

Neiznīcināmā teorija

Kā Beijesa formula mainīja pasauli

Reinis Alksnis

2024. gada 16. novembris

Beijesa teorēma

Teorēma

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- ▶ $P(A)$ - apriorā varbūtība
- ▶ $P(B|A)$ - jauna informācija
- ▶ $P(A|B)$ - aposteriorā varbūtība

Beijesa princips

Beijesa likums

$$P(\theta|\text{Dati}) = \frac{P(\text{Dati}|\theta)P(\theta)}{P(\text{Dati})}$$

- ▶ $P(\text{Dati})$ - bieži vien sarežģīti aprēķināt
- ▶ $P(\text{Dati})$ - normalizējoša konstante

Bieži rakstam

$$P(\theta|\text{Dati}) \propto P(\text{Dati}|\theta)P(\theta)$$

FREQUENCIST STATISTICS













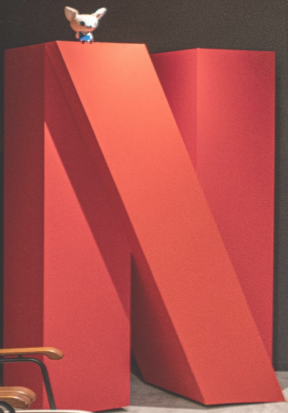








ETFLIX



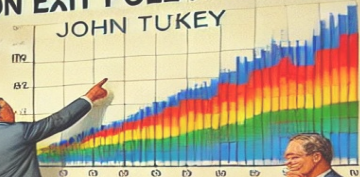


ELECTION EXIT POLL ANALYSIS

JOHN TUKEY

JOHN TUKEY

CHART: G. GUSTAV



EXIT POLL

1984





Kā definēt varbūtību?

- ▶ Piemēram, kāda varbūtību metot kauliņu uzmet 5?
 - ▶ **Klasiskā pieeja** (labvēlīgo notikumu skaits)
 - ▶ **Biežumu pieeja** (relatīvais biežums)
 - ▶ **Aksiomātiskā pieeja** (matemātiski formāla pieeja)
 - ▶ **Subjektīvā pieeja** (subjektīva pārlicība)

Nosacītā varbūtība

Nosacītā varbūtība

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ un } B)}{P(B)}$$

Piemērs

- ▶ A - uzmet 5 ($P(A) = \frac{1}{6}$)
- ▶ B - uzmet nepāra skaitli ($P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$)
- ▶ $P(A \text{ un } B) = \frac{1}{6}$

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Pilnās varbūtības formula

Pilnās varbūtības formula

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \text{ un } B_1) + P(A \text{ un } B_2) + \cdots + P(A \text{ un } B_n) = \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots P(A|B_n)P(B_n) \end{aligned}$$

Piemērs

- ▶ A - sekmīgs vērtējums pārbaudes darbā
- ▶ B_1 - pirms tam gatavojās
- ▶ B_2 - pirms tam negatavojās

$$\begin{aligned} P(\text{sekmīgs}) &= P(\text{sekmīgs un gatavojās}) + \\ &+ P(\text{sekmīgs un negatavojās}) \end{aligned}$$

Testu rezultātu interpretācija



- ▶ Slims ir 1 no 1000 iedzīvotājiem, t.i.
 $P(\text{slims}) = 0.001$
- ▶ Testa precizitāte:
 - ▶ $P(+|\text{slims}) = 0.99$
 - ▶ $P(+|\text{vesels}) = 0.05$
- ▶ $P(\text{slims}|+) = ?$

Aprēķini

Pilnās varbūtības formula

$$\begin{aligned} P(+) &= P(+ \text{ un slim}) + P(+ \text{ un vesels}) = \\ &= P(+|\text{slims})P(\text{slims}) + P(+|\text{vesels})P(\text{vesels}) = \\ &= 0.99 \cdot 0.001 + 0.05 \cdot 0.999 = 0.05094 \end{aligned}$$

Aprēķini

Beijesa formula

$$\begin{aligned} P(\text{vesels}|+) &= \frac{P(+|\text{vesels})P(\text{vesels})}{P(+)} = \\ &= \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.05094} = 0.01943463 \end{aligned}$$

Jauna informācija



- ▶ Tagad
 $P(\text{slims}) = 0.01943463$
- ▶ Tiek veikts atkārtots tests
- ▶ Testa precizitāte:
 - ▶ $P(+|\text{slims}) = 0.98$
 - ▶ $P(+|\text{vesels}) = 0.04$
- ▶ $P(\text{slims}|+) = ?$

Aprēķini

Beijesa formula

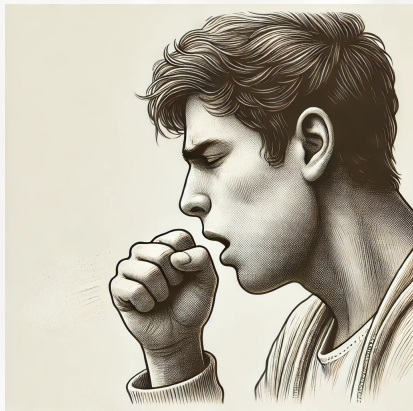
$$\begin{aligned} P(+) &= P(+|\text{slims})P(\text{slims}) + P(+|\text{vesels})P(\text{vesels}) = \\ &= 0.98 \cdot 0.01943463 + 0.04 \cdot 0.9805654 = 0.05826855 \end{aligned}$$

Aprēķini

Beijesa formula

$$\begin{aligned}P(\text{slims}|+) &= \frac{P(+|\text{slims})P(\text{slims})}{P(+)} = \\&= \frac{0.98 \cdot 0.01943463}{0.05826855} = 0.3268648\end{aligned}$$

Jauna informācija



- ▶ Tagad $P(\text{slims}) = 0.3268648$
- ▶ Tiek novēroti konkrēti simptomi
- ▶ Varbūtības:
 - ▶ $P(\text{simptomi}|\text{slims}) = 0.9$
 - ▶ $P(\text{simptomi}|\text{vesels}) = 0.1$
- ▶ $P(\text{slims}|+) = ?$

Aprēķini

Pilnā varbūtību formula

$$\begin{aligned} P(\text{simptomi}) &= P(\text{simptomi}|\text{slims})P(\text{slims}) + \\ &+ P(\text{simptomi}|\text{vesels})P(\text{vesels}) = \\ &= 0.9 \cdot 0.3268648 + 0.1 \cdot 0.6731352 = 0.36149184 \end{aligned}$$

Aprēķini

Beijesa formula

$$\begin{aligned} P(\text{slims}|\text{simptomi}) &= \frac{P(\text{simptomi}|\text{slims})}{P(\text{simptomi})} = \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.3268648}{0.36149184} = 0.81378965566 \end{aligned}$$

BAYESIAN STATISTICS

2.2%

PROBABILITY
STATISTICS

STATISTICS

Paldies par uzmanību!

Jautājumi?

PROBABILITY
STATISTICS