Nestriktas metrikas

Raivis Bēts

Latvijas Universitātes Matemātikas un informātikas institūts

14.01.2023., MMU, Zinātņu māja

Latvijas Universitātes Matemātikas un informātikas institūts

PostDoc Latvia

NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020

EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Reģionālās attīstības fonds

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Saturs

Apzīmējumi

- $\forall$ – visiem, katram
- $\cup$ – apvienojums
- $\sum$ – summas zīme
- $\wedge$ – minimums
- $\vee$ – maksimums
- $*$ – t-norma
- $\oplus$ – t-konorma

Ievads

- Vienošanās Nr. 1.1.1.2/VIAA/4/20/706, "Nestriktās pseidometrikas pielietojumi vārdu kombinatorikā" (01.01.2021.- 30.06.2023.)

- Nestriktā metrika tika ieviesta pirms aptuveni pusgadsimta. Kopš tā brīža pētījumi nestriktās metrikas virzienā ir strauji attīstījušies.

- Liels "lūzuma punkts" notika 1994. gadā, kad Džordžs un Vermani nedaudz izmainīja Kramosila un Mihaleka nestriktās metrikas koncepciju.

- Ir dažādas metrikas, kas apraksta attālumu starp bezgalīgiem vārdiem, bet neviena no tām nav atbilstoša un piemērota, jo neatspoguļo bezgalīgo vārdu kopas analītisko struktūru.

Ievads

Projekta mērķi (divi galvenie):

- Nestriktu metriku un pseidometriku pētniecība un to pielietojumu meklēšana vārdu kombinatorikā.
- Izveidot jaunu nestriktu metriku, kas ļautu labāk noteikt attālumus starp diviem bezgalīgiem vārdiem.

Mūsdienās informācija principā ir dārgākā lieta pasaulē. Bieži mums nepieciešams salīdzināt informāciju, kas arī bija motivācija šim projektam un tā tematikai.

Ievads

- Aplūkosim trīs bezgalīgus vārdus (simbolu virknes):
  1. $x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, ...)$
  2. $y = (0, 1, 1, 1, 1, 1, ...)$
  3. $z = (0, 0, 0, 0, 0, 0, ...)$

- Kuri divi savā starpā ir "tuvāki" (attālums vienam no otra ir tuvāks, mazāks) – x ar y vai x ar z?

- Pie piemēra atgriezīsimies pēc vairākiem slaidiem.

Vārdu kombinatorika

- Pieņemsim, ka A ir alfabēts. Bieži izmanto $A = \{0, 1\}$, jo visu informāciju tāpat var pārvērst binārā kodā (datori tieši tā arī pārvērš un uztver informāciju).

,

- $u \in A^n$ vārds garumā n.
- $|u| = n$ – vārda garums.
- A^n – visu vārdu garumā n kopa.

,

- A^+ – netukšu vārdu kopa.
- $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$ – galīgu vārdu kopa.
- λ - tukšais vārds un $|\lambda| = 0$.

Vārdu kombinatorika

- Operācija # konkatenācija (salikšana blakus), t.i., u#v=uv.

Piemērs

Ja $u = ab$ *un* $v = ba$, *tad* $u\#v = abba$, *bet* $v\#u = baab$.

Piebilde

Operācija nav komutatīva.

- Vārdu $w' \in A^*$ sauc par vārda $w \in A^*$ dalītāju, ja $\exists$ vārdi $u \in A^*$ un $v \in A^*$ tādi, ka $w = uw'v$. Vārdu u (attiecīgi v) sauc par prefiksu (sufiksu).

Vārdu kombinatorika

- Vārdu $w' \in A^*$ sauc par vārda $w \in A^*$ dalītāju, ja $\exists$ vārdi $u \in A^*$ un $v \in A^*$ tādi, ka $w = uw'v$. Vārdu u (attiecīgi v) sauc par prefiksu (sufiksu).

Piemērs

Aplūkosim vārdu $u = aba$. Tad tā dalītāju kopa ir?

Definīcija

Kopas $\mathcal{A}^*$ patvaļīgu apakškopu L sauc par valodu alfabētā $\mathcal{A}$.

Metrikas

- Par pseidometriku uz kopas X sauc funkciju $d : X \times X \to [0, \infty)$ tādu, ka visiem $x, y, z \in X$ ir spēkā trīs aksiomas:

(1d) $x = y \Longrightarrow d(x, y) = 0$;
(2d) $d(x, y) = d(y, x)$;
(3d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

- Par metriku uz kopas X sauc funkciju $d : X \times X \to [0, \infty)$ tādu, ka visiem $x, y, z \in X$ ir spēkā trīs aksiomas:

(1dm) $x = y \Longleftrightarrow d(x, y) = 0$;
(2dm) $d(x, y) = d(y, x)$;
(3dm) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Piezīme

Metrika apraksta attālumu starp diviem kopas elementiem.

Metrikas

Metriku piemēri:

Piemērs

Reālo skaitļu kopa, t.i., $X = \mathbb{R}$.

To definē sekojoši (ja $x, y \in \mathbb{R}$):

$$d(x, y) = |y - x|$$

Piemērs

Reālo skaitļu plakne, t.i., $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

To definē sekojoši (ja $x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jeb $x = (x_1, y_1)$ un $y = (x_2, y_2)$):

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Abiem piemēriem izpildās aksiomas – apdomāsim!

Metrikas

Metriku piemēri:

Piemērs

(Čebiševa attālums) Reālo skaitļu plakne, t.i., $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

To definē sekojoši (ja $x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jeb $x = (x_1, y_1)$ un $y = (x_2, y_2)$):

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$$

Šī piemēra pierādījumu, ka tā ir metrika, atļaušos jums atstāt kā neobligātu mājas darbu.

Metrikas

- Zinātniskajā literatūrā ir vairāki metriku veidi, kas darbojas uz bezgalīgo vārdu kopas.
- Pirmā pieeja. Pieņemsim, ka

  $$x = (x_0, x_1, x_2, \dots x_n, \dots) \text{ un } y = (y_0, y_1, y_2, \dots y_n, \dots)$$

  ir bezgalīgi vārdi.
- Tad

  $$p(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{ja } x = y \\ 2^{-n} & \text{pretējā gadījumā, kur } n = \min\{i : x_i \neq y_i\} \end{cases}$$

  ir metrika uz bezgalīgo vārdu kopas.

Metrikas

- Vai šādi definēta metrika dod korektu informāciju par attālumu starp šiem bezgalīgajiem vārdiem?

- Aplūkosim atkal iepriekš dotos bezgalīgos vārdus: $x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, ...)$, $y = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...)$ un $z = (0, 0, 0, 0, 0, 0, ...)$.

- Tad $p(x, y) = p(x, z) = 1$, tas ir, abos gadījumos attālums starp abiem bezgalīgo vārdu pāriem ir lielākā iespējamā vērtība, šajā gadījumā 1.

- Vai tas ir pareizs pieņēmums? Ko saka intuīcija?

- Intuīcija saka, ka x jābūt novērtētam tuvāk ar y nekā x ar z (cerams, ka tā bija arī roku celšanā)

Metrikas

- Vai šādi definēta metrika dod korektu informāciju par attālumu starp šiem bezgalīgajiem vārdiem?
- Aplūkosim atkal iepriekš dotos bezgalīgos vārdus: $x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$, $y = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ un $z = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$.
- Tad $p(x, y) = p(x, z) = 1$, tas ir, abos gadījumos attālums starp abiem bezgalīgo vārdu pāriem ir lielākā iespējamā vērtība, šajā gadījumā 1.
- Vai tas ir pareizs pieņēmums? Ko saka intuīcija?
- Intuīcija saka, ka x jābūt novērtētam tuvāk ar y nekā x ar z (cerams, ka tā bija arī roku celšanā)

Metrikas

- Ko nozīmē pieraksts

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = \quad ??$$

- Tas nozīmē sekojošo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

- Ar ko ir vienāda šī bezgalīgā summa?

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = \infty ?$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12} ?$$

Metrikas

- Ko nozīmē pieraksts

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = \quad ??$$

- Tas nozīmē sekojošo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

- Ar ko ir vienāda šī bezgalīgā summa?

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = \infty ?$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12} ?$$

Metrikas

- Ko nozīmē pieraksts

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = \quad ??$$

- Tas nozīmē sekojošo:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

- Ar ko ir vienāda šī bezgalīgā summa?

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = \infty?$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}?$$

Metrikas

- Ko nozīmē pieraksts

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \quad ??$$

- Tas nozīmē sekojošo:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

- Ar ko ir vienāda šī bezgalīgā summa?

Metrikas

- Ko nozīmē pieraksts

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \quad ??$$

- Tas nozīmē sekojošo:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

- Ar ko ir vienāda šī bezgalīgā summa?

Metrikas

- Ko nozīmē pieraksts

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \quad ??$$

- Tas nozīmē sekojošo:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

- Ar ko ir vienāda šī bezgalīgā summa?

Metrikas

- Otrā pieeja. Pieņemsim, ka $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ un $y = (y_0, y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots)$ ir bezgalīgi vārdi un dotam $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vērtību s_i definēsim sekojoši:

$$s_i(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_i = y_i \text{ kur } i \text{ ir } i\text{-tā vārda koordināte} \\ 1 & \text{if } x_i \neq y_i \text{ kur } i \text{ ir } i\text{-tā vārda koordināte} \end{cases}$$

- Tagad definējam

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot s_i(x, y).$$

- Tad $\sigma : X \times X \to [0, 1]$ ir metrika bezgalīgo vārdu kopā.
- Aplūkosim atkal šos trīs bezgalīgos vārdus $x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$, $y = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ un $z = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)$.
- Uzdevums jums – atrast metrikas vērtības $\sigma(x, y)$ un $\sigma(x, z)$.

Metrikas

- Šajā gadījumā $s_0(x, y) = 1$ un $s_i(x, y) = 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots$.
- Tātad $\sigma(x, y) = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$.
- Savukārt $s_i(x, z) = 1 \ \forall i = 0, 1, \ldots$.
- Tātad $\sigma(x, z) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2$.
- Līdz ar to iegūstam, ka $\sigma(x, y) < \sigma(x, z)$ kā arī intuitīvi jutām.

Metrikas

- Pretpiemērs. Pieņemsim, ka
$$x = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0....),\ y = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ..),$$
$$z = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...).$$
- Kāds šajā gadījumā ir $\sigma(x, z)$ un $\sigma(y, z)$?
- Kurai vērtībai, jūsuprāt, būtu jābūt mazākai (attālums ir mazāks/tie ir tuvāki viens otram)?

Metrikas

- Pretpiemērs. Pieņemsim, ka
$$x = (1, 0, 0, 0, ...),\ y = (0, 1, 1, 1, ..),\ z = (0, 0, 0, 0, ...).$$

- Šajā gadījumā $s_0(x, z) = 1,\ s_i(x, z) = 0\ \forall i = 1, 2, \ldots$.

- Tātad $\sigma(x, z) = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$.

- Šajā gadījumā $s_0(y, z) = 0$ and $s_i(y, z) = 1\ \forall i = 1, 2, \ldots$.

- Tātad $\sigma(y, z) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots =$1.

- Līdz ar to $\sigma(x, z) = \sigma(y, z)$, bet intuīcija saka, ka x attālums līdz z ir tuvāks nekā y attālums līdz z, jo x no z atšķiras tikai par vienu simbolu, bet y no z sakrīt tikai ar pirmo simbolu.

Metrikas

- Šīs metrikas, salīdzinot divus bezgalīgus vārdus, neņem vērā pēc būtības atšķirības starp šiem vārdiem.
- Tādēļ parastās metrikas vietā mēģināsim lietot nestriktās metrikas, lai aprakstītu attālumu starp diviem bezgalīgiem vārdiem.
- Lai tās lietotu, ir nepieciešams ieviest jēdzienu t-norma.

T-normas un t-konormas

Definīcija

Par t-normu sauc funkciju $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, *kas apmierina sekojošus nosacījumus (aksiomas)* $\forall\ a, b, c \in [0;1]$:

1. $*$ *ir monotona:* $a \leq b \Rightarrow a * c \leq b * c$;
2. $*$ *ir komutatīva:* $a * b = b * a$;
3. $*$ *ir asociatīva:* $(a * b) * c = a * (b * c)$;
4. $a * 1 = a$.

T-normas un t-konormas

Vissvarīgākās un visvairāk izmantotās t-normas ir sekojošas:

- Pieņemsim, ka $a *_{min} b := a \wedge b$, kur $\wedge$ apzīmē minimālās vērtības ņemšanu kopā [0,1]. To sauc par minimuma t-normu.

Piemērs

Ja $a = 0,3$ un $b = 0,8$, tad

$$0,3 *_{min} 0,8 := 0,3 \wedge 0,8 = \min\{0,3; 0,8\} = 0,3$$

- Pieņemsim, ka $a *_{prod} b := a \cdot b$ ir reizinājums. To sauc par reizinājuma t-normu.

Piemērs

Ja $a = 0,3$ un $b = 0,8$, tad

$$0,3 *_{prod} 0,8 := 0,3 \cdot 0,8 = 0,24$$

T-normas un t-konormas

- Pieņemsim, ka $a *_{Luk} b := \max\{a + b - 1, 0\}$. To sauc par Lukaševica t-normu.

Piemērs

Ja $a = 0,3$ un $b = 0,8$, tad

$0,3 *_{Luk} 0,8 := \max\{0,3 + 0,8 - 1, 0\} = \max\{0,1; 0\} = 0,1$

- Nilpotenta minimuma t-normu definē sekojoši

$$a *_{nM} b = \begin{cases} \min\{a; b\}, & \text{ja } a + b > 1, \\ 0, & \text{pretējā gadījumā.} \end{cases}$$

Piemērs

Ja $a = 0,3$ un $b = 0,8$, tad

$0,3 *_{nM} 0,8 := \min\{0,3; 0,8\} = 0,3$, jo $0,3 + 0,8 > 1$

T-normas un t-konormas

- Drastisko t-normu definē sekojoši

$$a *_D b = \begin{cases} a, & \text{ja } b = 1, \\ b, & \text{ja } a = 1, \\ 0, & \text{pretējā gadījumā} \end{cases}$$

Piemērs

Ja $a = 0,3$ un $b = 0,8$, tad

$$0,3 *_D 0,8 := 0, \text{ jo } a \neq 1 \text{ un } b \neq 1.$$

Piemērs

Ja $a = 1$ un $b = 0,8$, tad

$$1 *_{nM} 0,8 := 0,8, \text{ jo } a = 1.$$

T-normas un t-konormas

Definīcija

Par t-konormu sauc funkciju $\oplus : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, *kas apmierina sekojošus nosacījumus (aksiomas)* $\forall a, b, c \in [0;1]$*:*

1. $\oplus$ *ir monotona:* $a \leq b \Rightarrow a \oplus c \leq b \oplus c$;
2. $\oplus$ *ir komutatīva:* $a \oplus b = b \oplus a$;
3. $\oplus$ *ir asociatīva:* $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
4. $a \oplus 0 = a$.

T-konorma ir duāla t-normai, tas ir,

$$a \oplus b = 1 - (1 - a) * (1 - b).$$

T-normas un t-konormas

Vissvarīgākās un visvairāk izmantotās t-konormas ir sekojošas:

- Pieņemsim, ka $a \oplus_{max} b := a \vee b$ kur $\vee$ apzīmē maksimālās vērtības ņemšanu kopā [0,1]. To sauc par maksimuma t-konormu.

Piemērs

Ja $a = 0,3$ un $b = 0,8$, tad

$$0,3 \oplus_{max} 0,8 := 0,3 \vee 0,8 = \max\{0,3; 0,8\} = 0,8$$

- Pieņemsim, ka $a \oplus_{prod} b := a + b - a \cdot b$. To sauc par reizinājuma t-konormu.

Piemērs

Ja $a = 0,3$ un $b = 0,8$, tad

$$0,3 \oplus_{prod} 0,8 := 0,3 + 0,8 - 0,3 \cdot 0,8 = 1,1 - 0,24 = 0,86$$

T-normas un t-konormas

- Pieņemsim, ka $a \oplus_{Luk} b := \min\{a + b, 1\}$. To sauc par Lukaševica t-konormu.

Piemērs

Ja $a = 0,3$ un $b = 0,8$, tad

$$0,3 \oplus_{Luk} 0,8 := \min\{0,3 + 0,8; 1\} = \min\{1,1; 1\} = 1$$

- Drastisko t-konormu definē šekojoši

$$\alpha \oplus_D \beta = \begin{cases} \alpha \vee \beta, & \text{ja } \alpha \wedge \beta = 0, \\ 1, & \text{pretējā gadījumā.} \end{cases}$$

Piemērs

Ja $a = 0,3$ un $b = 0,8$, tad

$$0,3 \oplus_D 0,8 := 1, \text{ jo } 0,3 \wedge 0,8 \neq 0.$$

T-normas un t-konormas

Uzdevums

Pierādīt Lukaševica t-normas un t-konormas dualitāti, tas ir, pierādīt, ka

$$a \oplus_L b = 1 - (1 - a) *_L (1 - b),$$

ja

1. $a = 0,2$ un $b = 0,4$

2. $a = 1$ un $b = 0,7$

T-normas un t-konormas

Risinājums

1. $0,2 \oplus_L 0,4 = \mathit{min}\{0,2+0,4;1\} = \mathit{min}\{0,6;1\} = 0,6$
   $1 - 0,8 *_L 0,6 = 1 - \mathit{max}\{0,8+0,6-1;0\} =$
   $1 - \mathit{max}\{0,4;0\} = 1 - 0,4 = 0,6$

2. $1 \oplus_L 0,7 = \mathit{min}\{1+0,7;1\} = 1$
   $1 - 0 *_L 0,3 = 1 - \mathit{max}\{0+0,3-1;0\} =$
   $1 - \mathit{max}\{-0,7;0\} = 1 - 0 = 1$

Nestriktas metrikas

Definīcija

Pieņemsim, ka X ir kopa un $*$ ir t-norma. Nestrikta metrika uz kopas X ar dotu t-normu $*$ ir funkcija $M : X \times X \times \mathbb{R}^+ \to [0,1]$, kur $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, kas apmierina sekojošas aksiomas:

(0FKM) $M(x, y, 0) = 0$ *ir spēkā* $\forall\ x, y \in X$;

(1FKM) $M(x, y, t) = 1$ *visiem* t *tad un tikai tad, ja* $x = y$;

(2FKM) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$ *ir spēkā visiem* $x, y \in X$, *un visiem* $t \in \mathbb{R}^+$;

(3FKM) $M(x, z, t + s) \geq M(x, y, t) * M(y, z, s)$ *visiem* $x, y \in X$, *un visiem* $t \in \mathbb{R}^+$; *(šo sauc par trijstūra nevienādību)*

(4FKM) $M(x, y, -) : \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ *ir nepārtraukta visiem* $x, y \in X$.

Piebilde

Ja grib izmantot šo nestrikto metriku, lai salīdzinātu attālumus starp bezgalīgiem vārdiem, trijstūra nevienādības aksiomā vajag, lai trešais mainīgais visos ir viens un tas pats (jo gribam, lai šis parametrs norāda to, cik daudz pozīcijas esam salīdzinājuši).

Nestriktas metrikas

Definīcija

Nestrikto metriku M uz kopas X sauc par stingru, ja pamatdefinīcijā izmaina aksiomas $(3\mathrm{FKM})$ *un* $(4\mathrm{FKM})$

$(3^s\mathrm{FKM})$ $M(x,z,t) \geq M(x,y,t) * M(y,z,t)$ *visiem* $x, y, z \in X$ *un visiem* $t \in \mathbb{R}^+$.

$(4^s\mathrm{FKM})$ $M(x,y,-) : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ *ir nepārtraukta un nedilstoša, (tas ir,* $t < s \Longrightarrow M(x,y,t) \leq M(x,y,s)$ *visiem* $x, y \in X$*.).*

Nestriktas metrikas

Tikai nedaudz definētas funkcijas ir nestriktas metrikas ar konkrētām t-normām.

Definīcija

Pieņemsim, ka ir dota metrika $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *un t-norma* $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, *tad par standarta nestrikto metriku sauc funkciju* $M_d : X \times X \times \mathbb{R}^+ \to (0,1]$, *kuru definē sekojoši:*

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x,y)}$$

Ir pierādīts un zināms, ka šādi definēta funkcija ir nestrikta metrika (izpildās visas nestriktās metrikas aksiomas) visām t-normām (tādēļ arī šo bieži izmanto).

Uzdevums

Pierādīt, ka šādi definētai funkcijai izpildās aksioma (3^sFKM), ja tiek izmantota reizinājuma t-norma, t.i.,

$$M_d(x, z, t) \geq M_d(x, y, t) *_{prod} M_d(y, z, t)$$

Nestriktas metrikas lietojumi vārdu kombinatorikā

Teorēma

Pieņemsim, ka ir dota metrika $d : X \times X \to [0, +\infty)$ *un definēsim funkciju* $m : X \times X \times \mathbb{R}^+ \to [0; 1]$ *sekojoši:*

$$m(x, y, t) = \frac{t - d(x,y)}{t + 100}.$$

Var pierādīt, ka šī funkcija $m(x, y, t)$ ir stingra nestrikta metrika gan ar Lukaševica t-normu $*_{Luk}$, gan ar Drastisko t-normu $*_D$.

Nestriktas metrikas lietojumi vārdu kombinatorikā

Atgriezīsimies pie mūsu pretpiemēra

$$x = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...),\ y = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ..),$$
$$z = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...).$$

Iepriekš mūsu parastā metrika deva rezultātu, ka $\sigma(x, z) = \sigma(y, z)$.

Teorēma

Ja mēs aplūkojam trīs bezgalīgus vārdus

$$x = (1, 0, 0, 0, \dots.),\ y = (0, 1, 1, 1, ..),\ z = (0, 0, 0, 0, \dots),$$

tad

$$m(x, z, t) = 1 > \tfrac{1}{3} = m(y, z, t),\ \textit{kad}\ t \to \infty$$

Nestriktas metrikas lietojumi vārdu kombinatorikā

- Šis rezultāts norāda, ka z "tuvāks" x nekā y, jo nestriktajām metrikām, jo lielāka vērtība, jo elementi ir tuvāki (attālums starp tiem ir mazāks).

- Tas ir dabīgi, jo vārdi y un z sakrīt tikai pirmajā pozīcijā, bet vārdi x un z nesakrīt tikai pirmajā pozīcijā (sakrīt bezgalīgi daudz pozīcijās). Vairāk informācijas (angļu valodā) un detalizētāku skaidrojumu šim rezultātam un tematikai pieejams šeit:

https://www.mdpi.com/2227-7390/10/5/738

Nestriktas metrikas lietojumi vārdu kombinatorikā

- Augstāk definētā stingrā, nestriktā metrika $m(x, y, t) = \frac{t-d(x,y)}{t+100}$ ir specgadījums stingrai, nestriktai metrikai $m(x, y, t) = \frac{t-d(x,y)}{t+c}$, kur $c \in \mathbb{R}^+$ ir parametrs.

- Šīs konstantes c izvēle ir atkarīga no vajadzīgā pielietojuma. Jo mazāks ir c, jo svarīgāks ir prefikss, t.i., tas, vai pirmie simboli sakrīt vai atšķiras ļoti ietekmē rezultātu (cik tuvi vai tāli ir attiecīgie bezgalīgie vārdi).

- Piemēram, ja $c = 1$, tad pirmā pozīcija (sakrīt vai nesakrīt) dod "svaru" rezultātam 50 %.

- Bet, ja $c = 100$ (kā mūsu gadījumā), tad pirmā pozīcija (sakrīt vai nesakrīt) dod "svaru" rezultātam tikai $\frac{1}{101} < 1\%$.

Paldies par uzmanību!

Jautājumi?