Piemēram:**
  - gaisa temperatūra;
  - degvielas cenas;

## Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).
- *Nepārtraukts gadījuma lielums  $X$*  var pieņemt jebkuru vērtību no kāda intervāla. **Piemēram:**
  - gaisa temperatūra;
  - degvielas cenas;
  - akciju cenas.

## Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).
- *Nepārtraukts gadījuma lielums X* var pieņemt jebkuru vērtību no kāda intervāla. **Piemēram:**
  - gaisa temperatūra;
  - degvielas cenas;
  - akciju cenas.

**Mērkis:** Prognozēt gadījuma lieluma uzvedību.

## Nepārtraukts gadījuma lielums

- Līdz šim apskatījām *diskrētus gadījuma lielumus* (monētas, spēļu kauliņa mešana).
- *Nepārtraukts gadījuma lielums X* var pieņemt jebkuru vērtību no kāda intervāla. **Piemēram:**
  - gaisa temperatūra;
  - degvielas cenas;
  - akciju cenas.

**Mērķis:** Prognozēt gadījuma lieluma uzvedību.

**Problēma:** Kā aprēķināt  $P(X > 0)$ ,  $P(-5 < X < 5)$ ?

## Relatīvais biežums

Piemērs: met monētu 1000 reizes – 489 reizes uzkrīt cipars, 511 reizes – čerbonis.

## Relatīvais biežums

Piemērs: met monētu 1000 reizes – 489 reizes uzkrīt cipars, 511 reizes – čerbonis.

$A$	$n_i$	$\frac{n_i}{n}$	$P(A)$
	489	0,489	0,5
	511	0,511	0,5

## Relatīvais biežums

Piemērs: met monētu 1000 reizes – 489 reizes uzkrīt cipars, 511 reizes – ģerbonis.

$A$	$n_i$	$\frac{n_i}{n}$	$P(A)$
	489	0,489	0,5
	511	0,511	0,5

- $A$  – notikums;
- $P(A)$  – varbūtība, ka vienā realizācijā iestājas notikums  $A$ ;
- $n$  – eksperimentu skaits.

## Relatīvais biežums

Piemērs: met monētu 1000 reizes – 489 reizes uzkrīt cipars, 511 reizes – ģerbonis.

$A$	$n_i$	$\frac{n_i}{n}$	$P(A)$
	489	0,489	0,5
	511	0,511	0,5

- $A$  – notikums;
- $P(A)$  – varbūtība, ka vienā realizācijā iestājas notikums  $A$ ;
- $n$  – eksperimentu skaits.

**Biežums** –  $n_i$  – tik reizes iestājas notikums  $A$ ;

**Relatīvais biežums** –  $\frac{n_i}{n}$ .

## Relatīvais biežums

Piemērs: met monētu 1000 reizes – 489 reizes uzkrīt cipars, 511 reizes – ģerbonis.

$A$	$n_i$	$\frac{n_i}{n}$	$P(A)$
	489	0,489	0,5
	511	0,511	0,5

- $A$  – notikums;
- $P(A)$  – varbūtība, ka vienā realizācijā iestājas notikums  $A$ ;
- $n$  – eksperimentu skaits.

Biežums –  $n_i$  – tik reizes iestājas notikums  $A$ ;

Relatīvais biežums –  $\frac{n_i}{n}$ .

$$\frac{n_i}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(A)$$

## Histogramma

Piemērs: tika veikti gaisa temperatūras mērījumi 3. martā Rīgā no 1943. gada līdz 2005. gadam:

## Histogramma

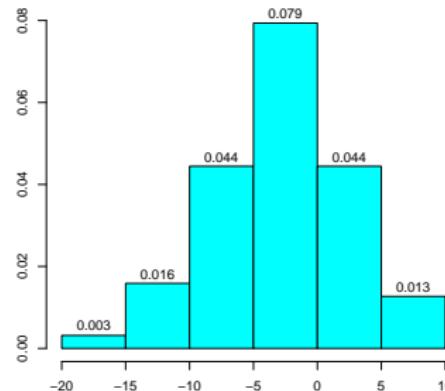
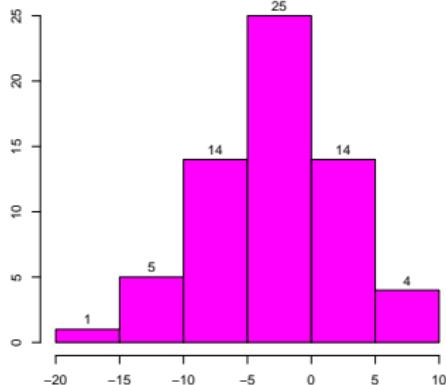
Piemērs: tika veikti gaisa temperatūras mērījumi 3. martā Rīgā no 1943. gada līdz 2005. gadam:

Temperatūra, °C	$n_i$	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{5n}$
[−20; −15)	1	0,016	0,003
[−15; −10)	5	0,079	0,016
[−10; −5)	14	0,222	0,044
[−5; 0)	25	0,397	0,079
[0; 5)	14	0,222	0,044
[5; 10)	4	0,063	0,013
$\sum$	63	1	0,2

# Histogramma

Piemērs: tika veikti gaisa temperatūras mērījumi 3. martā Rīgā no 1943. gada līdz 2005. gadam:

Temperatūra, °C	$n_i$	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{5n}$
[-20; -15)	1	0,016	0,003
[-15; -10)	5	0,079	0,016
[-10; -5)	14	0,222	0,044
[-5; 0)	25	0,397	0,079
[0; 5)	14	0,222	0,044
[5; 10)	4	0,063	0,013
$\sum$	63	1	0,2



# Histogramma

Histogramma ir relatīvo biežumu grafisks attēlojums.

# Histogramma

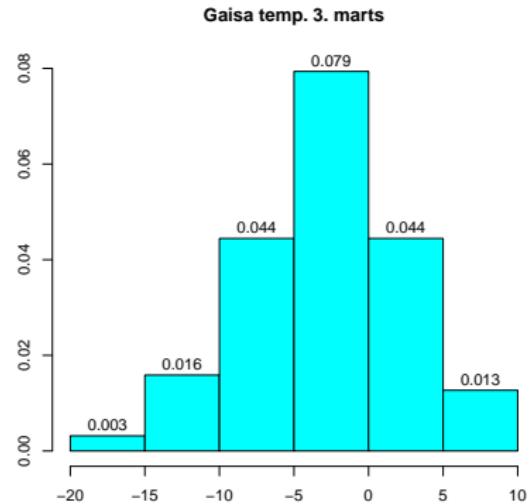
Histogramma ir relatīvo biežumu grafisks attēlojums.

$T, {}^{\circ}\text{C}$	$n_i$	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{5n}$
$[-20; -15)$	1	0,016	0,003
$[-15; -10)$	5	0,079	0,016
$[-10; -5)$	14	0,222	0,044
$[-5; 0)$	25	0,397	0,079
$[0; 5)$	14	0,222	0,044
$[5; 10)$	4	0,063	0,013
$\Sigma$	63	1	0,2

# Histogramma

Histogramma ir relatīvo biežumu grafisks attēlojums.

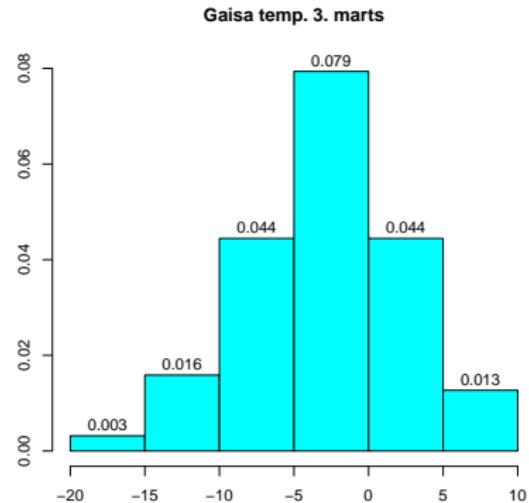
$T, {}^{\circ}\text{C}$	$n_i$	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{5n}$
$[-20; -15)$	1	0,016	0,003
$[-15; -10)$	5	0,079	0,016
$[-10; -5)$	14	0,222	0,044
$[-5; 0)$	25	0,397	0,079
$[0; 5)$	14	0,222	0,044
$[5; 10)$	4	0,063	0,013
$\sum$	63	1	0,2



# Histogramma

Histogramma ir relatīvo biežumu grafisks attēlojums.

$T, {}^{\circ}\text{C}$	$n_i$	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{5n}$
$[-20; -15)$	1	0,016	0,003
$[-15; -10)$	5	0,079	0,016
$[-10; -5)$	14	0,222	0,044
$[-5; 0)$	25	0,397	0,079
$[0; 5)$	14	0,222	0,044
$[5; 10)$	4	0,063	0,013
$\sum$	63	1	0,2

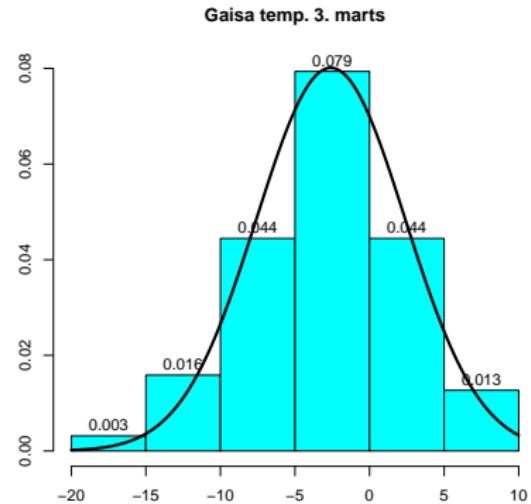


!!! Relatīvos biežumus izdalot ar intervāla garumu,  
histogrammas laukums klūst 1.

# Histogramma

Histogramma ir relatīvo biežumu grafisks attēlojums.

$T, {}^{\circ}\text{C}$	$n_i$	$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{5n}$
$[-20; -15)$	1	0,016	0,003
$[-15; -10)$	5	0,079	0,016
$[-10; -5)$	14	0,222	0,044
$[-5; 0)$	25	0,397	0,079
$[0; 5)$	14	0,222	0,044
$[5; 10)$	4	0,063	0,013
$\sum$	63	1	0,2



!!! Relatīvos biežumus izdalot ar intervāla garumu,  
histogrammas laukums klūst 1.

## Normālais sadalījums

Daudzi procesi dabā pakļaujas normālajam (**Gausa**) sadalījumam.  
Normālā sadalījuma *blīvuma funkcija*:

## Normālais sadalījums

Daudzi procesi dabā pakļaujas normālajam (**Gausa**) sadalījumam.  
Normālā sadalījuma *bīvuma funkcija*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

## Normālais sadalījums

Daudzi procesi dabā pakļaujas normālajam (**Gausa**) sadalījumam.  
Normālā sadalījuma *bīlvuma funkcija*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

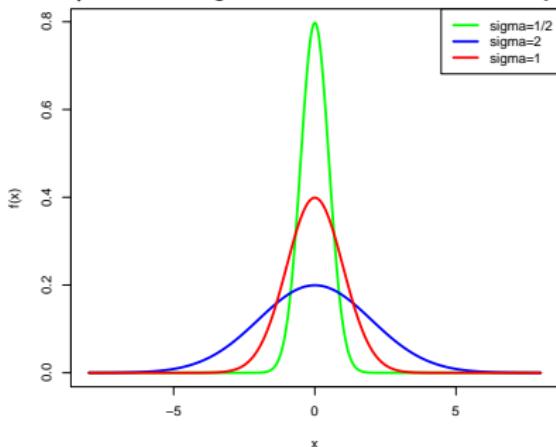
kur  $\mu$  – vidējā vērtība,  $\sigma^2$  – dispersija ( $\sigma$  – standartnovirze).

# Normālais sadalījums

Daudzi procesi dabā pakļaujas normālajam (**Gausa**) sadalījumam.  
Normālā sadalījuma *bīlvuma funkcija*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

kur  $\mu$  – vidējā vērtība,  $\sigma^2$  – dispersija ( $\sigma$  – standartnovirze).

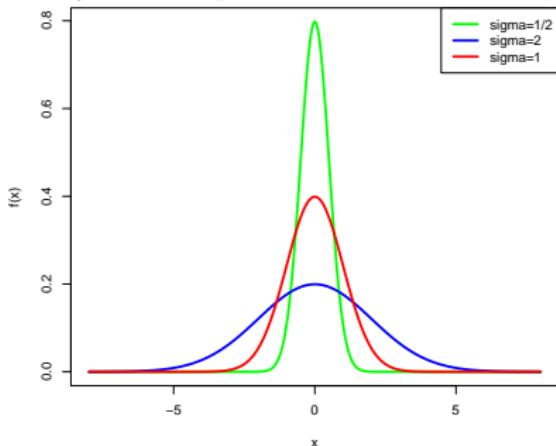


# Normālais sadalījums

Daudzi procesi dabā pakļaujas normālajam (**Gausa**) sadalījumam.  
Normālā sadalījuma *bīvuma funkcija*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

kur  $\mu$  – vidējā vērtība,  $\sigma^2$  – dispersija ( $\sigma$  – standartnovirze).



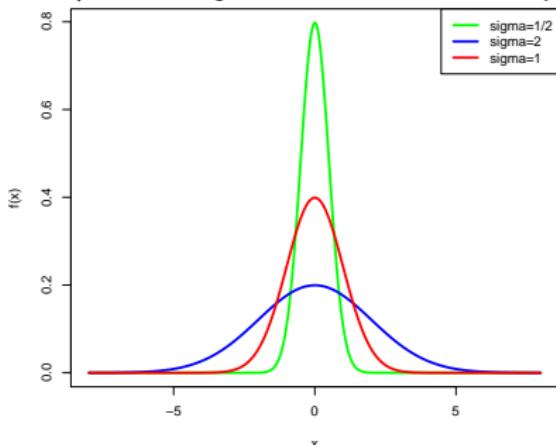
Gausa līknes laukums ir 1!!!

# Normālais sadalījums

Daudzi procesi dabā pakļaujas normālajam (**Gausa**) sadalījumam.  
Normālā sadalījuma *bīvuma funkcija*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

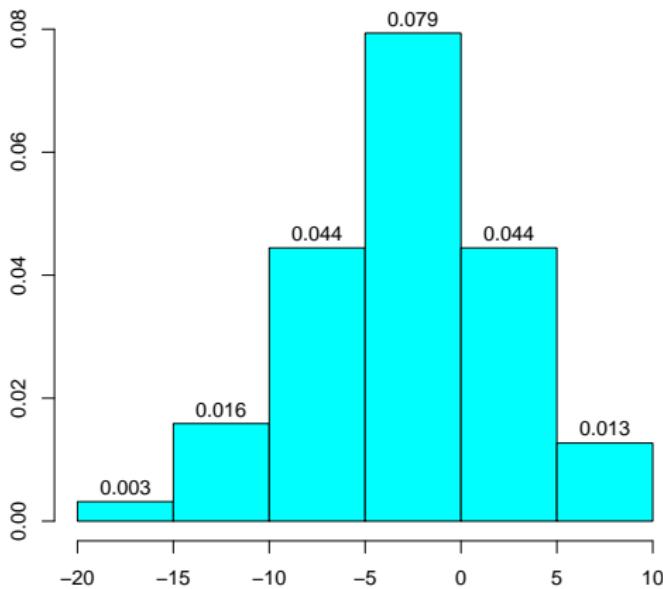
kur  $\mu$  – vidējā vērtība,  $\sigma^2$  – dispersija ( $\sigma$  – standartnovirze).



Gausa līknes laukums ir 1!!!

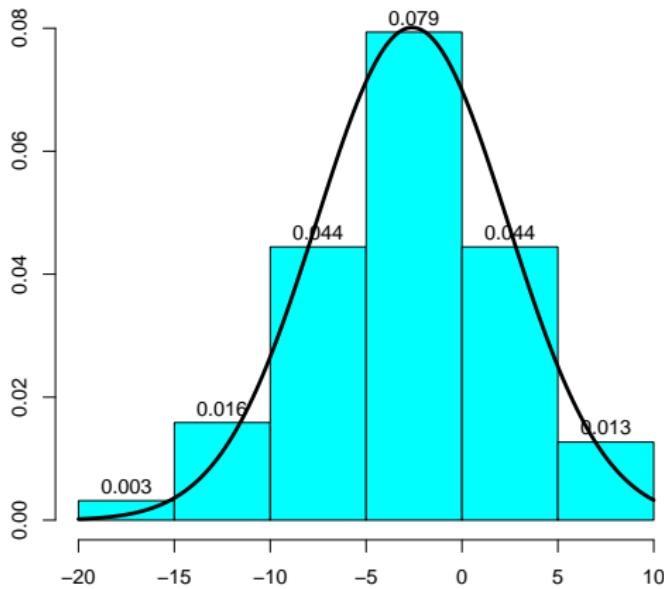
# Normālais sadalījums

Gaisa temp. 3. marts



# Normālais sadalījums

Gaisa temp. 3. marts



Vidējā temperatūra:

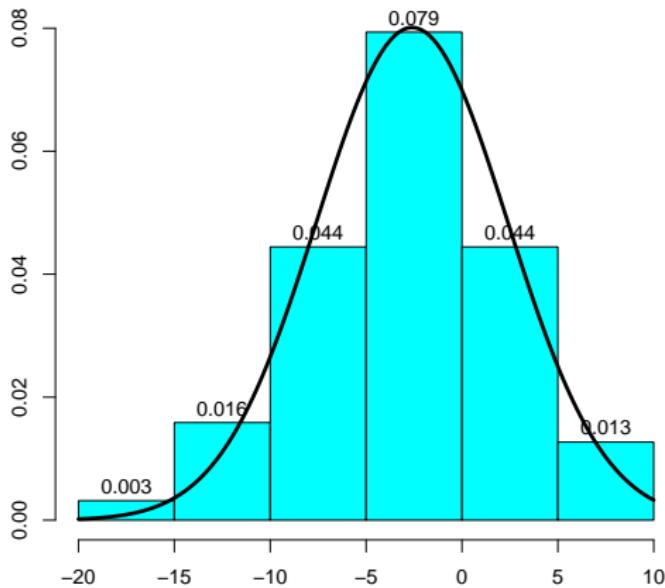
$$\mu = -2,6^{\circ}\text{C}$$

Standartnovirze:

$$\sigma \approx 4,98^{\circ}\text{C}$$

# Normālais sadalījums

Gaisa temp. 3. marts



Vidējā temperatūra:

$$\mu = -2,6^{\circ}\text{C}$$

Standartnovirze:

$$\sigma \approx 4,98^{\circ}\text{C}$$

Ja gadījuma lielums  $X$  ir normāli sadalīts, to pieraksta

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

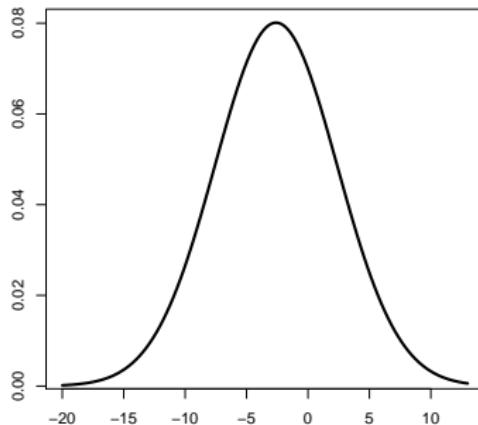
## Normālais sadalījums

- Izmantojot blīvuma funkciju, varam aprēķināt varbūtību tam, ka 3. martā gaisa temperatūra būs lielāka par  $0^{\circ}\text{C}$ .

# Normālais sadalījums

- Izmantojot blīvuma funkciju, varam aprēķināt varbūtību tam, ka 3. martā gaisa temperatūra būs lielāka par  $0^{\circ}\text{C}$ .
- Varbūtību šim notikumam var aprēķināt kā laukumu zvana (**Gausa**) funkcijai.

Gaisa temp. 3. marts

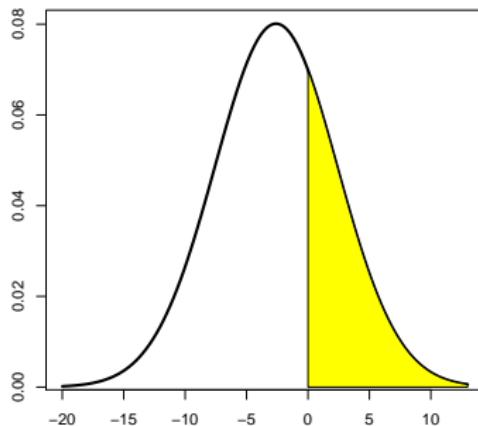


$$P(X > 0) = ?$$

# Normālais sadalījums

- Izmantojot blīvuma funkciju, varam aprēķināt varbūtību tam, ka 3. martā gaisa temperatūra būs lielāka par  $0^{\circ}\text{C}$ .
- Varbūtību šim notikumam var aprēķināt kā laukumu zvana (**Gausa**) funkcijai.

Gaisa temp. 3. marts

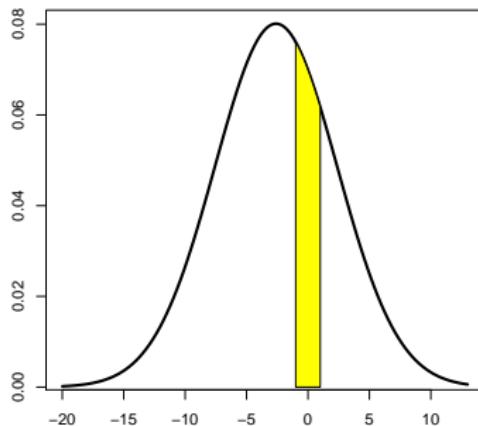


$$P(X > 0) = 0.3$$

# Normālais sadalījums

- Izmantojot blīvuma funkciju, varam aprēķināt varbūtību tam, ka 3. martā gaisa temperatūra būs robežās no  $-1^{\circ}\text{C}$  līdz  $1^{\circ}\text{C}$ .
- Varbūtību šim notikumam var aprēķināt kā laukumu zvana (**Gausa**) funkcijai.

Gaisa temp. 3. marts



$$P(-1 < X < 1) = 0.14$$

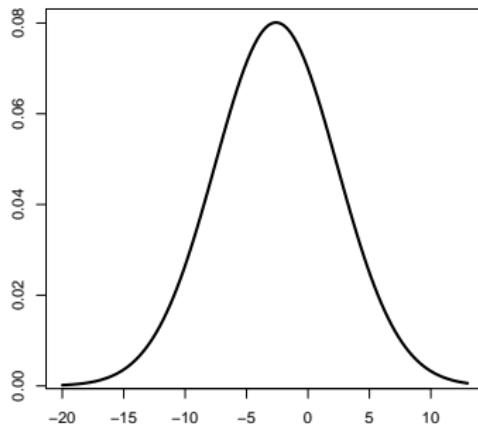
## Normālais sadalījums

- Varbūtība nepārtrauktam gadījuma lielumam pieņemt kādu vienu konkrētu vērtību ir 0 (laukuma nav)!

## Normālais sadalījums

- Varbūtība nepārtrauktam gadījuma lielumam pieņemt kādu vienu konkrētu vērtību ir 0 (laukuma nav)!
- Ir jēga rēķināt varbūtības, ka gadījuma lielums pieņem vērtības kādā intervālā!

Gaisa temp. 3. marts



$$P(X = a) = 0, \text{ kur } a \in \mathbb{R}$$

# Stohastisks process

**Stohastisks process** – gadījuma lielums, kas mainās laikā.  
Matemātikā to apraksta funkcija  $X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$

# Stohastisks process

**Stohastisks process** – gadījuma lielums, kas mainās laikā.  
Matemātikā to apraksta funkcija  $X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$

Piemēram:

# Stohastisks process

**Stohastisks process** – gadījuma lielums, kas mainās laikā.  
Matemātikā to apraksta funkcija  $X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$

Piemēram:

- spēļu kauliņa *atkārtota mešana*;

# Stohastisks process

**Stohastisks process** – gadījuma lielums, kas mainās laikā.  
Matemātikā to apraksta funkcija  $X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$

**Piemēram:**

- spēļu kauliņa *atkārtota mešana*;
- akciju cenu izmaiņas laikā;

# Stohastisks process

**Stohastisks process** – gadījuma lielums, kas mainās laikā.  
Matemātikā to apraksta funkcija  $X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$

**Piemēram:**

- spēļu kauliņa *atkārtota mešana*;
- akciju cenu izmaiņas laikā;
- valūtu kursu dinamika laikā.

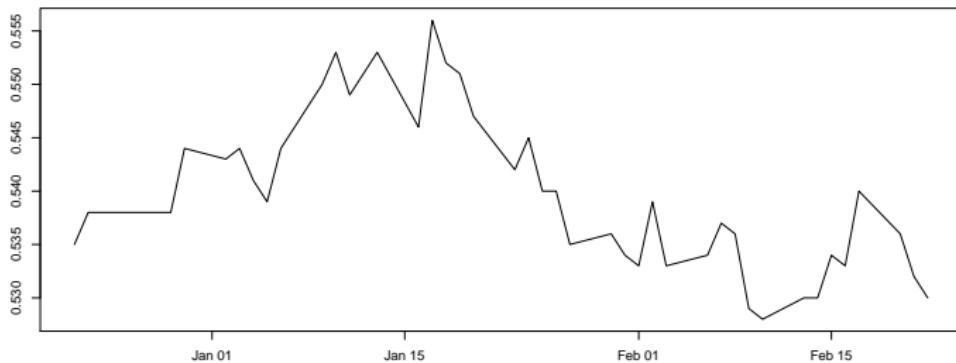
# Stohastisks process

**Stohastisks process** – gadījuma lielums, kas mainās laikā.  
Matemātikā to apraksta funkcija  $X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+$

**Piemēram:**

- spēļu kauliņa *atkārtota mešana*;
- akciju cenu izmaiņas laikā;
- valūtu kursu dinamika laikā.

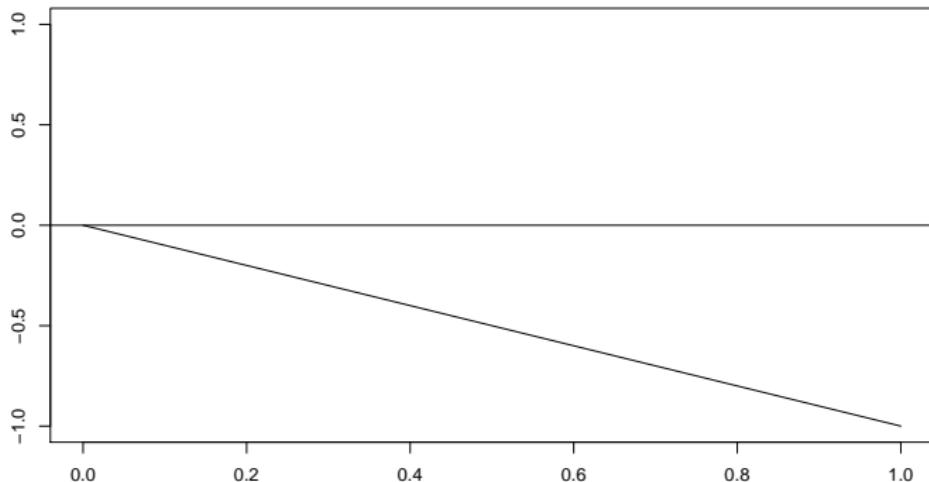
LVL pret 1 USD (22.12.2011. – 22.02.2012.)



# Gadījuma klejošana

## Definīcija

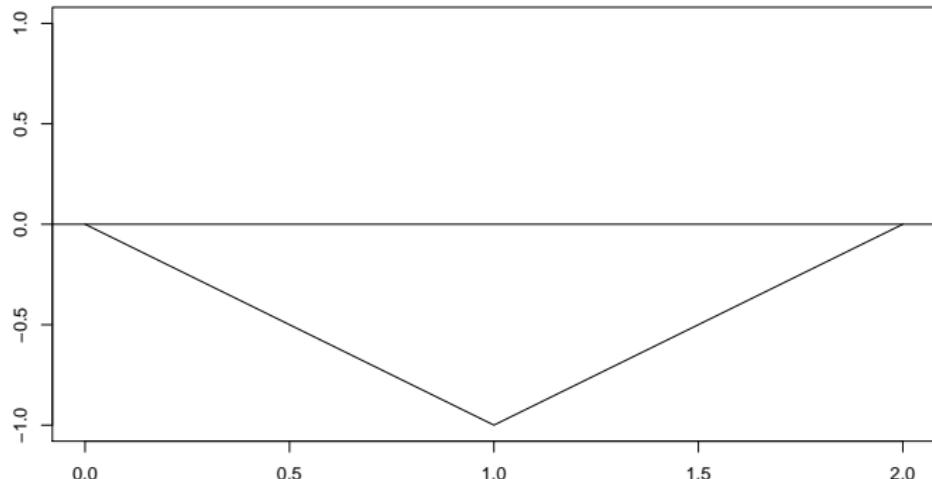
Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$



# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

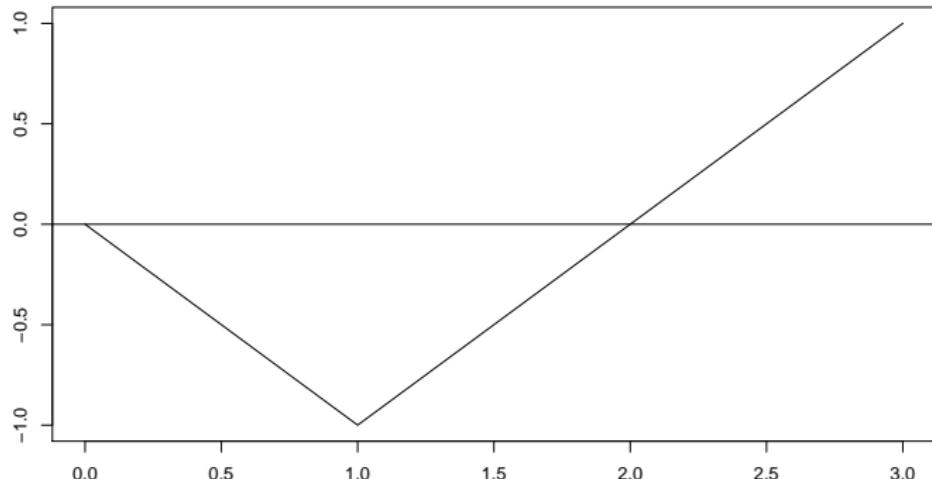


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

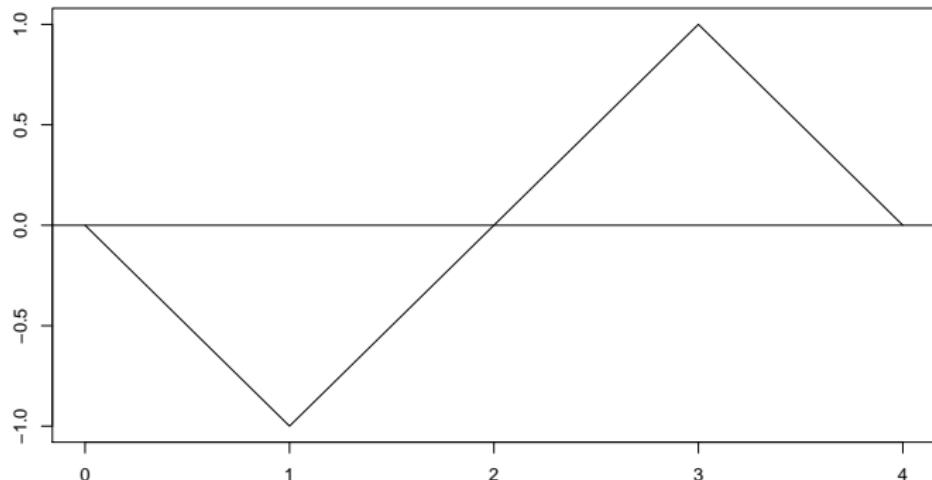


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

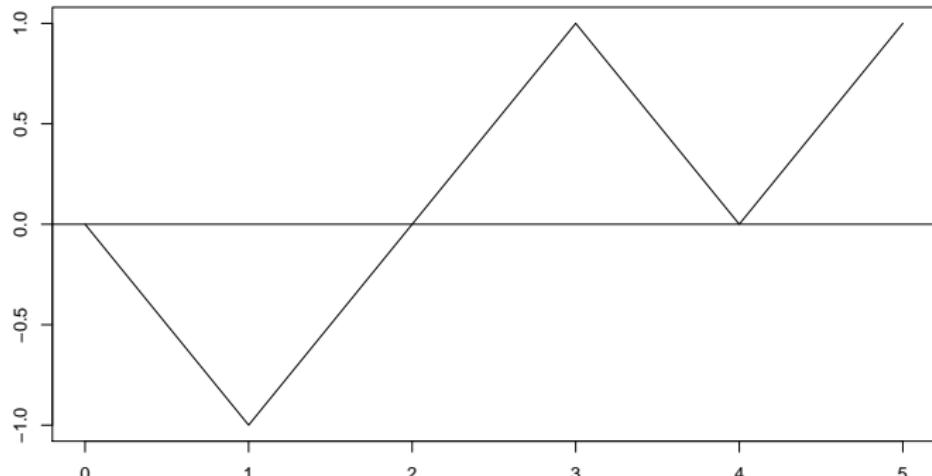


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

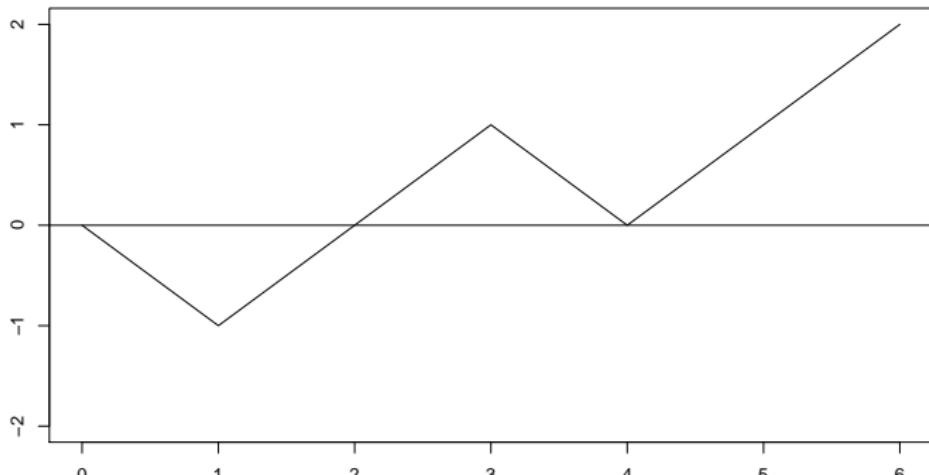


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

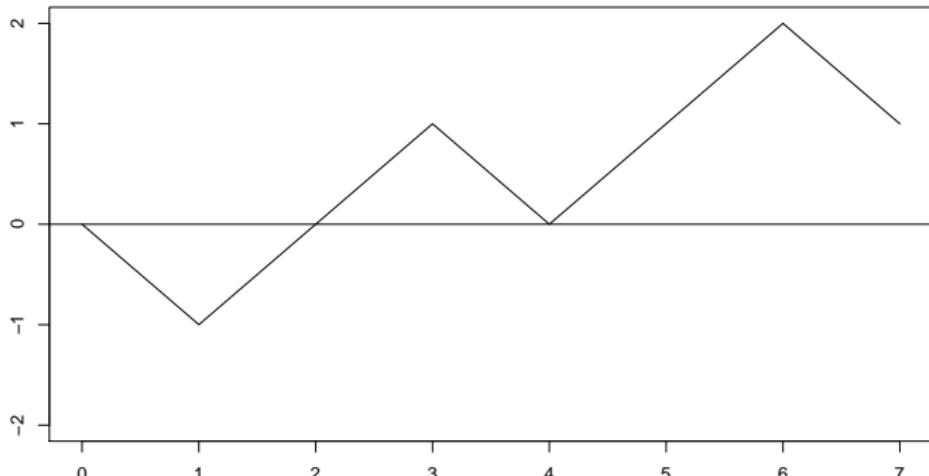


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

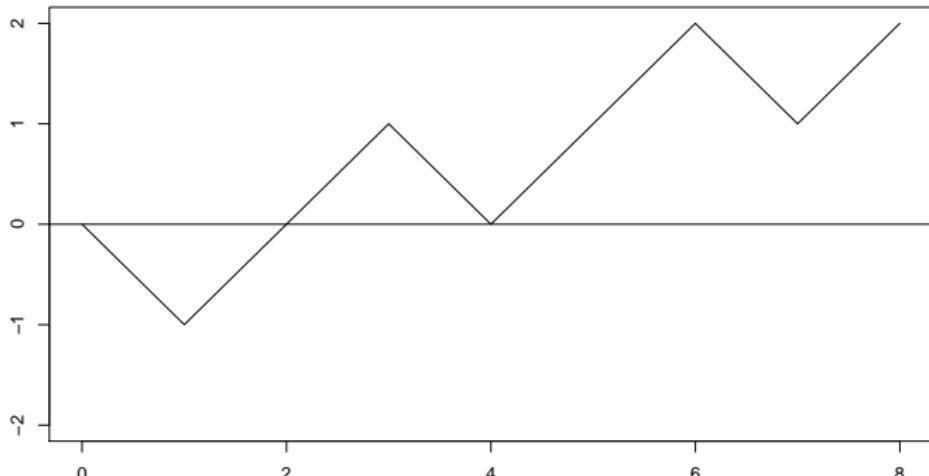


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

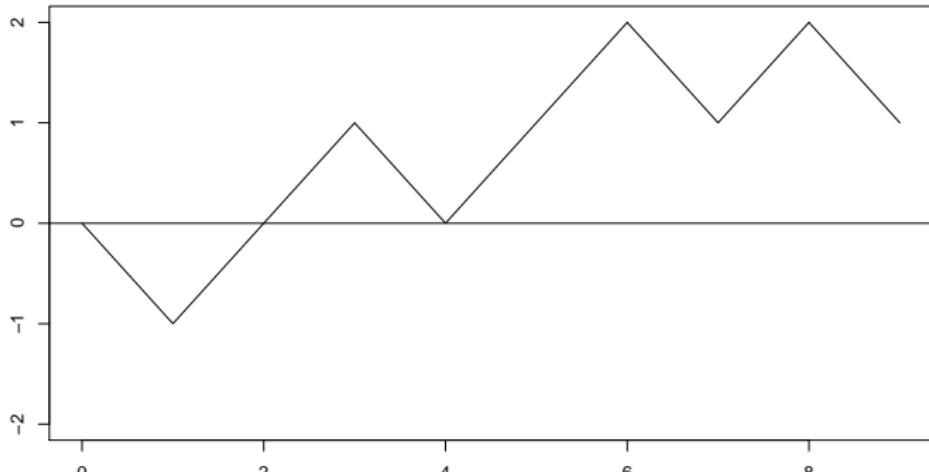


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

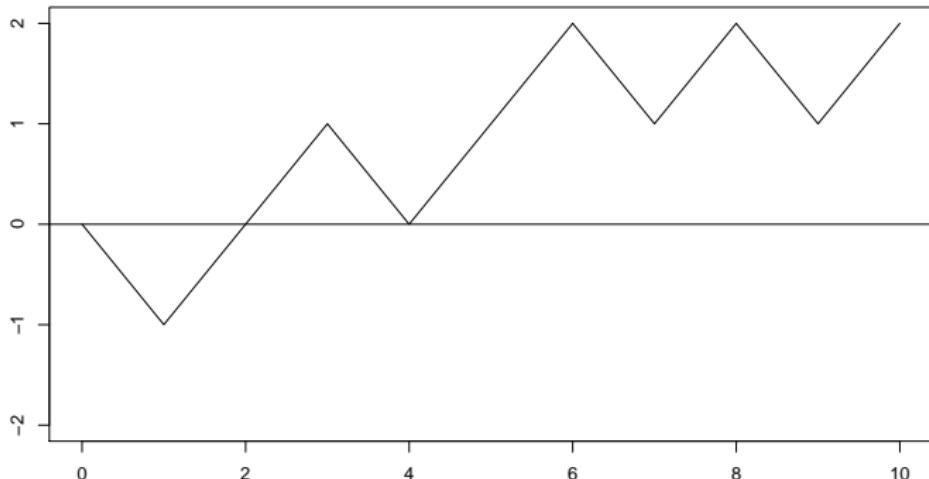


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

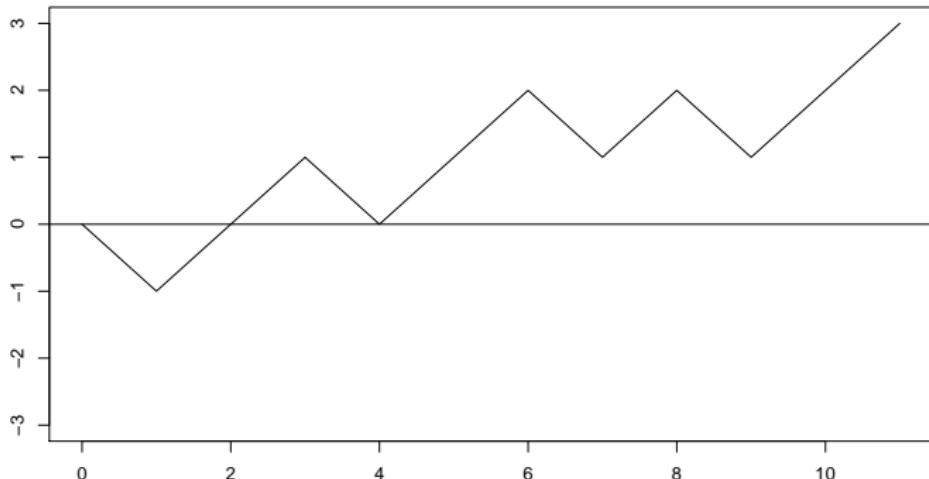


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

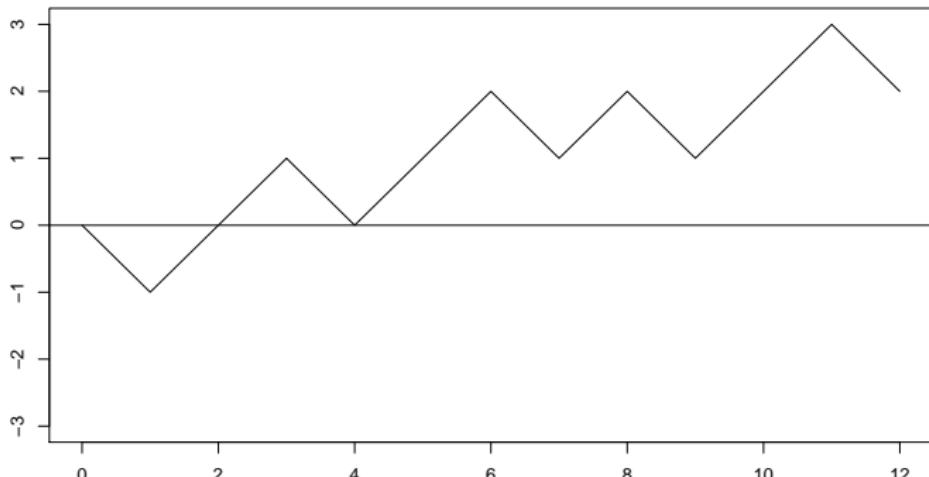


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

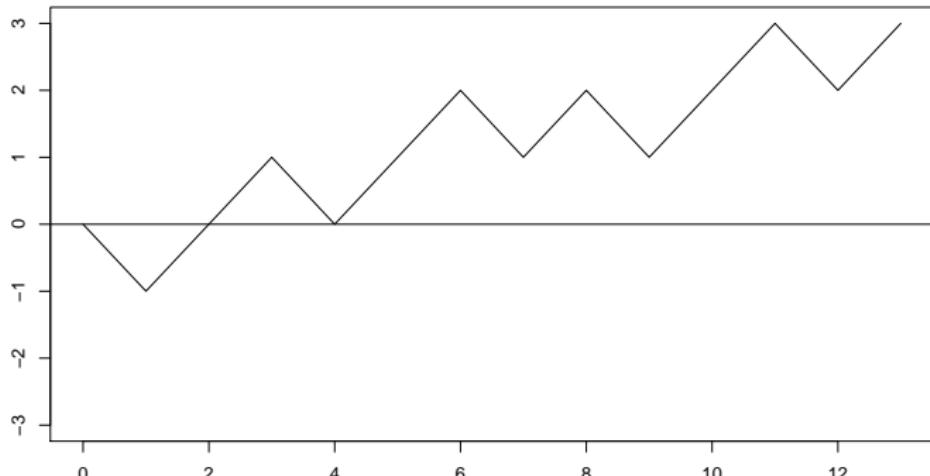


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

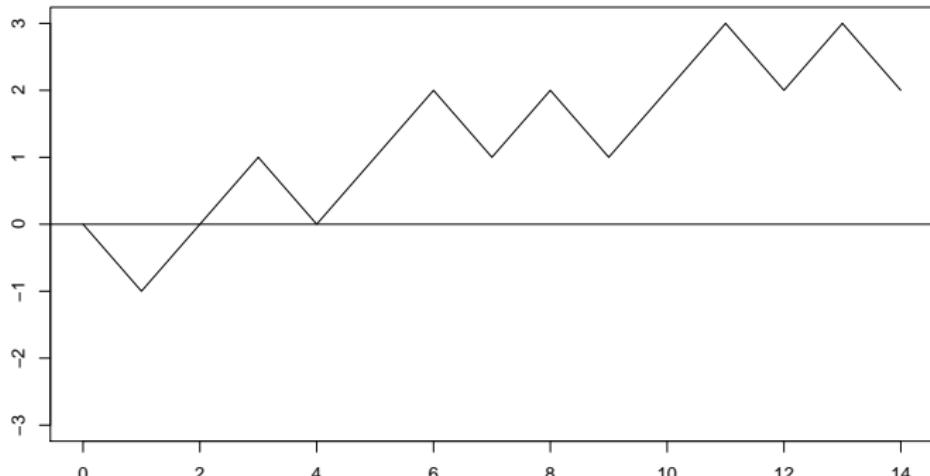


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

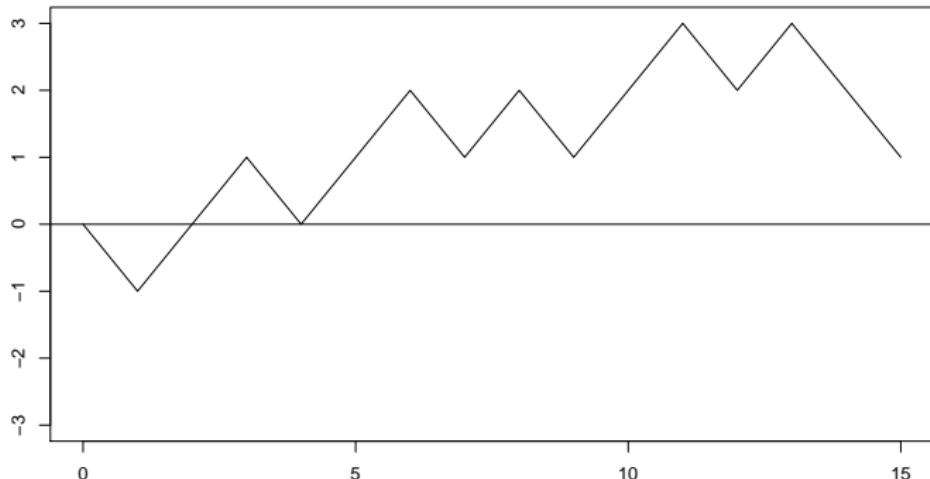


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

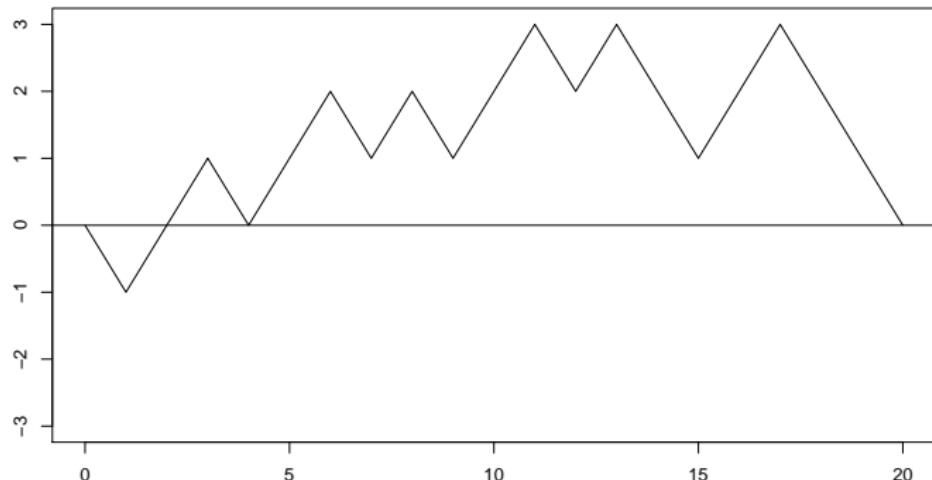


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

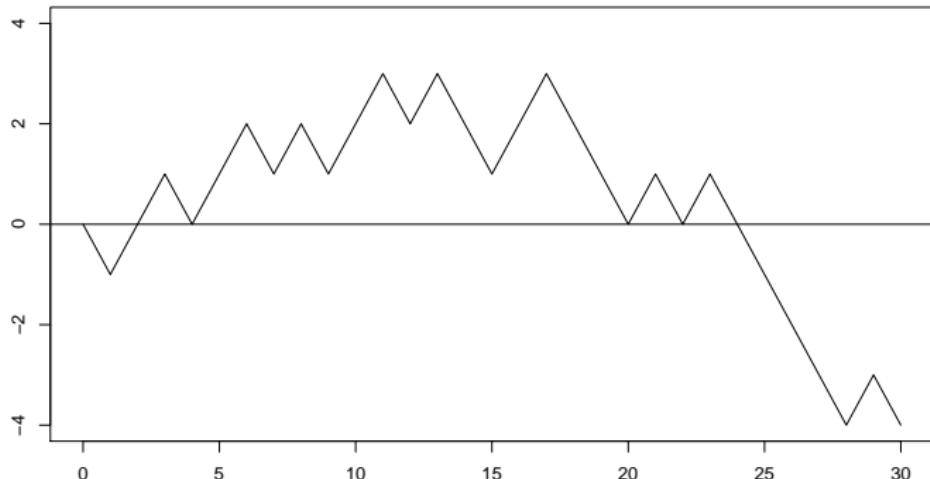


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

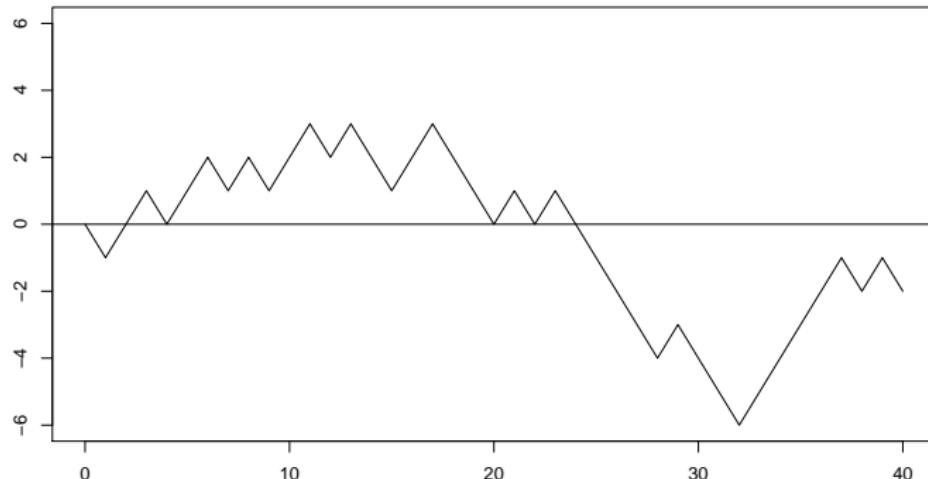


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

## Gadījuma klejošana

### *Definīcija*

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ .

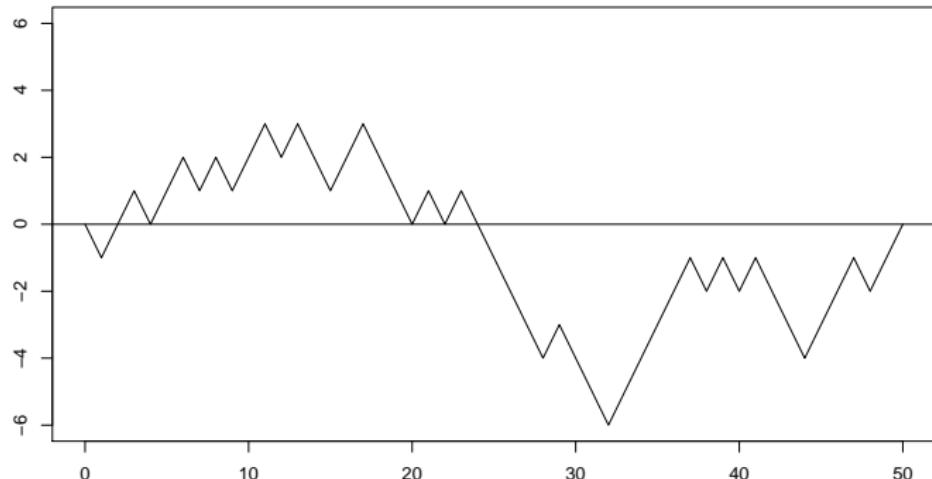


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

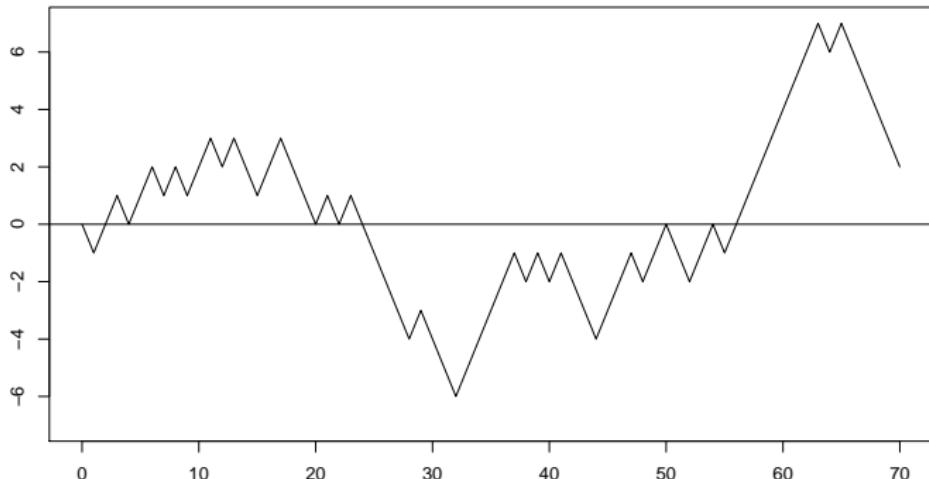


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

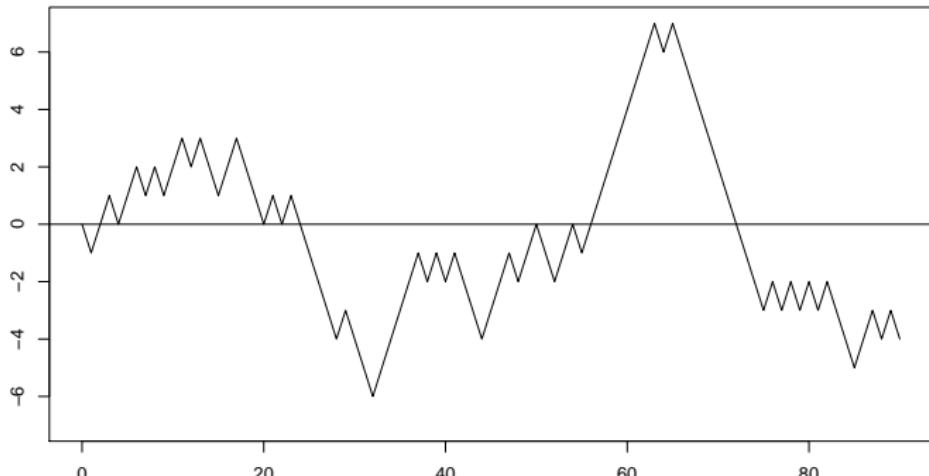


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

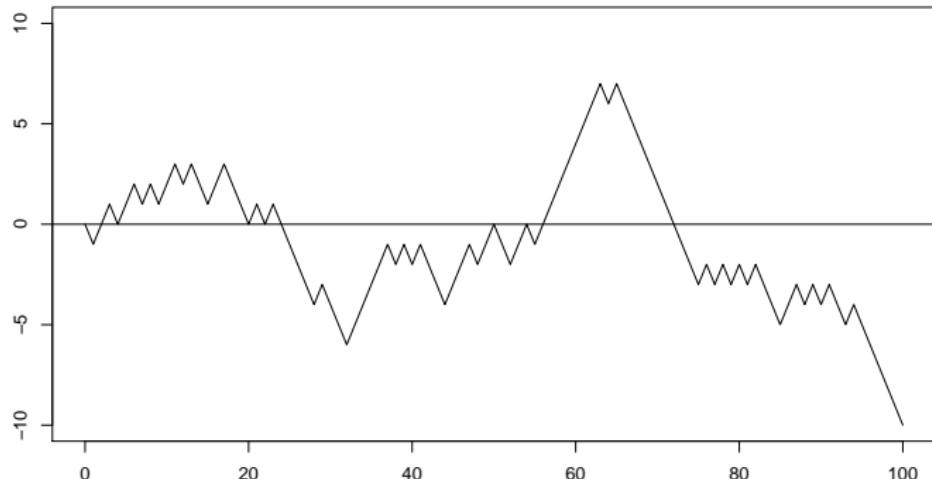


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

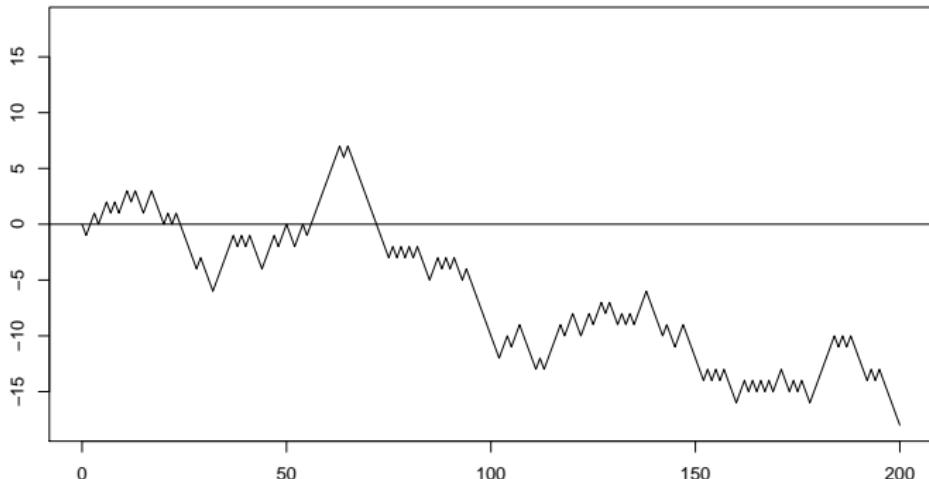


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

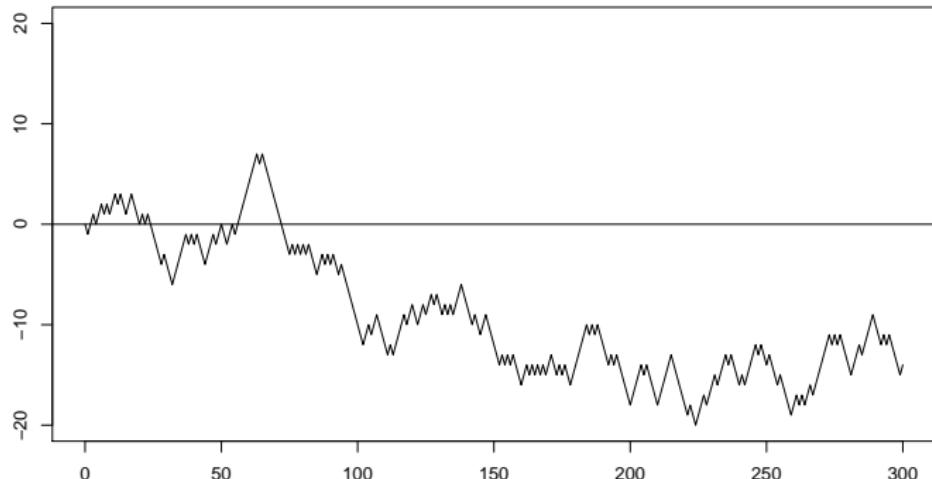


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

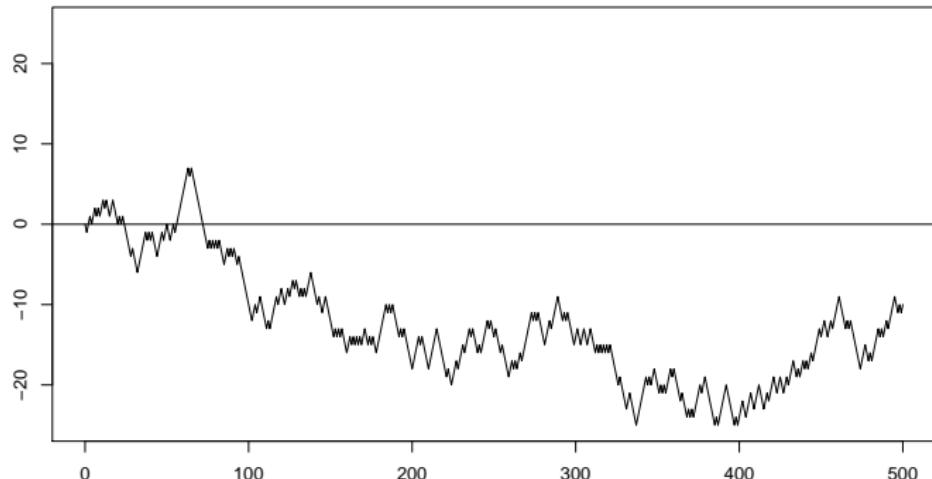


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

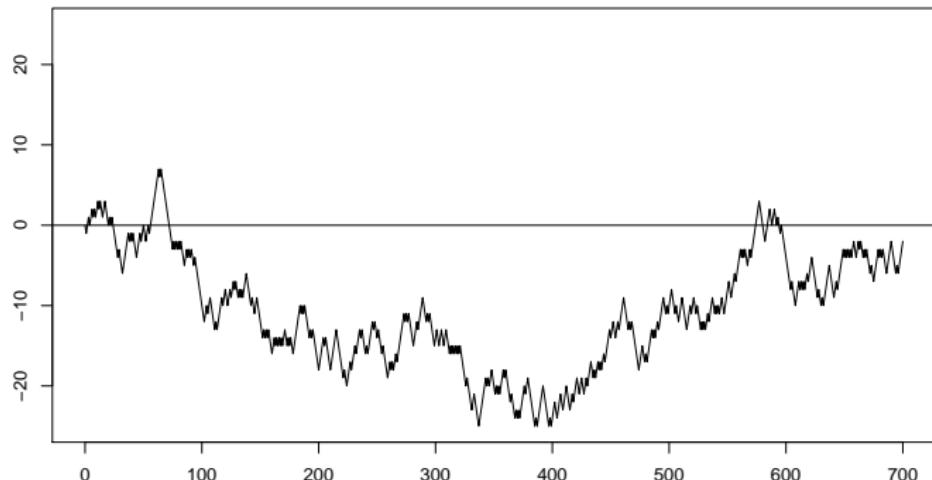


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$

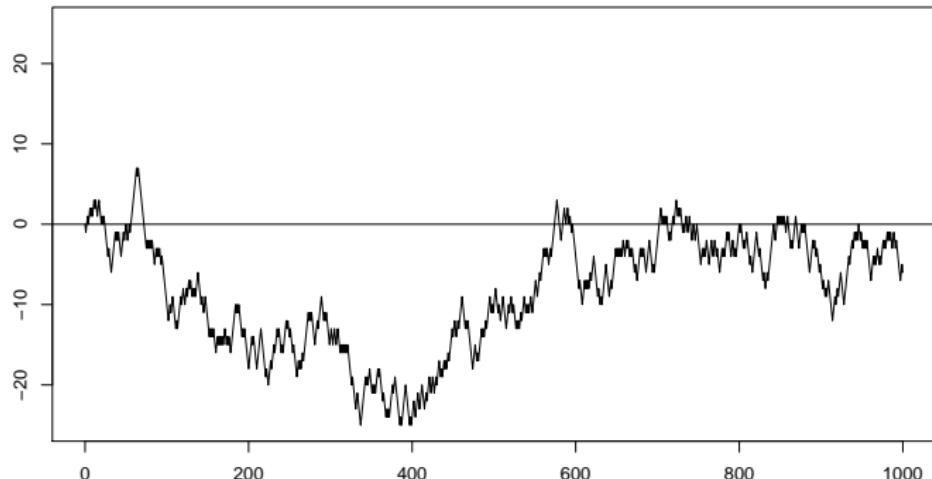


Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

# Gadījuma klejošana

## Definīcija

Gadījuma klejošana ir stohastisks process  $Y_n = \sum_{j=1}^n X_j$ , kur  $\{X_1, X_2, \dots\}$  ir gadījumu lielumu virkne, kurai  $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots$



Gadījuma klejošana robežā, kad  $n \rightarrow \infty$ , kļūst par Brauna kustību.

## Gadījuma klejošanas piemērs

- Diviem spēlētājiem katram attiecīgi ir skaitā  $n_1$  un  $n_2$  monētas.

## Gadījuma klejošanas piemērs

- Diviem spēlētājiem katram attiecīgi ir skaitā  $n_1$  un  $n_2$  monētas.
- Katrs no tiem met “neitrālo” monētu un ar varbūtību  $\frac{1}{2}$  katram spēlētājam ir iespēja vai nu iegūt pretinieka monētu, vai arī zaudēt savu monētu pretiniekam.

## Gadījuma klejošanas piemērs

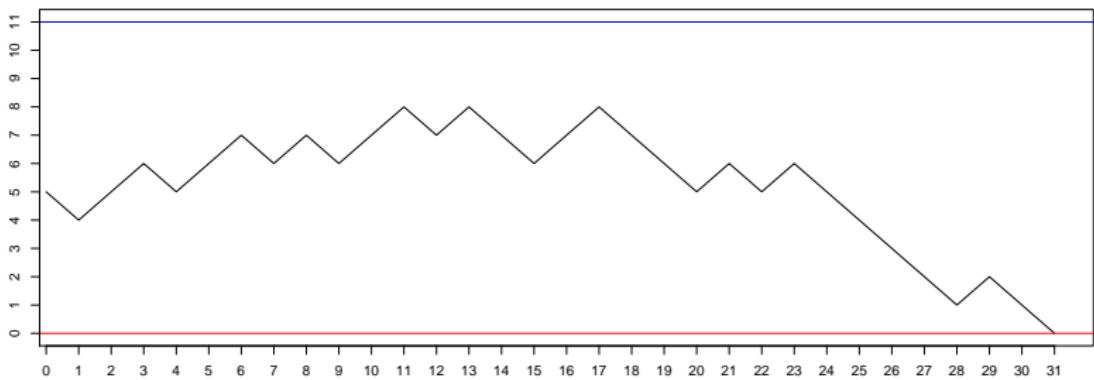
- Diviem spēlētājiem katram attiecīgi ir skaitā  $n_1$  un  $n_2$  monētas.
- Katrs no tiem met “neitrālo” monētu un ar varbūtību  $\frac{1}{2}$  katram spēlētājam ir iespēja vai nu iegūt pretinieka monētu, vai arī zaudēt savu monētu pretiniekam.

**Piemērs:** pirmais spēlētājs uzsāk spēli ar 5 monētām, otrs – ar 6 monētām. Spēle beigsies, kad pirmajam spēlētājam būs vai nu 11 monētas (viņš uzvarēs), vai – 0 monētas (viņš zaudēs).

## Gadījuma klejošanas piemērs

- Diviem spēlētājiem katram attiecīgi ir skaitā  $n_1$  un  $n_2$  monētas.
- Katrs no tiem met “neitrālo” monētu un ar varbūtību  $\frac{1}{2}$  katram spēlētājam ir iespēja vai nu iegūt pretinieka monētu, vai arī zaudēt savu monētu pretiniekam.

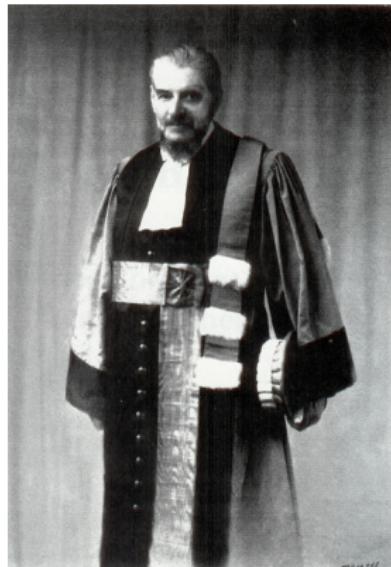
**Piemērs:** pirmais spēlētājs uzsāk spēli ar 5 monētām, otrs – ar 6 monētām. Spēle beigsies, kad pirmajam spēlētājam būs vai nu 11 monētas (viņš uzvarēs), vai – 0 monētas (viņš zaudēs).



# Brauna kustība finanšu matemātikā

Louis Jean - Baptist  
Alphonse Bachelier  
(1870. – 1946.)

- Franču matemātiķis.
- Viņa disertācija “Spekulācijas teorija” (1900. g.) ir vēsturiski pirmais darbs par augstākās matemātikas pielietojumu ekonomikā.
- Pirmais modelēja akciju cenas, izmantojot Brauna kustību.



# Brauna kustība finanšu matemātikā

- Izrādās, ka daudzu stohastikus procesus (akciju cenu, valūtas kursu) var aprakstīt ar Brauna kustības procesa trajektoriju uzvedību!!

# Brauna kustība finanšu matemātikā

- Izrādās, ka daudzu stohastikus procesus (akciju cenu, valūtas kursu) var aprakstīt ar Brauna kustības procesa trajektoriju uzvedību!!
- Mērķi: prognozēt stohastisku procesu uzvedību; novērtēt cenu varbūtisko scenāriju!

# Brauna kustība finanšu matemātikā

- Izrādās, ka daudzu stohastikus procesus (akciju cenu, valūtas kursu) var aprakstīt ar Brauna kustības procesa trajektoriju uzvedību!!
- Mērķi: prognozēt stohastisku procesu uzvedību; novērtēt cenu varbūtisko scenāriju!
- Citi jēdzieni: Ģeometriskā Brauna kustība; Stohastiskie integrāļi; Brauna tilts (statistikā) utt...

# Brauna kustība finanšu matemātikā

- Izrādās, ka daudzu stohastikus procesus (akciju cenu, valūtas kursu) var aprakstīt ar Brauna kustības procesa trajektoriju uzvedību!!
- Mērķi: prognozēt stohastisku procesu uzvedību; novērtēt cenu varbūtisko scenāriju!
- Citi jēdzieni: Ģeometriskā Brauna kustība; Stohastiskie integrāļi; Brauna tilts (statistikā) utt...

Vairāk var uzzināt LU **Matemātika – statistika** programmā!!!

# Paldies par uzmanību!