Dzimšanas dienas problēma

Reinis Alksnis

2021. gada 6. februārī

Nedaudz no varbūtību teorijas

Varbūtības definīcija

Pieņemsim dots kāds eksperiments ar galīgu iespējamo iznākumu skaitu un mums interesēs kāds notikums A. Tad par labvēlīgiem iznākumiem sauksim tos, pie kuriem A izpildās un apzīmēsim

- M - notikumam A labvēlīgo iznākumu skaits,
- N - visu iespējamo iznākumu skaits.

Tad notikuma A varbūtību definēsim sekojošā veidā

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

Varbūtības definīcija

Piemērs

- *Eksperiments: metam metamo kauliņu*
- *Visi iespējamie iznākumi:* $1, 2, 3, 4, 5, 6$
- *Interesējošais notikums:* $A \sim$ *tiek uzmests vairāk par* 4
- *Labvēlīgo iznākumu skaits:* $M = 2$
- *Visu iespējamo iznākumu skaits:* $N = 6$
- *Tātad* A *varbūtība ir:* $P(A) = \frac{M}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Reizināšanas likums

Pieņemsim, doti n eksperimenti A_1, A_2, ... , A_n. Ja

- A_1 ir n_1 dažādi iznākumi
- A_2 ir n_2 dažādi iznākumi
- $\cdots$
- A_k ir n_k dažādi iznākumi

Tad eksperimentam $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ ir $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ iznākumi.

Reizināšanas likums

Piemērs
Doti divi eksperimenti,A_1*-metamā kauliņa mešana,* A_2 *- monētas mešana. Tad*

- A_1 *ir* 6 *dažādi iznākumi:* $1, 2, 3, 4, 5, 6$
- A_2 *ir* 2 *dažādi iznākumi: cipars un ģērbonis*

Tātad eksperimentam (A_1, A_2) *ir* $6 \cdot 2 = 12$ *dažādi iznākumi.*

Varbūtību summa

Ja mums ir doti vairāki notikumi A_1, A_2,..., A_n, kas ir savstarpēji nešķeļas, tad

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Piemērs
Metam metamo kauliņu

- $A_1 \sim$ *uzmest pirmskaitli:* $2, 3, 5$
- $A_2 \sim$ *uzmest* 1 *vai* 6

šādā gadījumā teiksim, ka A_1 *un* A_2 *ir nešķeļoši, jo tie veicot eksperimentu tie abi vienlaicīgi nevar izpildīties. Tad*

$$P(A_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$P(A_1 + A_2) = P(\textit{uzmest 1, 2, 3, 5 vai 6}) = \frac{5}{6}$$

Pretējais notikums

Dots notikums A ar atbilstošu varbūtību $P(A)$. Tad ar $\overline{A}$ apzīmējam notikumam A pretējo notikumu, t.i.

$$\overline{A}: \quad \text{neizpildās notikums A.}$$

Tad

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Piemērs
Met metamo kauliņu,

- $A \sim$ *uzmest vismaz* 2
- $\overline{A} \sim$ *uzmest* 1

$$P(A) = P(\mathit{2,3,4,5,6}) = \frac{5}{6}, \quad P(\overline{A}) = P(\mathit{1}) = \frac{1}{6}$$

Dzimšanas dienas problēma

Problēmas formulējums

Pieņemsim, ka spēkā sekojoši nosacījumi.

- Neapskatam garo gadu, t.i. pieņemam, ka gadā ir 365 dienas.
- Pieņemsim, ka cilvēku dzimšanas dienu datumi ir neatkarīgi notikumi (grupā nav dvīņu).
- Pieņemsim, ka jebkura gada diena ir vienlīdz iespējama kā dzimšanas diena.

Pieņemsim, dota kāda n cilvēku grupa, kam izpildās augstāk minētie nosacījumi. Kāda ir varbūtība, ka starp viņiem atradīsies vismaz divi cilvēki, kam dzimšanas diena ir vienā un tajā pašā datumā?

Ar D_n apzīmēsim notikumu, ka n cilvēku grupā vismaz diviem dzimšanas dienas ir vienā un tajā pašā datumā.

Gadījums ar $n = 2$

Jautājums: Kāda varbūtība, ka 2 cilvēku grupā vismaz 2 cilvēkiem sakrīt dzimšanas dienu datumi?

$D_2 \sim$ "2 cilvēku grupā vismaz diviem dzimšanas dienas sakrīt"

- visu iespējamo iznākumu skaits: $N = 365 \cdot 365$
- labvēlīgo iznākumu skaits: $M = 365$

Tātad

$$P(D_2) = \frac{M}{N} = \frac{365}{365^2} = \frac{1}{365}$$

Gadījums ar $n = 3$

Jautājums: Kāda varbūtība, ka 3 cilvēku grupā vismaz 2 cilvēkiem sakrīt dzimšanas dienu datumi?

$D_3 \sim$ "3 cilvēku grupā vismaz diviem dzimšanas dienas sakrīt"

- visu iespējamo iznākumu skaits: $N = 365^3$
- labvēlīgo iznākumu skaits?

Varam aplūkot visus iespējamos notikumus, kad izpildās notikums D_3. Cilvēkus, kas ietilpst grupā apzīmēsim ar C_1, C_2, C_3 utt.

Gadījums ar $n = 3$

- $(C_1, C_2), C_3$: tikai C_1 un C_2 kopīga dzimšanas diena,
- $(C_1, C_3), C_2$: tikai C_1 un C_3 kopīga dzimšanas diena,
- $(C_2, C_3), C_1$: tikai C_2 un C_3 kopīga dzimšanas diena,
- (C_1, C_2, C_3): visiem trim dzimšanas diena vienā datumā

Apskatam notikumu $(C_1, C_2), C_3$:

- visu iespējamo iznākumu skaits: $N = 365^3$
- labvēlīgo iznākumu skaits: $M = 365 \cdot 1 \cdot 364$

tātad

$$P((C_1, C_2), C_3) = \frac{364 \cdot 365}{365^3} = \frac{364}{365^2}$$

dēļ simetrijas arī

$$P((C_1, C_3), C_2) = P((C_2, C_3), C_1) = P((C_1, C_2), C_3) = \frac{364}{365^2}$$

Gadījums ar $n = 3$

Apskatam notikumu (C_1, C_2, C_3):

- visu iespējamo iznākumu skaits: $N = 365^3$
- labvēlīg iznākumu skaits: $M = 365$

tātad

$$P((C_1, C_2, C_3)) = \frac{M}{N} = \frac{365}{365^3} = \frac{1}{365^2}$$

Tagad varam aprēķināt notikumu D_3 varbūtību

$$P(D_3) = \frac{364}{365^2} + \frac{364}{365^2} + \frac{364}{365^2} + \frac{1}{365^2} \approx 0.008$$

Gadījums ar $n = 4$

Apskatam visus iespējamos notikumus, kad D_4 izpildās

$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^4}$

- $(C_1, C_2), C_3, C_4$
- $(C_1, C_3), C_2, C_4$
- $(C_1, C_4), C_2, C_3$
- $(C_2, C_3), C_1, C_4$
- $(C_2, C_4), C_1, C_3$
- $(C_3, C_4), C_1, C_2$

$\frac{365}{365^4}$

- (C_1, C_2, C_3, C_4)

$\frac{365 \cdot 364}{365^4}$

- $(C_1, C_2, C_3), C_4$
- $(C_1, C_2, C_4), C_3$
- $(C_1, C_3, C_4), C_2$
- $(C_2, C_3, C_4), C_1$

$\frac{365 \cdot 364}{365^4}$

- $(C_1, C_2), (C_3, C_4)$
- $(C_1, C_3), (C_2, C_4)$
- $(C_1, C_4), (C_2, C_3)$

Gadījums ar $n = 4$

To ņemot vērā, varam aprēķināt notikuma D_4 varbūtību

$$P(D_4) = 6 \cdot \left(\frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^4}\right) + 4 \cdot \left(\frac{365 \cdot 364}{365^4}\right) +$$

$$+ 3 \cdot \left(\frac{365 \cdot 364}{365^4}\right) + \frac{365}{365^4} \approx 0.016$$

Gadījums ar $n = 4$

Tā vietā, lai apskatītu visus iespējamos gadījumus, kad notikums D_4 izpildās, ērtāk apskatīt tam pretējo notikumu un izmantot varbūtību īpašību $\left(P(A) = 1 - P(\overline{A})\right)$, t.i., ja

D_4 : starp 4 cilvēkiem, vismaz diviem dzimšanas diena ir vienā datumā

tad

$\overline{D_4}$: katram no 4 cilvēkiem dzimšanas diena ir citā datumā

Aprēķinot $P(\overline{D_4})$ meklēto varbūtību iegūsim kā

$$P(D_4) = 1 - P(\overline{D_4})$$

Gadījuma ar $n = 4$

- labvēlīgo iznākumu skaits: $M = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362$
- visu iespējamo notikumu skaits: $N = 365^4$

tātad

$$P(\overline{D_4}) = \frac{M}{N} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362}{365^4}$$

un tāpēc

$$P(D_4) = 1 - \frac{364 \cdot 363 \cdot 362}{365^3} \approx 0.016$$

Gadījums ar $n = 4$

Lai iegūtu uzskatāmāku formalu, varam to nedaudz pārveidot

$$P(D_4) = 1 - \frac{364 \cdot 363 \cdot 362}{365^3} = 1 - \Big(\frac{364}{365}\Big)\Big(\frac{363}{365}\Big)\Big(\frac{362}{365}\Big) =$$

$$= 1 - \Big(\frac{365-1}{365}\Big)\Big(\frac{365-2}{365}\Big)\Big(\frac{365-3}{365}\Big) =$$

$$= 1 - \Big(1 - \frac{1}{365}\Big)\Big(1 - \frac{2}{365}\Big)\Big(1 - \frac{3}{365}\Big) = 1 - \prod_{k=1}^{3}\Big(1 - \frac{k}{365}\Big),$$

kur

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

Gadījums, kad $n = 5$

Jautājums: Kāda varbūtība, ka 5 cilvēku grupā vismaz diviem sakritīts dzimšanas dienu datumi?

Atkal vispirms aprēķinam varbūtību pretējam notikumam D_5.

- labvēlīgie iznākumi: $M = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361$
- iespējamie iznākumi: $N = 365^5$

Tātad $P(\overline{D_5}) = \frac{M}{N} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361}{365^5}$, un meklētā varbūtība ir

$$P(D_5) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361}{365^5} \approx 0.027$$

To atkal varam pārrakstīt formā

$$P(D_5) = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\left(1 - \frac{3}{365}\right)\left(1 - \frac{4}{365}\right) = 1 - \prod_{k=1}^{4}\left(1 - \frac{k}{365}\right)$$

Vispārīgais gadījums

No formulām, kas iegūtas pie $n = 4$ un $n = 5$, varam ievērot, ka vispārīgajā gadījumā

$$P(D_n) = 1 - \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

- $n = 2$ ir mazākais skaitlis, pie kura formulai ir jēga;
- ja $n \geq 366$, tad viens no reizinātājiem formulā būs $\left(1 - \frac{366}{366}\right) = 0$, tāpēc

$$P(D_n) = 1, \quad \text{ja } \; n = 366, 367, \ldots$$

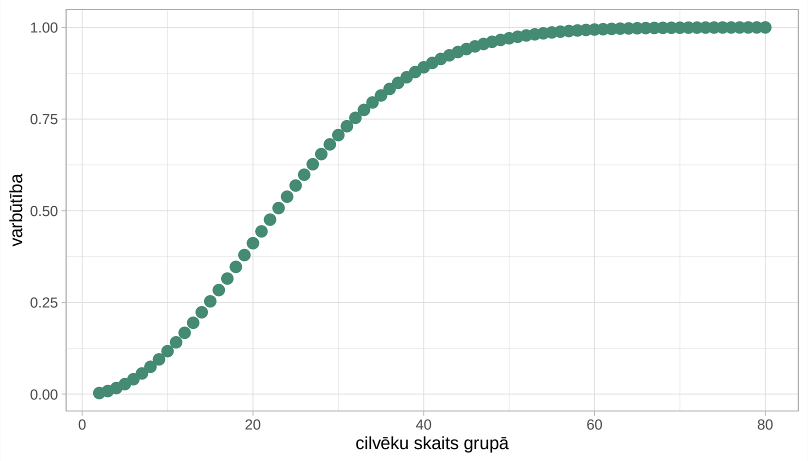
Vispārīgais gadījums

Tagad varam definēt funkciju $P : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to [0,1]$

$$P(n) = 1 - \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right)$$

- $P(15) \approx 0.253$
- $P(23) \approx 0.507$
- $P(50) \approx 0.970$
- $P(70) \approx 0.999$

Vispārīgais gadījums



Varbūtība, ka n cilvēku grupā vismaz trijiem sakritīs dzimšanas dienu datumi

Vismaz trijiem sakritīs dzimšanas diena

Ja tagad ieviešam notikumu

$$E_n: \quad \text{n cilvēku grupā vismaz trim dzimšans dienas datumi sakrīt}$$

tad pretējais notikums $\overline{E_n}$ iekļaus

- katram ir savs dzimšanas dienas datums,
- ir tieši viens pāris
- ir tieši divi pāri
- $\cdots$
- ir tieši $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pāri

Tieši viens pāris

Lai aprēķinātu varbūtību, ka n cilvēku grupā būs tieši viens pāris, jāizskaita labvēlīgie iznākumi.

- $\binom{365}{1}$ veidi kā izvēlēties dienu priekš konkrētā pāra
- $\binom{n}{2}$ veidi, kuros izvēlēties abas personas no konkrētā pāra
- $364 \cdot 363 \cdot 362 \cdots (365-(n-2))$ veidi, kuros izvēlēties pārējo cilvēku dzimšanas dienas,

t.i. labvēlīgo iznākumu skaits ir

$$M = \binom{365}{1}\binom{n}{2} 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdots (365-(n-2))$$

ko kompaktāk varam pierakstīt kā

$$M = \binom{365}{1}\binom{n}{2} \prod_{k=1}^{n-2} (365-k)$$

kur $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Tieši viens pāris

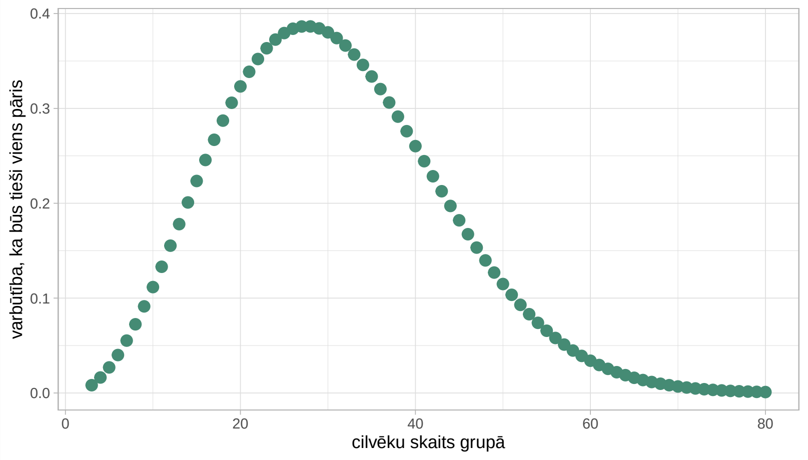
Tā kā visu iespējamo iznākumu skaits ir

$$N = 365^n,$$

tad varam aprēķināt notikuma E_1 varbūtību

$$P(E_1) = \frac{1}{365^n}\binom{365}{1}\binom{n}{2}\prod_{k=1}^{n-2}(365-k)$$

Tieši viens pāris



Tieši divi pāri

Lai aprēķinātu varbūtību, ka n cilvēku grupā būs tieši 2 pāri, atkal skaitam labvēlīgos iznākumus.

- $\binom{365}{2}$ veidi, kuros izvēlēties divus dažādus datumus priekš abiem pāriem
- $\binom{n}{2}$ veidi, kuros izvēlēties cilvēkus priekš pirmā pāra
- $\binom{n-2}{2}$ veidi, kuros izvēlēties cilvēkus priekš otrā pāra
- $363 \cdot 362 \cdot 361 \cdots (364 - (n-4))$ veidi, kuros izvēlēties dažādus datumus priekš pārējiem

Tātad labvēlīgo iznākumu skaits ir

$$M = \binom{365}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\prod_{k=1}^{n-4}(364-k)$$

Tieši divi pāri

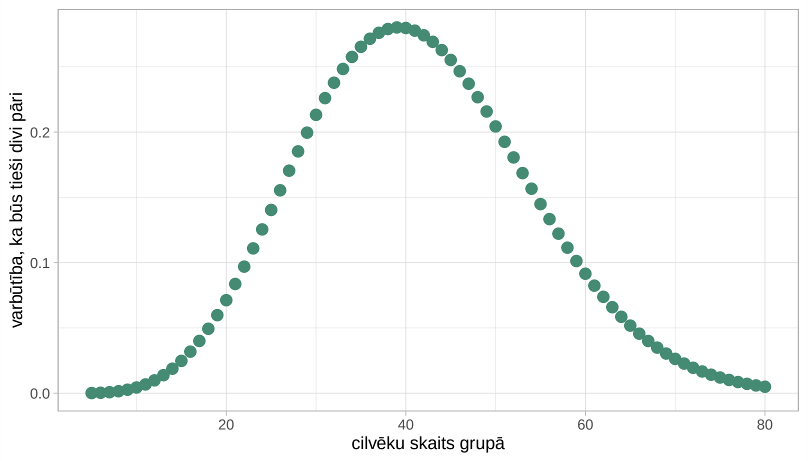
Ņemot vērā, ka visu iespējamo iznākumu skaits ir

$$N = 365^n,$$

tad varam aprēķināt E_2 varbūtību

$$P(E_2) = \frac{1}{365^n} \binom{365}{2} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \prod_{k=1}^{n-4} (364 - k)$$

Tieši divi pāri



Tieši trīs pāri

Lai aprēķinātu varbūtību, ka n cilvēku grupā būs tieši trīs pāri, atkal skaitam labvēlīgos iznākumus.

- $\binom{365}{3}$ veidi, kuros izvēlēties trīs dažādus datumus,
- $\binom{n}{2}$ veidi, kuros izvēlēties divas personas priekš pirmā pāra
- $\binom{n-2}{2}$ veidi, kuros izvēlēties divas personas priekš otrā pāra
- $\binom{n-4}{2}$ veidi, kuros izvēlēties divas personas priekš trešā pāra
- $362 \cdot 361 \cdot 360 \cdots (363 - (n-6))$ veidi, kuros izvēlēties pārējos datumus

tātad labvēlīgo iznākumu skaits ir

$$M = \binom{365}{3}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2}\prod_{k=1}^{n-6}(363-k)$$

Tieši trīs pāri

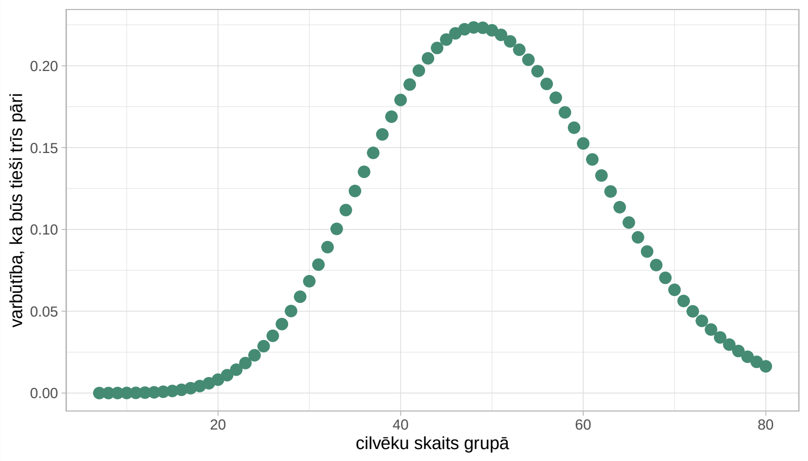
Tā kā visu iespējamo iznākumu skaits ir

$$N = 365^n,$$

tad

$$P(E_3) = \frac{1}{365^n} \binom{365}{3} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \binom{n-4}{2} \prod_{k=1}^{n-6} (363 - k)$$

Tieši trīs pāri



Tieši k pāri

Ievērojot sakarības, varam izteikt labvēlīgo iznākumu skaitu arī vispārīgā gadījumā

- $\binom{365}{k}$ veidi, kuros izvēlēties k datumus priekš k pāriem
- $\binom{n}{2}$ veidi, kuros izvēlēties personas priekš pirmā pāra
- $\binom{n-2}{2}$ veidi, kuros izvēlēties personas priekš otrā pāra
- $cdots$
- $\binom{n-2(k-1)}{2}$ veidi, kuros izvēlēties personas priekš k-tā pāra
- $(365-k), (365-(k-1)), \ldots, (365-(2k-1))$ veidi, kuros izvēlēties pārējās dzimšanas dienas

tātad labvēlīgo iznākumu skaits ir

$$M = \binom{365}{k}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2(k-1)}{2}\prod_{i=1}^{n-2k}(366-k-i)$$

Tieši k pāri

Varam ievērot, ka

- $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2(n-2)!}$
- $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2} = \frac{n!}{2(n-2)!}\frac{(n-2)!}{2(n-4)!} = \frac{n!}{2^2(n-4)!}$
- $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\binom{n-4}{2} = \frac{n!}{2(n-2)!}\frac{(n-2)!}{2(n-4)!}\frac{(n-4)!}{2(n-6)!} = \frac{n!}{2^3(n-6)!}$
- $\cdots$
- $\binom{n}{2}\cdots\binom{n-2(k-1)}{2} = \frac{n!}{2(n-2)!}\frac{(n-2)!}{2(n-4)!}\cdots\frac{(n-(2(k-1))!}{2(n-2(k+1)!} = \frac{n!}{2^k(n-2k)!}$

tātad labvēlīgo iznākumu skaitu varam pierakstīt nedaudz vienkāršāk

$$M = \frac{n!}{2^k(n-2k)!}\binom{365}{k}\prod_{i=1}^{n-2k}(366-k-i)$$

Tieši k pāri

Ņemot vērā, ka visu iespējamo iznākumu skaits atkal ir

$$N = 365^n,$$

tad

$$P(E_k) = \frac{1}{365^n} \frac{n!}{2^k(n-2k)!} \binom{365}{k} \prod_{i=1}^{n-2k} (366 - k - i)$$

Vismaz trim sakrīt dzimšanas dienas

Tagad varam izteikt varbūtību, ka n cilvēku grupā vismaz trim cilvēkiem sakritīs dzimšanas dienas datumi

$$P(E_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{365}\right) -$$

$$- \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{365^n} \frac{n!}{2^j (n-2j)!} \binom{365}{j} \prod_{i=1}^{n-2j} (366 - j - i)$$

- $P(65) \approx 0.255$
- $P(88) \approx 0.511$
- $P(100) \approx 0.646$
- $P(120) \approx 0.828$

Tieši trīs pāri