MAZĀ MATEMĀTIKAS UNIVERSITĀTE

LATVIJAS UNIVERSITĀTE ANNO 1919

NMS

Fazer

ludo SPĒĻU BODE

FIZMATI.LV

Kā dalīt ar nulli un bezgalību ?!

LU FMF docente
Ingrīda Uļjane

Mazā matemātikas universitāte
2016. gada 5. marts

Saturs

Vēsture

Kā dalīt ar bezgalību?!

Kā dalīt ar nulli?!

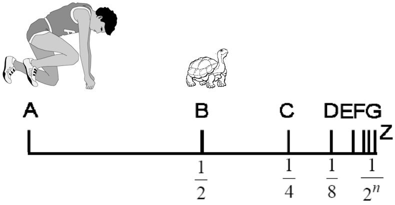
Kā novērst nenoteiktību $\frac{\infty}{\infty}$?

Kā novērst nenoteiktības $\frac{0}{0}$?

Kā novērst nenoteiktību $\infty - \infty$?

Zeno paradoks

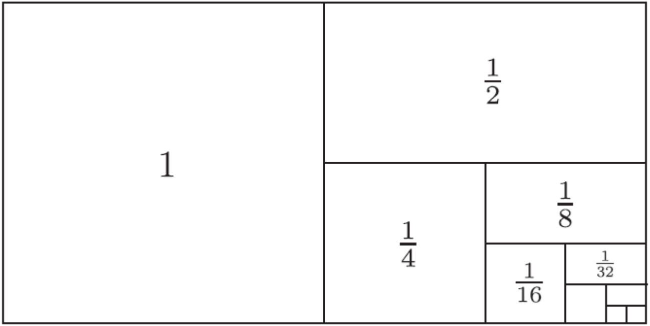
(Zeno no Eleas dzīvoja 490-430 gados p.m.e. tagadējās Itālijas dienvidos.)



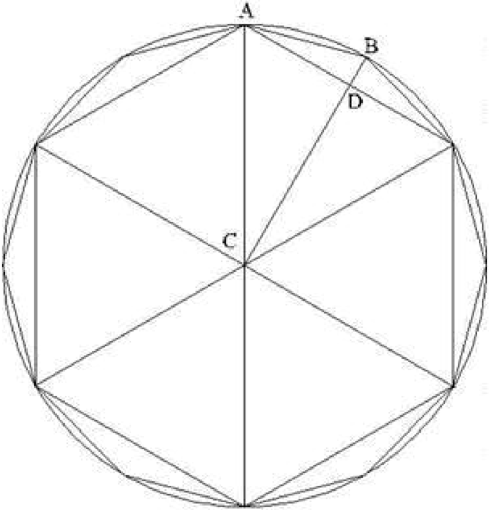
Katru reizi, kad Ahilejs sasniedzis nākamo atzīmes punktu, bruņurupucis ticis par vienu tālāk. Tā Ahillejs nenoķers bruņurupuci!?

Taisnstūra laukums

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 2.$$

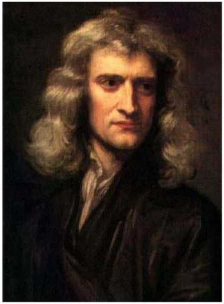


Riņķa laukums



Ņūtons un Leibnics

Gotfrīds Vilhelms Leibnics
(1646 - 1716)



Īzaks Ņūtons
(1642 - 1727)

Strādājot ar bezgalīgi maziem lielumiem, neatkarīgi viens no otra guva ievērojamus rezultātus diferenciālrēķinu jomā.

Barons Augustīns Luiss Košī (1789 - 1857)

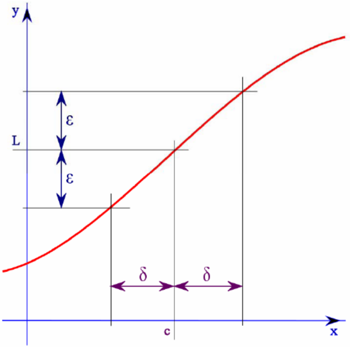
Franču matemātiķis barons Augustīns Luiss Košī pirmais matemātiski precīzi formulēja funkcijas robežas definīciju.

Funkcijas robežas definīcija

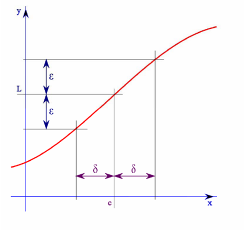
$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Definīcijas ideja:

Jo tuvāk x atrodas punktam c, jo mazāk funkcijas vērtība $f(x)$ atšķiras no L.



Funkcijas robežas definīcija



Definīcija

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ tad un tikai tad, ja katram $\varepsilon > 0$ var atrast $\delta > 0$ tādu, ka visiem x, kas no c atrodas tuvāk kā δ attālumā, bet nesakrīt ar c funkcijas vērtība $f(x)$ no L atšķiras mazāk par ε.

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0\, \forall x \neq c : \; |x - c| < \delta \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Funkcijas robežas aprēķināšanas piemēri

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x^2+3} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2-2}{2^{-x}} = \frac{16-2}{2^4} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

Kā dalīt ar bezgalību?!

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0\ \forall x : x > \delta \quad 0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0\ \forall x : x < -\delta \quad -\varepsilon < \frac{1}{x} < 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0\ \forall x : |x| > \delta \quad \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

Funkcijas robežas aprēķināšanas piemēri

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{30000}{x^5} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{100}{x^7+7} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{50}{x^5-700} = 0$$

Funkcijas robežas aprēķināšanas piemēri

$$\lim_{x\to+\infty}(4^{-x}+3^{-x}) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4^x}+\frac{1}{3^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4^x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3^x} = 0+0 = 0$$

Funkcijas robežas aprēķināšanas piemēri

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\dots+\frac{2n}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+3+\dots+2n}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)n}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+n}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$$

Kā dalīt ar nulli?!

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0\ \forall x : 0 < x < \delta \quad \frac{1}{x} > \varepsilon$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0\ \forall x : -\delta < x < 0 \quad \frac{1}{x} < -\varepsilon$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0\ \forall x :\ x \neq 0 \& \ |x| < \delta \quad \left|\frac{1}{x}\right| > \varepsilon$$

Funkcijas robežas aprēķināšanas piemēri

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \infty$$

Funkcijas robežas aprēķināšanas piemēri

$$\lim_{x \to 1} \frac{3}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 7} \frac{-5}{(x-7)^4} = -\infty$$

Funkcijas robežas aprēķināšanas piemēri

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x-5)^3}$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{3}{(3+x)^2}$$

$$\lim_{x \to -7} \frac{-7}{(7-x)^6}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{\infty}{\infty}$?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{3x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{\infty}{\infty}$?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+4x^3+5x^5}{-x^2-6x^5} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x^5}+\frac{4x^3}{x^5}+\frac{5x^5}{x^5}}{-\frac{x^2}{x^5}-\frac{6x^5}{x^5}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^4}+\frac{4}{x^2}+5}{-\frac{1}{x^3}-6} = -\frac{5}{6}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{\infty}{\infty}$?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+7}{2x^3+5x^2+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^5}{x^5}+\frac{7}{x^5}}{\frac{2x^3}{x^5}+\frac{5x^2}{x^5}+\frac{x}{x^5}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{7}{x^5}}{\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^4}} = +\infty$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{\infty}{\infty}$?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^7+x^2+5}{x^9+5x^8+x^7+5} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^7}{x^9}+\frac{x^2}{x^9}+\frac{5}{x^9}}{\frac{x^9}{x^9}+\frac{5x^8}{x^9}+\frac{x^7}{x^9}+\frac{5}{x^9}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^7}+\frac{5}{x^9}}{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^9}} = 0$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{\infty}{\infty}$?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 - x^2 + 1}{x^8 - 5x^5 + x^2 + 3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^5}{x^8} - \frac{x^2}{x^8} + \frac{1}{x^8}}{\frac{x^8}{x^8} - \frac{5x^5}{x^8} + \frac{x^2}{x^8} + \frac{3}{x^8}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^8}}{1 - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^6} + \frac{3}{x^8}} = 0$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{\infty}{\infty}$?

1)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{8x^2 - 5x + 3}$$

2)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 2}{5x^2 - 5x + 1}$$

3)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 - 5x^2 + 2}{3x^7 - 2x + 1}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{0}{0}$?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+5}{x+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{0}{0}$?

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+3}=\frac{12}{5}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{0}{0}$?

$$\lim_{x\to4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}=\lim_{x\to4}\frac{(1-\sqrt{x-3})(1+\sqrt{x-3})}{(x^2-16)(1+\sqrt{x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{1-(x-3)}{(x^2-16)(1+\sqrt{x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{4-x}{(x^2-16)(1+\sqrt{x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{4-x}{(x-4)(x+4)(1+\sqrt{x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{-1}{(x+4)(1+\sqrt{x-3})}=-\frac{1}{16}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{0}{0}$?

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}=\frac{1}{3}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{0}{0}$?

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{5-x}+2)}{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{5-x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{5-x-4}{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{5-x}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{5-x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{2-x}-1)(\sqrt{2-x}+1)(\sqrt{5-x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{(2-x-1)(\sqrt{5-x}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{(1-x)(\sqrt{5-x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{5-x}+2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{0}{0}$?

1)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-8x+7}$$

2)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2+3x-4}$$

3)

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-x-12}{\sqrt{x}-2}$$

Kā novērst nenoteiktību $\infty - \infty$?

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x^2-4}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}-\frac{2}{x^2-4}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-2}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2-4}=\infty$$

Kā novērst nenoteiktību $\infty - \infty$?

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{(\sqrt{x^2+2x}+x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}+\frac{x}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = 1$$

Kā novērst nenoteiktību $\infty - \infty$?

1)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$$

2)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}-x\right)$$