

Uzdevumi par izkrāsotu plakni un telpu

Raitis Ozols, LU
MMU, 4.11.2017.

levads

Šajā nodarbībā apskatīsim uzdevumus, kas saistīti ar plakni vai telpu, kuras katrs punkts nokrāsots kādā krāsā (kuru skaits ir galīgs).

1. uzdevums. Katrs plaknes punkts ir nokrāsots baltā vai melnā krāsā. Pierādīt, ka plaknē varēs atrast divus vienā krāsā nokrāsotus punktus, attālums starp kuriem ir tieši 1 cm.

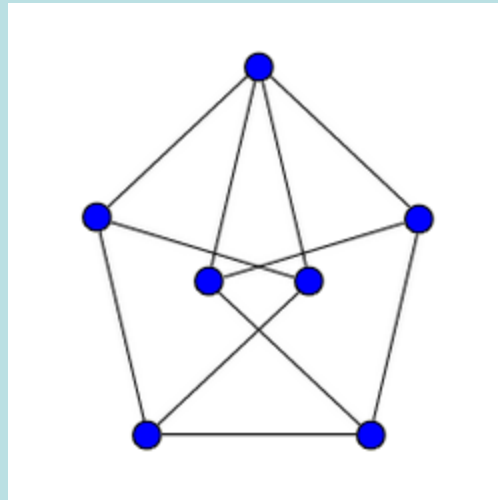
2. uzdevums. Katrs plaknes punkts ir nokrāsots baltā vai melnā krāsā. Pierādīt, ka plaknē varēs atrast trīs vienā krāsā nokrāsotus punktus, kas atrodas uz vienas taisnes.

3. uzdevums. Katrs plaknes punkts ir nokrāsots baltā vai melnā krāsā. Pierādīt, ka plaknē varēs atrast trīs vienā krāsā nokrāsotus punktus, kas neatrodas uz vienas taisnes.

4. uzdevums. Katrs plaknes punkts ir nokrāsots baltā vai melnā krāsā. Pierādīt, ka plaknē varēs atrast trīs vienā krāsā nokrāsotus punktus A, B un C tādus, ka $AB = BC$.

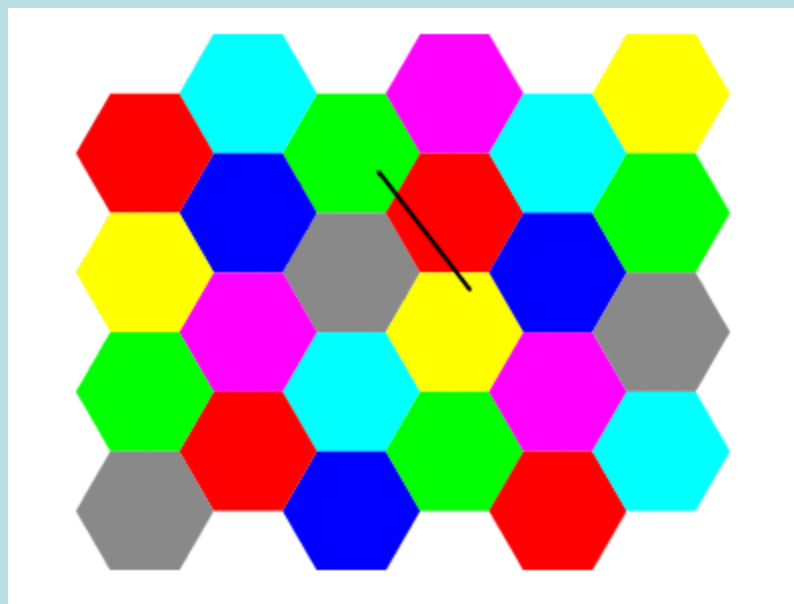
5. uzdevums. Katrs plaknes punkts ir nokrāsots kādā no trīs krāsām. Pierādīt, ka plaknē varēs atrast divus vienā krāsā nokrāsotus punktus, attālums starp kuriem ir tieši 1 cm.

5. uzdevuma risinājuma ideja: plaknē apskata šādu grafu, kura katras šķautnes garums ir 1 cm. Neatkarīgi no krāsojuma, atradīsies divas grafa virsotnes, kas nokrāsotas vienā krāsā un savienotas ar šķautni.



(Moser graph)

Rodas Hadvigera – Nelsona problēma: kāds ir minimālais krāsu skaits, kurā var izkrāsot plakni tā, lai tajā nevarētu atrast divus vienā krāsā nokrāsotus punktus, attālums starp kuriem ir 1? Zīmējums parāda, ka septiņās krāsās tā var izkrāsot!



Kopumā ir šāda situācija:

Ja plakne ir izkrāsota ne vairāk kā 3 krāsās, tad tajā noteikti varēs atrast divus punktus, kas nokrāsoti vienā krāsā un attālums starp kuriem ir 1 vienība.

Ja plakne ir izkrāsota 4, 5 vai 6 krāsās, tad nav zināms, vai varēs tādus atrast.

Ja plakne ir izkrāsota vismaz 7 krāsās, tad tādus punktus ne vienmēr varēs atrast.

Teorēma (R. Ozols). Ja katrs plaknes punkts ir nokrāsots kādā no četrām krāsām un d ir patvaļīgs pozitīvs skaitlis, tad plaknē varēs atrast divus vienā krāsā nokrāsotus punktus A un B , tādus, ka $1 - d < |AB| < 1 + d$.

6. uzdevums. Katrs trīsdimensiju telpas punkts ir nokrāsots kādā no četrām krāsām. Pierādīt, ka telpā varēs atrast divus vienā krāsā nokrāsotus punktus, attālums starp kuriem ir tieši 1 cm.

7. uzdevums. Katrs plaknes punkts ir nokrāsots kādā no trīs krāsām. Pierādīt, ka plaknē varēs atrast trapeci, kuras visas virsotnes ir vienā krāsā.

8. uzdevums. Vai plakni var izkrāsot divās krāsās tā, ka tajā nevar atrast nogriezni vai riņķa līniju, kas ir vienā krāsā?

9. uzdevums. Katrs plaknes punkts ar veselām koordinātām ir nokrāsots baltā vai melnā krāsā. Pierādīt, ka var atrast taisnstūri, kura visas virsotnes ir nokrāsotas vienā krāsā.

10. uzdevums. Katrs plaknes punkts ir nokrāsots baltā vai melnā krāsā. Pierādīt, ka varēs atrast trijstūri, kura visas virsotnes ir nokrāsotas vienā krāsā un kura laukums ir 1.

Paldies par uzmanību!