Kāda iespēja?

LU FMF 2. kursa studentes

Diāna Bartuseviča

Annija Varkale

Varbūtību teorija

Ļoti daudzu procesu un parādību iznākumu nevar iepriekš precīzi paredzēt.

Varbūtību teorija ir matemātikas nozare, kas pēta **gadījuma rakstura** parādību un procesu vispārīgās īpašības.

Galvenie jēdzieni

- **Eksperiments** ir darbība, kuras iznākums iepriekš precīzi nav zināms.

Metamā kauliņa mešana, monētas mešana

- **Notikums** ir jebkurš fakts, kas eksperimenta rezultātā vai nu realizējas, vai nē.

A- notikums, ka uz labu laimi izvilkta kārts būs dāma

- **Iznākumu kopa Ω** ir kopa, kuras elementi ir visi iespējamie notikumi.

Metot monētu ir divi iznākumi, tāpēc

$$\Omega = \{cipars\ uz\ augšu; ģērbonis\ uz\ augšu\} = \{C, Ģ\}$$

Statistiskā varbūtība

- Pa vienam vai pa pāriem atrodiet kādu tekstu latviešu valodā, kurā būtu vismaz 100 simboli.

- Izskaitiet, cik reizes pirmajos simts simbolos ir sastopams burts ‘a’ un cik reizes ir sastopams burts ‘i’.

- LU_WIFI lietotājvārds wlan02
- LU_WIFI parole NMS2017

Atbildes jāiesniedz aptaujā, kuru var atrast

- https://goo.gl/forms/pIAiPWGgIGXoiMnD2 vai arī
- https://www.facebook.com/neklatienesskola lapā
- Izmantojot QR kodu

Relatīvais biežums

Ja k neatkarīgos mēģinājumos notikums A iestājas m reizes, tad m sauc par notikuma A absolūto biežumu, bet attiecību $W(A) = \frac{m}{k}$ par notikuma A relatīvo biežumu. To var uzskatīt par notikuma A varbūtības aptuveno vērtību.

Burta 'a' relatīvais biežums latviešu valodā ir $W(a) = 0{,}111$, bet burta 'i' relatīvais biežums ir $W(i) = 0{,}093$, tātad varbūtība, ka uz labu laimi izvēlēts burts no dota teksta būs 'a' ir 0,11.

Francija, 17. gs. vidus

Modē esošās azartspēles kļuva arvien sarežģītākas, tāpēc radās vajadzība pēc metodes, kā noteikt, kādas ir izredzes uzvarēt.

Labi zināms spēlmanis *Chevalier de Méré* izvirzīja problēmu

Vai varbūtība ar metamo kauliņu četrreiz metot uzmest vienu sešinieku ir tik pat liela, cik varbūtība, 24 reizes metot divus metamos kauliņus, vismaz vienreiz uzmest abus sešiniekus?

Viņaprāt, iespēja uzmest divus sešiniekus ir par 1/6 mazāka nekā uzmest vienu sešinieku, tāpēc lai uzmestu divus sešiniekus jāmet sešas reizes vairāk reižu.

Klasiskā varbūtību aprēķināšanas formula

De Merē šo problēmu lūdza atrisināt savam drauga Blēzam Paskālam. Paskāls sāka par šīm problēmām diskutēt ar savu draugu Pjēru Fermā. Šīs diskusijas rezultātā rādās klasiskā varbūtību aprēķināšanas formula:

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

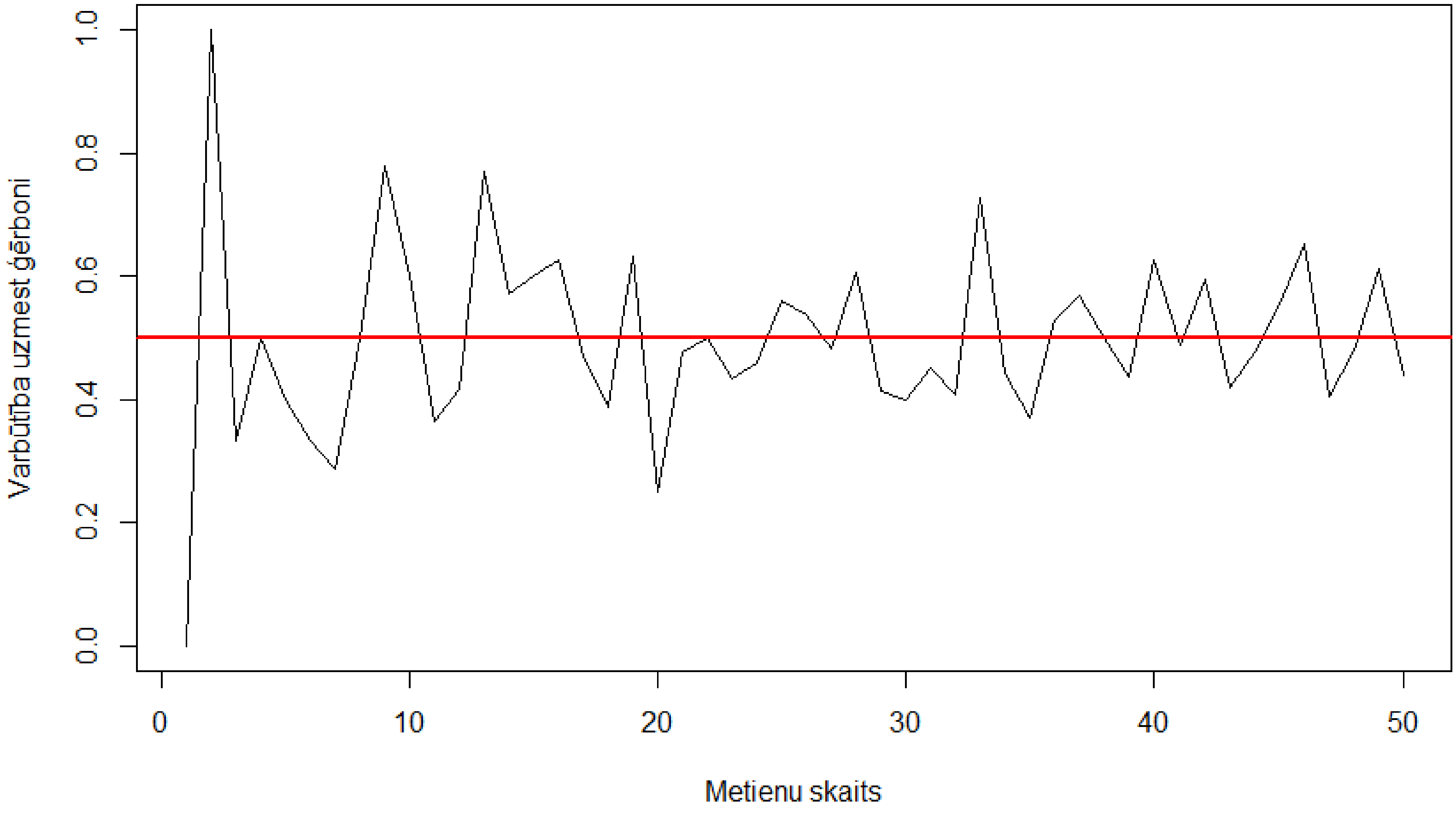
kur N ir visi iespējamie iznākumi un M ir notikumam A labvēlīgie iznākumi.

Svarīgi

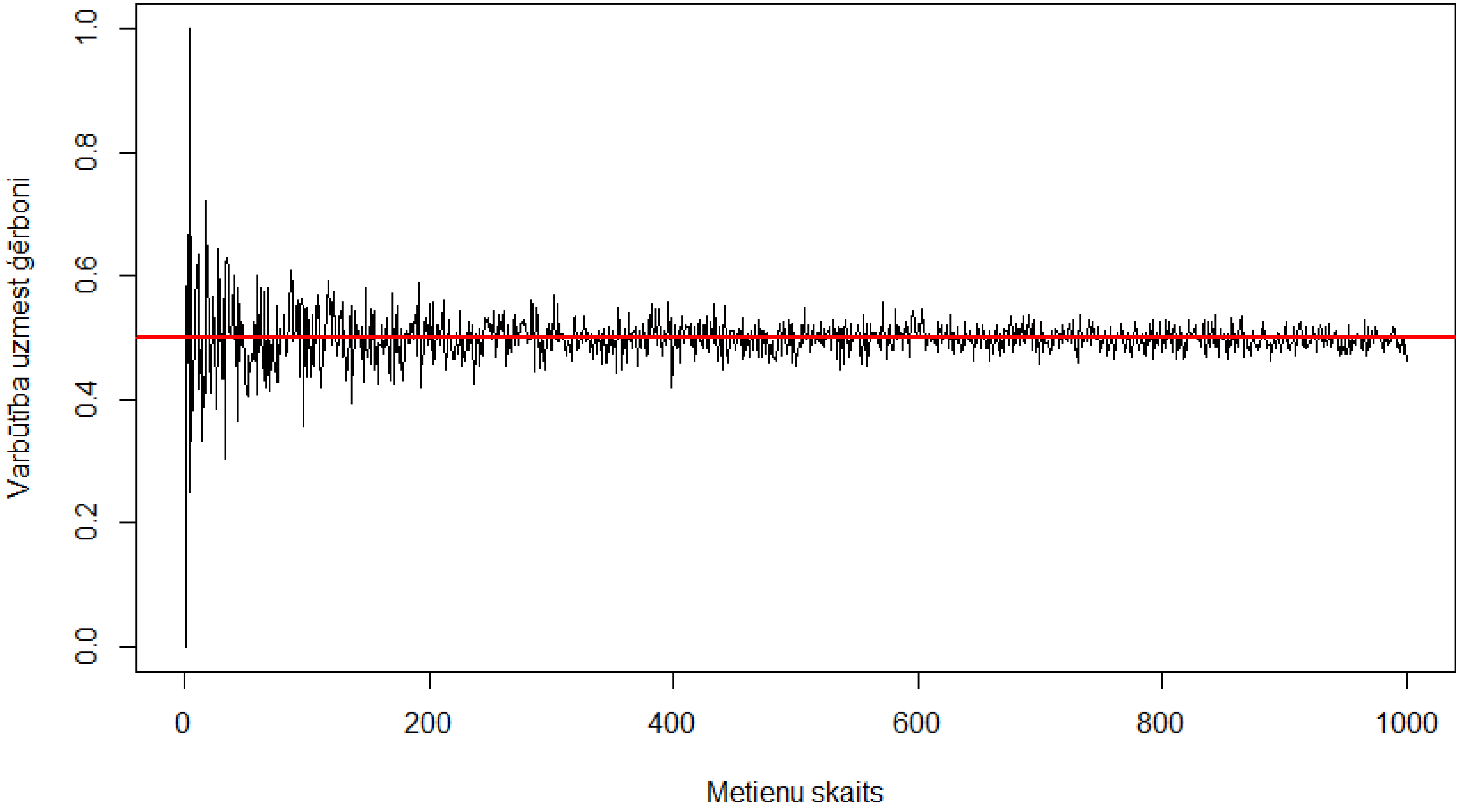
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- Varam izmantot tikai tad, kad visi iespējamie iznākumi ir vienādi iespējami!

Monētas mešana

- Met monētu. Kāda varbūtība uzmest ciparu?
- Pārbaudīsim to praktiski?



Varbūtība uzmest ģerboni
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
10
20
30
40
50
Metienu skaits


Varbūtība uzmest ģērboni
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
200
400
600
800
1000
Metienu skaits

Notikumu veidi

- A ir **pilnīgi drošs** notikums, ja tas iestājās katrā mēģinājumā. Cik ir $P(A)$?

Metot metamo kauliņu, uzmest pozitīvu skaitli

- Ar $\emptyset$ apzīmē **neiespējamu** notikumu. Cik ir $P(\emptyset)$?

Metot metamo kauliņu, uzmest skaitli septiņi

- Par notikuma A pretējo notikumu sauc notikumu $\bar{A}$, kas iestājas tikai tad, ja notikums A neiestājas.

A ir notikums uzmest pāra skaitli. Pretējais notikums $\bar{A}$ ir uzmest nepāra skaitli.

- Zināma notikuma A varbūtība. Kāda ir $\bar{A}$ varbūtība?

- Notikumus sauc par **nesavienojamiem**, ja katru reizi var iestāties tikai viens no tiem.

Metot spēļu kauliņu, uzmest skaitļus 1 un 6 reizē ir neiespējami.

- Ja viena notikuma iestāšanās neizslēdz cita notikuma iestāšanos tajā pašā izmēģinājumā, tad notikumi ir **savienojumi**.

Metot divus spēļu kauliņus, 3 punktu uzmešana uz viena no tiem neizslēdz 3 punktu uzmešanu uz otra. Tātad notikumi ir savienojami.

- Divus notikumus sauc par **neatkarīgiem**, ja viena notikuma īstenošanās neietekmē otra notikuma īstenošanos.

Divas reizes met metamo kauliņu. Otrā metiena rezultāts nekādi nav atkarīgs no pirmā metiena rezultāta.

Darbības ar notikumiem

- Par divu notikumu A un B **apvienojumu** sauc notikumu, kurš realizējas tad un tikai tad, ja iestājas vismaz viens no notikumiem A vai B. To apzīmē ar $A \cup B$.

- Par divu notikumu A un B **šķēlumu** sauc notikumu, kurš realizējas tad un tikai tad, ja iestājas vismaz viens no notikumiem A vai B. To apzīmē ar $A \cap B$.

Permutācijas

Lai aprēķinātu, cik dažādos veidos var pārkārtot kopas elementus, izmanto **permutācijas.**

$$P_n = n!$$

Ar $n!$ apzīmē visu naturālo skaitļu no 1 līdz n reizinājumu jeb $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

Piecus skolēnus nosēdināt rindā var

$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ *veidos.*

Variācijas

Lai aprēķinātu, cik dažādas sakārtotas izlases ar apjomi k var iegūt no kopas ar apjomu n, izmanto **variācijas**.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

No deviņiem skolēniem dežurantu un viņa palīgu var izvēlēties

$$A_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7} = 8 \cdot 9 = 72 \text{ veidos}$$

Kombinācijas

Lai aprēķinātu, cik dažādas <u>nesakārtotas</u> izlases ar apjomu k var iegūt no kopas ar apjomu n izmanto **kombinācijas**.

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

No deviņiem skolēniem divus dežurantus var izvēlēties

$$C_9^2 = \frac{9!}{2! \cdot (9-2)!} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 36 \text{ veidos}$$

Uzdevumi

1. Aploksnē ir piecas vienādas kartītes ar numuriem no 1 līdz 5. Uz labu laimi kartītes pa vienai izvelk no aploksnes. Noteikt varbūtību, ka rezultātā kartītes tiks izvilktas augošā secībā.

2. Rūdis no 15 jautājumiem ir iemācījies 12. Zināms, ka kontroldarbā tiks iekļauti divi no šiem 15 jautājumiem. Kāda varbūtība, ka Rūdis zinās atbildi uz abiem jautājumiem?

Īpašības

- Ja notikumi ir savienojami, tad
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
- Ja notikumi ir nesavienojami, tad
$$P(A \cap B) = 0 \text{ } un \text{ } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
- Ja divi notikumi ir neatkarīgi, tad
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Piemērs

- A –notikums, ka ASV prezidentam bija bārda.

$$P(A) = \frac{7}{45}$$

- B – notikums, ka ASV prezidents nomiris prezidentūras laikā.

$$P(B) = \frac{8}{45}$$

Sagaidām, ka šie abi notikumi ir savā starpā neatkarīgi, tāpēc varbūtība, ka ASV prezidents bija ar bārdu un nomiris prezidentūras laikā ir

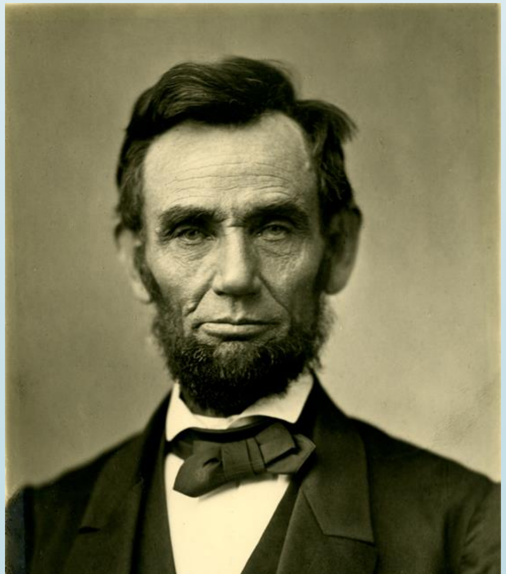
$$P(A) \cdot P(B) = \frac{7}{45} \cdot \frac{8}{45} = \frac{56}{2025} \approx 0{,}028$$

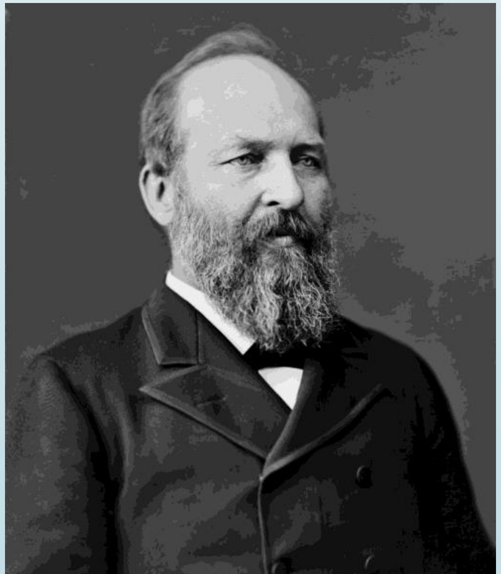
Varbūtība, ka ASV prezidents bija ar bārdu un nomira prezidentūras laikā ir

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{7}{45}\cdot\frac{8}{45}=\frac{56}{2025}\approx 0{,}028$$

Tātad, sagaidām, ka $0{,}028\cdot 45=1{,}35$ prezidenti būs bijuši ar bārdu un nomiruši prezidentūras laikā.

Īstenībā tādi ir bijuši tieši divi- Abrahams Linkolns un Džeimss Gārfīlds.





Chevalier de Méré uzdevums

Vai varbūtība ar metamo kauliņu četrreiz metot uzmest vienu sešinieku ir tik pat liela, cik varbūtība, 24 reizes metot divus metamos kauliņus, vismaz vienreiz uzmest divus sešiniekus?

1. Kāda ir varbūtība četrreiz metot uzmest vismaz vienu sešinieku?
2. Kāda ir varbūtība 24 reizes metot divus metamos kauliņus, uzmest vismaz vienreiz divus sešiniekus?

1. Kāda ir varbūtība četrreiz metot uzmest vismaz vienu sešinieku?

Varbūtība vienā metienā nevienu reizi neuzmest sešinieku ir $\frac{5}{6}$. Četras reizes metot, varbūtība neuzmest ne reizi sešinieku ir $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\approx 0{,}48$.

Pretējā notikuma- uzmest vismaz vienu reizi sešinieku ir $1-0{,}48=0{,}52$.

Kāda ir varbūtība 24 reizes metot divus metamos kauliņus, uzmest vismaz vienreiz divus sešiniekus?

Varbūtība vienā metienā nevienu reizi neuzmest sešinieku ir $\frac{35}{36}$.

24 reizes metot, varbūtība neuzmest ne reizi sešinieku ir $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}51$.

Pretējā notikuma- uzmest vismaz vienu reizi divus sešiniekus ir $1 - 0{,}51 = 0{,}49$.

Tātad varbūtības nav vienādas!

Ģeometriskā varbūtība

Pieņemsim, ka plaknē dotas figūras G un g, pie kam, figūra G ietver sevī figūru g. Uz labu laimi izvēlas punktu no figūras G. Varbūtība, ka izvēlētais punkts piederēs arī figūrai g, ir

$$P(A) = \frac{S(g)}{S(G)}$$

kur S(A) ir figūras A laukums.

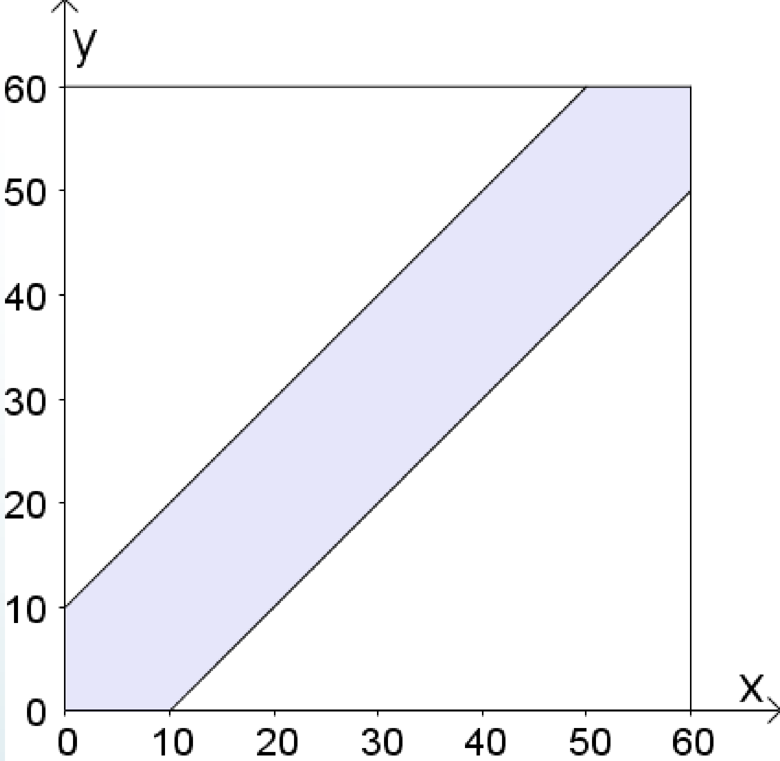
Līdzīgi ģeometrisko varbūtību var aprēķināt telpiskiem ķermeņiem, salīdzinot ķermeņu tilpumus, kā arī nogriežņiem, salīdzinot to garumus.

Satikšanās

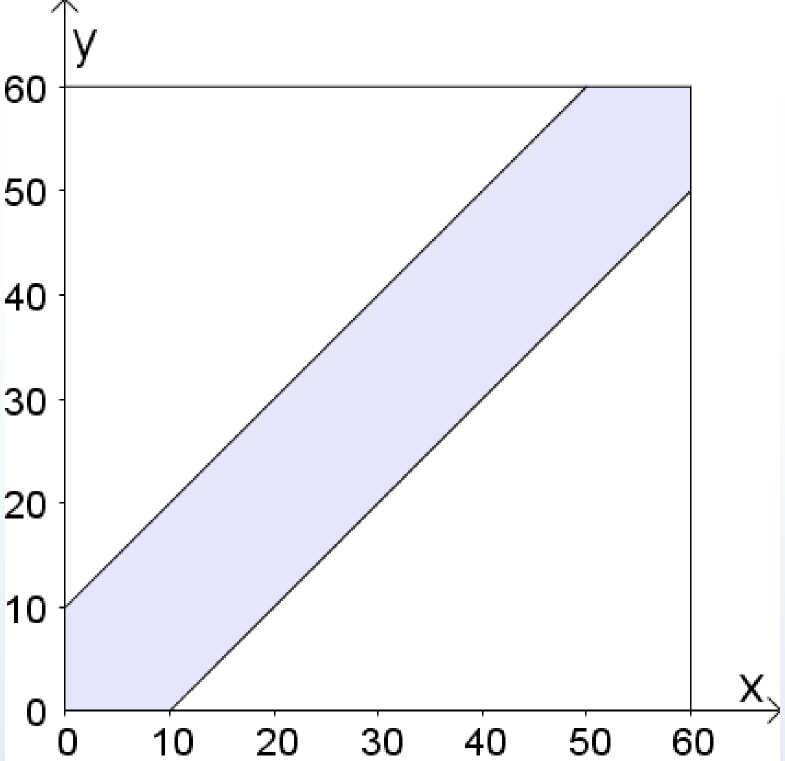
Anna un Māris norunāja satikties noteiktā vietā no plkst. 12:00 līdz 13:00. Katrs no viņiem, atnākot uz satikšanos, gaida otru 10 minūtes (tikai līdz 13:00) un pēc tam iet prom. Kāda ir varbūtība, ka satikšanās notiks, ja Anna un Māris ierašanās laiku izvēlās uz labu laimi?

Apzīmēsim notikumu, ka Anna un Māris satiksies, ar A. Koordinātu sistēmā uz x ass attēlosim Annas, bet uz y ass attēlosim Māra ierašanās laiku.

Ja Anna ierodas x minūtes pēc pulksten 12:00, bet Māris ierodas y minūtes pēc pulksten 12:00, tad $0 \leq x \leq 60$ un $0 \leq y \leq 60$. Ģeometriski šī nevienādību sistēma nosaka grafikā redzamo kvadrātu.



Labvēlīgo iznākumu kopu jeb notikumu, ka Anna un Māris satiksies, nosaka nevienādība $|x - y| \leq 10$, kas atbilst iekrāsotajai daļai grafikā.



Visa kvadrāta laukums ir

$60 \cdot 60 = 3600$, bet iekrāsotās figūras laukums ir

$3600 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 50 = 1100$,

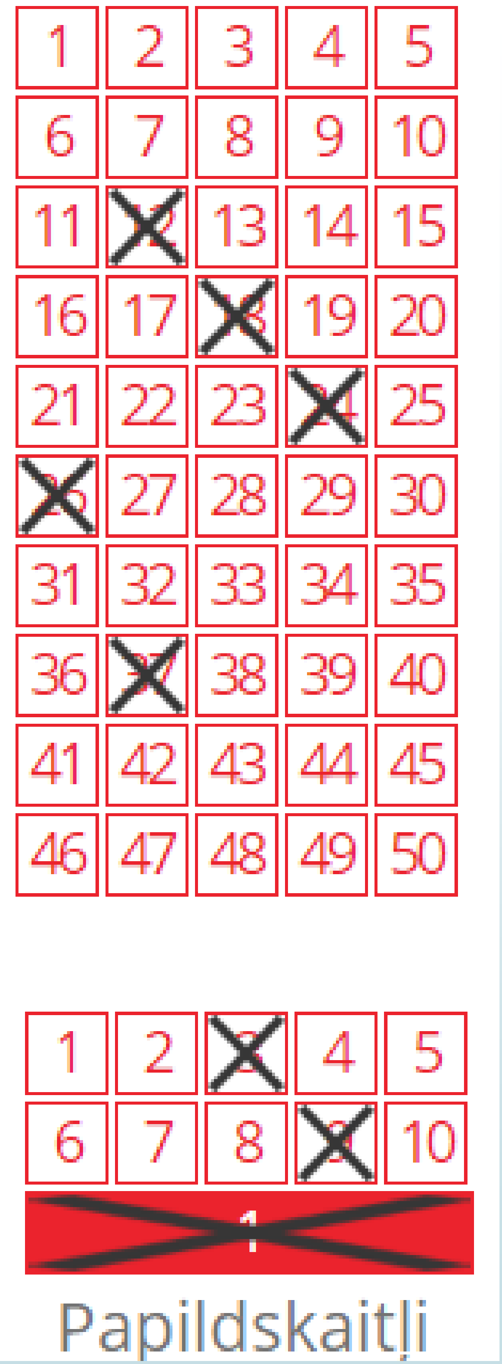
tāpēc $P(A) = \frac{1100}{3600} \approx 0{,}306$.

- Spēles kvītī jāatzīmē 5 no 50 skaitļiem un 2 no 10 papildskaitļiem.
- Galveno laimestu iegūst, ja ir atminēti pareizi 5 skaitļi un abi papildskaitļi.
- Viena varianta cena 2.00€

- Spēles kvītī jāatzīmē 6 no 48 skaitļiem.
- Izlozes sākumā tiek izlozēts laimīgais skaitlis. Galveno laimestu iegūst, ja ir atminēti pareizi visi 6 skaitļi un kāds no tiem ir laimīgais skaitlis.
- Viena varianta cena 0.60€

EIROJACKPOT

Visi iespējamie veidi, kā var izlozēt 5 no 50 skaitļiem ir $C_{50}^{5} = \frac{50!}{5!\cdot 45!} = 2118760$, un 2 no 10 var izvēlēties $C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$. Tātad kopējais variantu skaits ir 95344200 un varbūtība uzminēt visus septiņus skaitļus ir 0,0000000101.



VIKING LOTTO

Visi iespējamie veidi, kā var izvēlēties 6 no 48 skaitļiem ir $C_{48}^{6} = \frac{48!}{42! \cdot 6!} = 12'271'512$, tāpēc varbūtība uzminēt visus sešus skaitļus ir $0,000000081$.

Varbūtība, ka izlozes sākumā izvēlētais laimīgais skaitlis sakritīs ar izlozētajiem sešiem ir $\frac{6}{48} = \frac{1}{8}$.

Tāpēc varbūtība uzvarēt ir $0,0000000101$.

Dzimšanas dienu problēma

1. Cik lielam jābūt skolēnu skaitam klasē, lai varbūtība, ka vismaz diviem skolēniem sakrīt dzimšanas dienas būtu vismaz 50%?

2. Cik liela varbūtība, ka vismaz diviem šajā telpā esošajiem skolēniem sakritīs dzimšanas diena?

1. Varbūtība, ka diviem cilvēkiem nesakritīs dzimšanas dienas ir $\frac{365}{366} \approx 0{,}997$

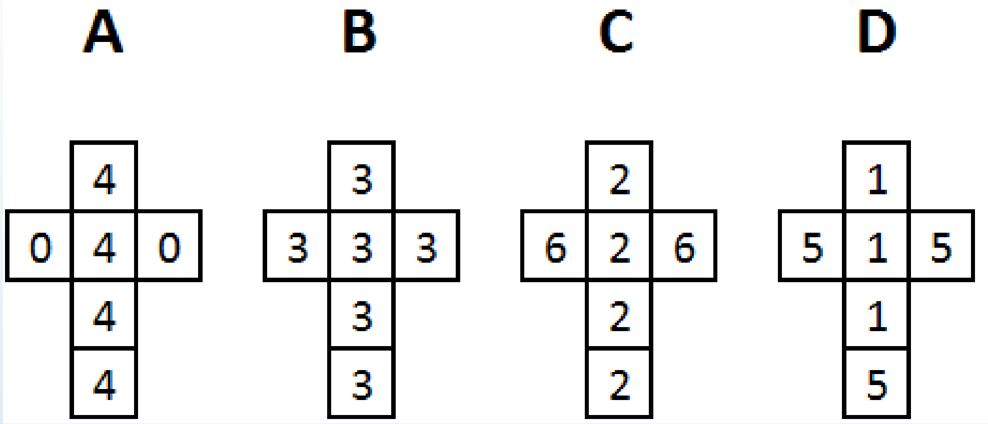
Varbūtība, ka trīs cilvēkiem nesakritīs dzimšanas dienas ir $\frac{365}{366} \cdot \frac{364}{366} \approx 0{,}991$

Varbūtība, ka 10 cilvēkiem nesakritīs dzimšanas dienas ir $\frac{365}{366} \cdot \frac{364}{366} \cdot \frac{363}{366} \cdot \ldots \cdot \frac{355}{366} \approx 0{,}833$

Ja telpā ir 23 cilvēki, varbūtība, ka dzimšanas dienas nesakritīs, ir $0{,}494$, tāpēc varbūtība, ka diviem cilvēkiem dzimšanas dienas sakritīs, ir $1 - 0{,}494 = 0{,}506$.

Efrona kauliņi

Kādam krodziņa saimniekam ir neparasti četri metamie kauliņi.



Katru krodziņa apmeklētāju saimnieks uzaicina uzspēlēt ar viņu kauliņus ar šādiem noteikumiem. Vispirms apmeklētājs izvēlas jebkuru no četriem kauliņiem. Pēc tam saimnieks izvēlas vienu no atlikušajiem kauliņiem. Tad abi met katrs savu kauliņu. Tas, uz kura kauliņa uzkrīt lielāks skaitlis, uzvar. Saimnieks regulāri divas reizes biežāk uzvar nekā zaudē. Kā tas var būt?

Ja apmeklētājs izvēlas kauliņu A, tad krodzinieks izvēlēsies kauliņu D.

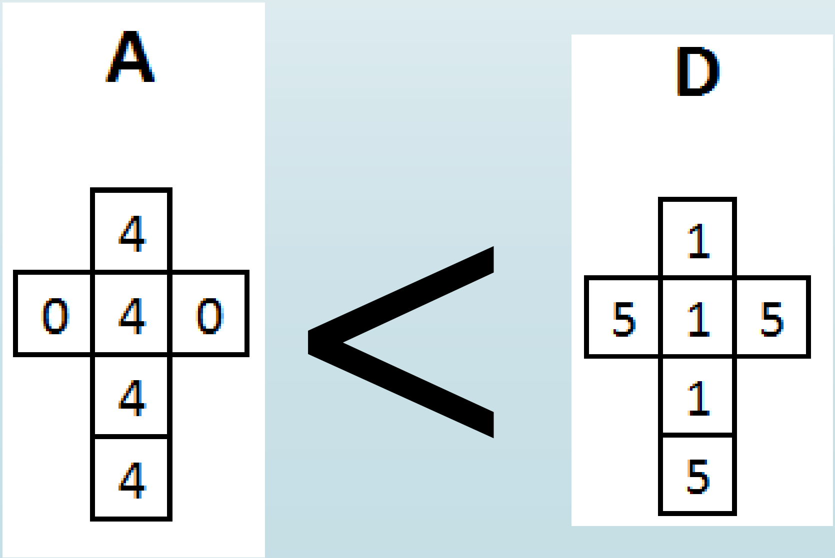
D uzvar,

- ja uz D uzkrīt 5
- ja uz D uzkrīt skaitlis 1, bet uz A uzkrīt skaitlis 0.

Tātad varbūtība, ka kauliņš D uzvarēs kauliņu A, ir

$$P(D > A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Tātad lielākas izredzes uzvarēt ir krodziniekam.



Apmeklētājam sāk šķist, ka kauliņš D ir stiprākais, tāpēc viņš izvēlas to. Taču tad krodzinieks izvēlas kauliņu C.

C uzvar,

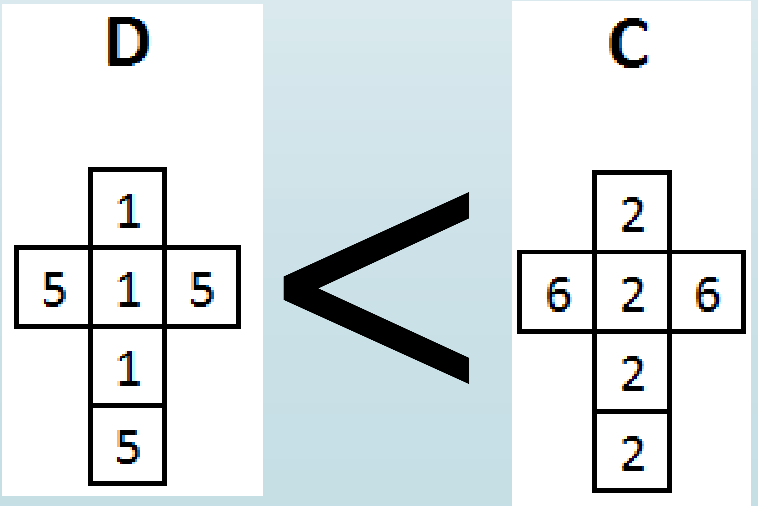
- ja uz C uzkrīt seši
- ja uz C uzkrīt 2, bet uz D uzkrīt 1.

Tātad varbūtība, ka kauliņš C uzvarēs kauliņu D, ir

$P(C > D) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Tātad

lielākas izredzes uzvarēt

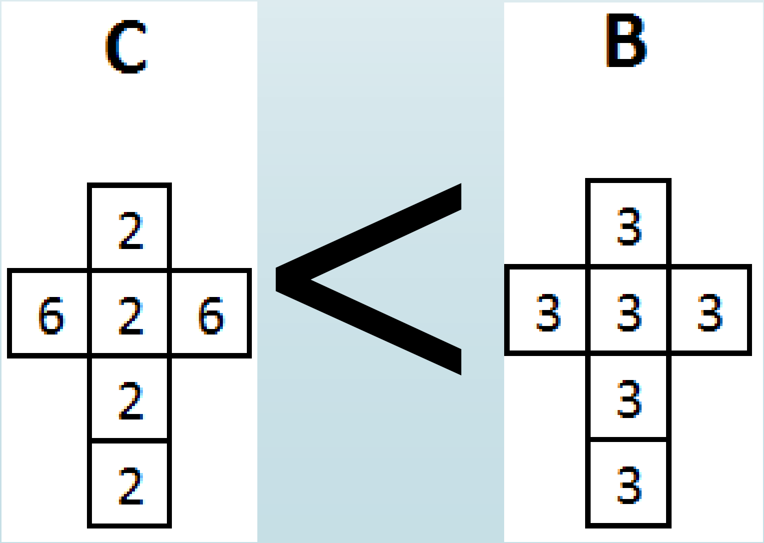
ir krodziniekam.



Šoreiz apmeklētājs izvēlas kauliņu C, un krodzinieks izvēlas kauliņu B. Kauliņš B uzvarēs, ja uz kauliņa C uzkritīs skaitlis 2, tāpēc

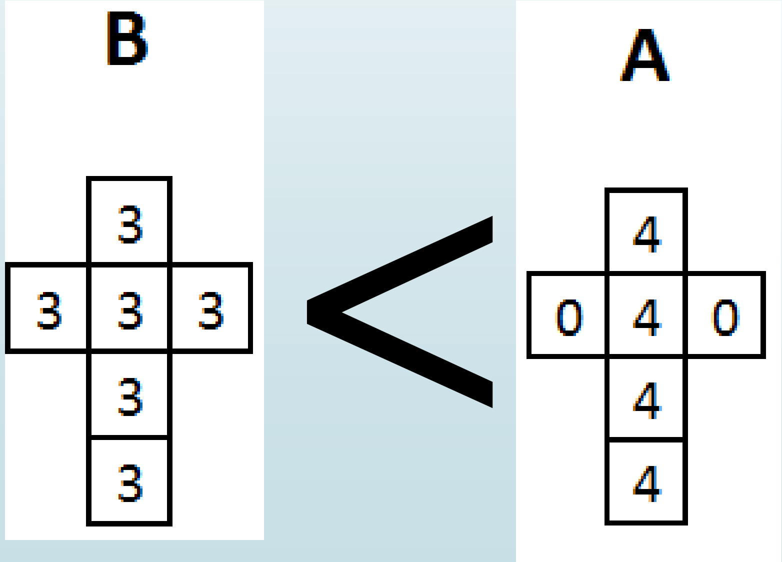
$$P(B > C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

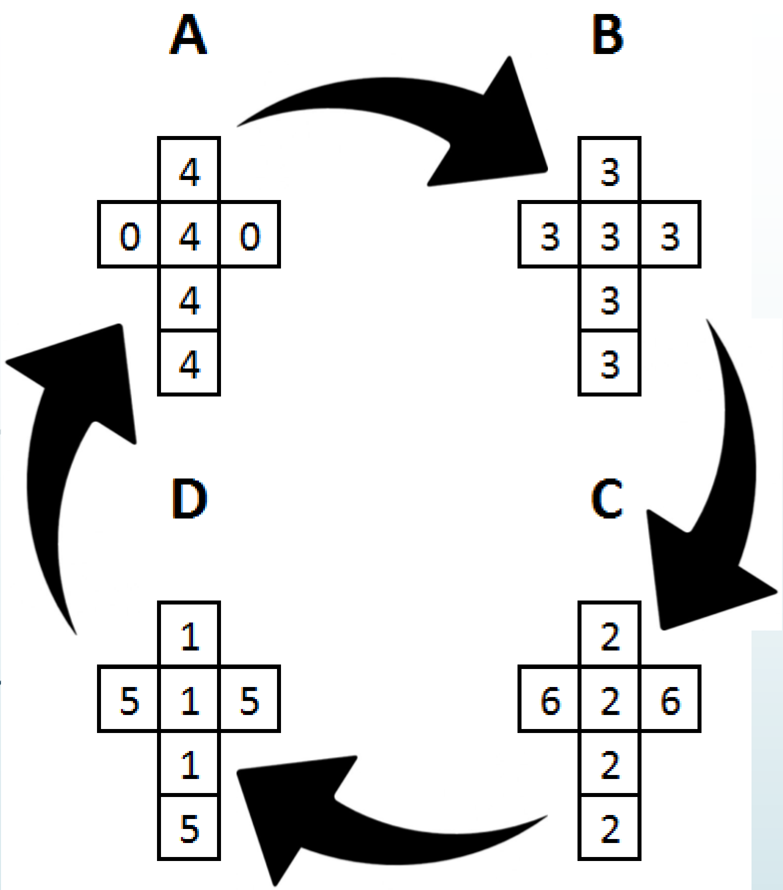
Tātad, arī šoreiz lielākas izredzes uzvarēt saimniekam.



Apmeklētāja pēdējā cerība ir kauliņš B, taču tad krodzinieks izvēlas kauliņu A. Kauliņš A uzvarēs, ja uz tā uzkritīs četrinieks, tātad

$$P(A > B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$





Tātad, lai kādu kauliņu izvēlētos apmeklētājs, saimnieks vienmēr varēs izvēlēties metamo kauliņu, ar kuru uzvarēt ir lielāka varbūtība.

Apskatīto kauliņu sistēmu atklājis amerikāņu matemātiķis B.Efrons, tāpēc šādu kauliņu sistēmu sauc par Efrona kauliņiem.

Paldies par uzmanību!