

Funkcijas vērtību interpolācija

Asoc. prof. Jānis Bajārs

sadarbībā ar Karlīnu Šagiazdanovu

Latvijas Universitāte
Mazā matemātikas universitāte
01.03.2025.

Lekcijas mērķis

Iepazīstināt ar funkcijas vērtību interpolācijas jēdzienu, aplūkojot gan teorētiskos, gan praktiskos aspektus, tai skaitā arī piemērus.

Praktisko darbu mērķis

Gūt praktiskas iemaņas, risinot ar funkcijas vērtību interpolāciju saistītus uzdevumus.

interpolācija

Starpvērtību atrašana pēc funkcijas doto vērtību virknes.

¹Avots: <https://tezaurs.lv>

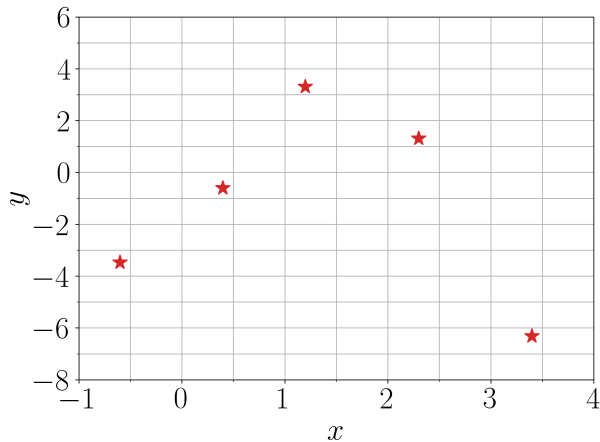
Problēmas formulējums

Iedomāsimies, ka mums ir dota nezināmas funkcijas vērtību virkne, kas ir atspoguļota tabulā:

x	y
-0.6	-3.4782
0.4	-0.6027
1.2	3.3033
2.3	1.3068
3.4	-6.3162

tas ir, dotām x vērtībām ir piekārtotas konkrētas y vērtības.

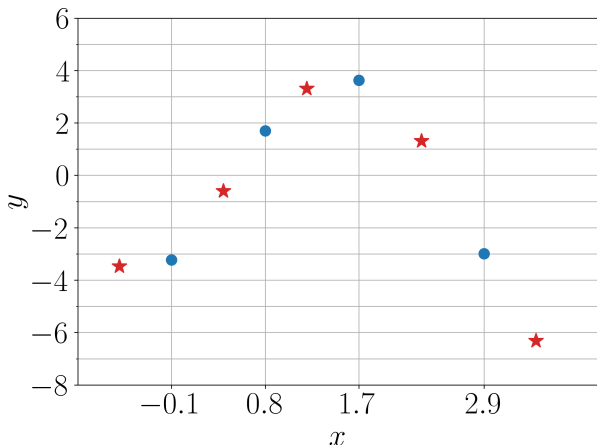
Problēmas formulējuma vizualizācija



x	y
-0.6	-3.4782
0.4	-0.6027
1.2	3.3033
2.3	1.3068
3.4	-6.3162

Problēmas uzdevums

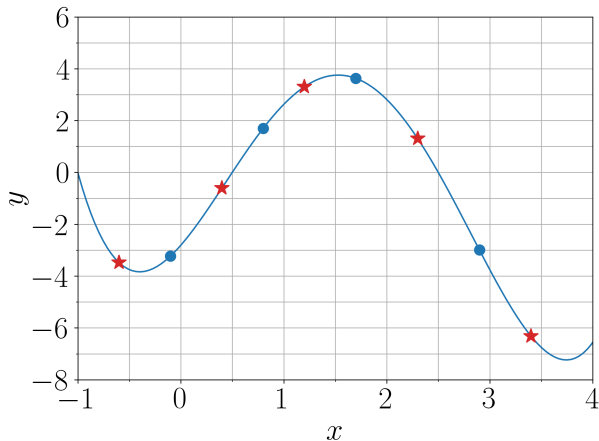
Uzdevums ir uzdot funkciju f , ka $y = f(x)$ visām dotajām vērtībām, lai raksturotu nezināmās funkcijas starpvērtības ar funkcijas f vērtībām.



x	y
-0.6	-3.4782
-0.1	?
0.4	-0.6027
0.8	?
1.2	3.3033
1.7	?
2.3	1.3068
2.9	?
3.4	-6.3162

Problēmas atrisinājums

Uzdevums ir uzdot funkciju f , ka $y = f(x)$ visām dotajām vērtībām, lai raksturotu nezināmās funkcijas starpvērtības ar funkcijas f vērtībām.

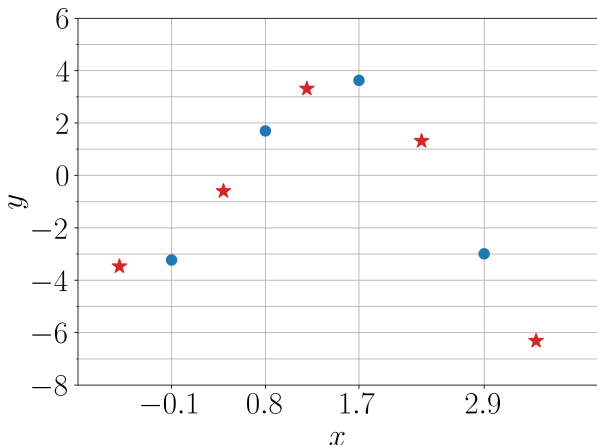


x	y
-0.6	-3.4782
-0.1	-3.2292
0.4	-0.6027
0.8	1.6983
1.2	3.3033
1.7	3.6288
2.3	1.3068
2.9	-2.9952
3.4	-6.3162

$$y = f(x) = 0.5x^4 - 3.25x^3 + 3.625x^2 + 4.5625x - 2.8125$$

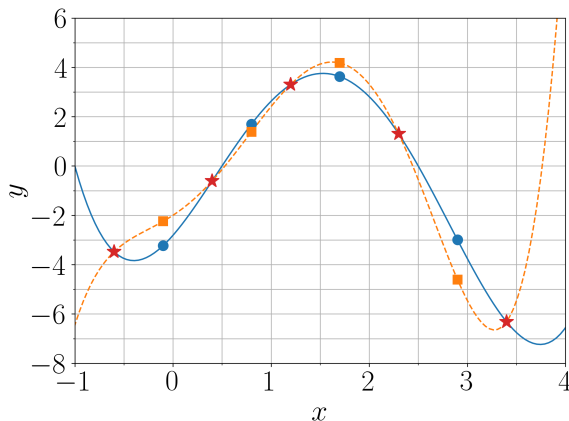
Cik šādai problēmai ir atrisinājumu?

Uzdevums ir uzdot funkciju f , ka $y = f(x)$ visām dotajām vērtībām, lai raksturotu nezināmās funkcijas starpvērtības ar funkcijas f vērtībām.



x	y
-0.6	-3.4782
-0.1	?
0.4	-0.6027
0.8	?
1.2	3.3033
1.7	?
2.3	1.3068
2.9	?
3.4	-6.3162

Problēmas atrisinājumi



x	y	y
-0.6	-3.4782	-3.4782
-0.1	-3.2292	-2.24...
0.4	-0.6027	-0.6027
0.8	1.6983	1.38...
1.2	3.3033	3.3033
1.7	3.6288	4.17...
2.3	1.3068	1.3068
2.9	-2.9952	-4.60...
3.4	-6.3162	-6.3162

$$y = f(x) = 0.5x^4 - 3.25x^3 + 3.625x^2 + 4.5625x - 2.8125$$

$$y = g(x) = 0.360765x^5 - 1.91712x^4 + 1.45437x^3 + 1.89477x^2 + 2.6161x - 2$$

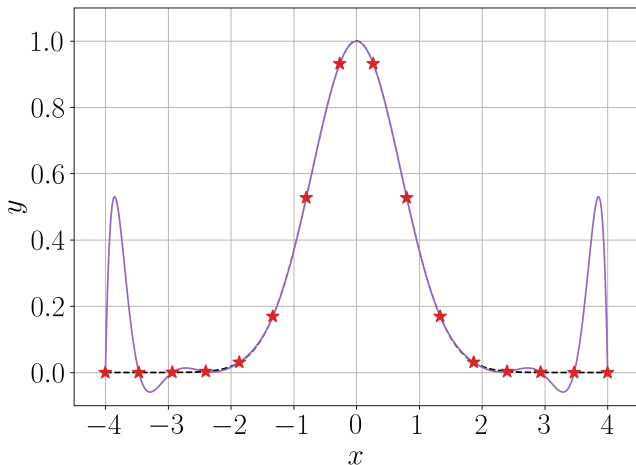
Interpolāciju veidi

Pastāv ļoti daudzi un dažādi funkcijas vērtību interpolācijas veidi jeb metodes:

- polinomiālā interpolācija;
- gabaliem lineārā interpolācija;
- gabaliem kvadrātiskā interpolācija;
- ...

Polinomiālās interpolācijas potenciālās problēmas

Runge fenomens



15-tās kārtas polinomiālā interpolācija.

Taisnes vienādojums

Plaknē caur diviem (atšķirīgiem) punktiem ar koordinātām (x_1, y_1) un (x_2, y_2) var novilkt vienu vienīgu taisni. Taisnes vienādojums ir formā:

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1) = 0.$$

Ja $x_1 = x_2$, tad $y_1 \neq y_2$ un taisnes vienādojums ir $x = x_1$, citādi:

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1),$$

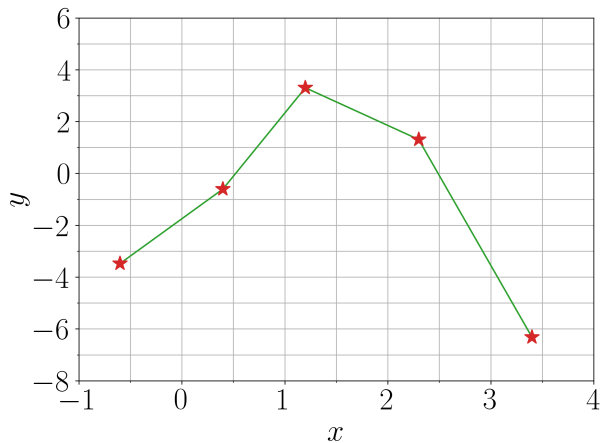
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1,$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1},$$

$$y = ax + b, \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}.$$

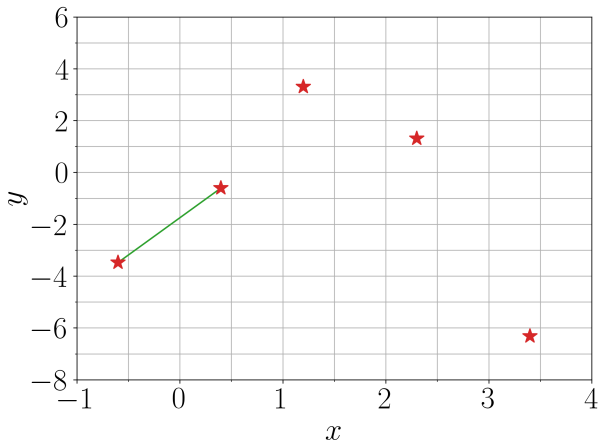
Gabaliem lineārā interpolācija



x	y
-0.6	-3.4782
0.4	-0.6027
1.2	3.3033
2.3	1.3068
3.4	-6.3162

Gabaliem lineārās interpolācijas funkcijas piemērs

Atrādīsim taisnes vienādojumu starp pirmajiem diviem punktiem, tas ir, $(x_1, y_1) = (-0.6, -3.4782)$ un $(x_2, y_2) = (0.4, -0.6027)$.



<i>x</i>	<i>y</i>
-0.6	-3.4782
0.4	-0.6027
1.2	3.3033
2.3	1.3068
3.4	-6.3162

Gabaliem lineārās interpolācijas funkcijas piemērs

Atradīsim taisnes vienādojumu starp pirmajiem diviem punktiem, tas ir, $(x_1, y_1) = (-0.6, -3.4782)$ un $(x_2, y_2) = (0.4, -0.6027)$.

Ievērosim, ka

$$x_1 = -0.6 \neq 0.4 = x_2.$$

No tā izriet, ka taisnes vienādojums ir formā:

$$y = ax + b,$$

kur

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-0.6027 + 3.4782}{0.4 + 0.6} = \frac{2.8755}{1} = 2.8755,$$

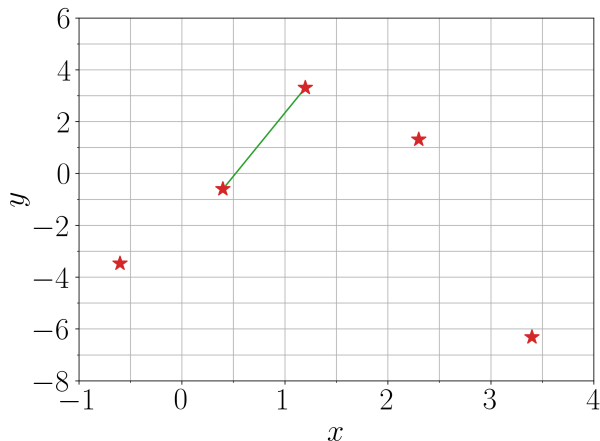
$$b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3.4782 * 0.4 - 0.6027 * 0.6}{0.4 + 0.6} = \frac{-1.7529}{1} = -1.7529.$$

x	y
-0.6	-3.4782
0.4	-0.6027
1.2	3.3033
2.3	1.3068
3.4	-6.3162

Tādā pašā veidā...

Atrodam taisnes vienādojumu starp diviem punktiem:

$(x_1, y_1) = (0.4, -0.6027)$ un $(x_2, y_2) = (1.2, 3.3033)$.

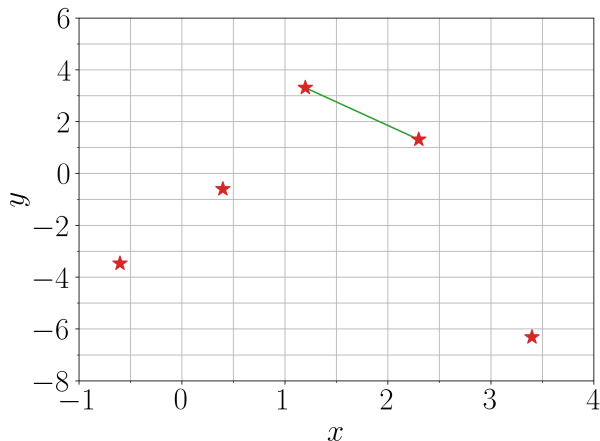


x	y
-0.6	-3.4782
0.4	-0.6027
1.2	3.3033
2.3	1.3068
3.4	-6.3162

Tādā pašā veidā...

Atrodam taisnes vienādojumu starp diviem punktiem:

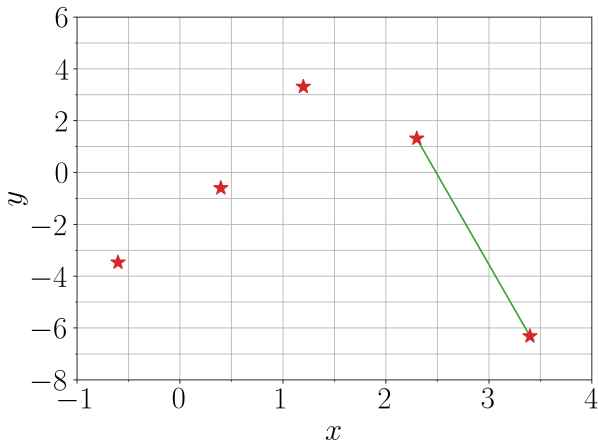
$(x_1, y_1) = (1.2, 3.3033)$ un $(x_2, y_2) = (2.3, 1.3068)$.



x	y
-0.6	-3.4782
0.4	-0.6027
1.2	3.3033
2.3	1.3068
3.4	-6.3162

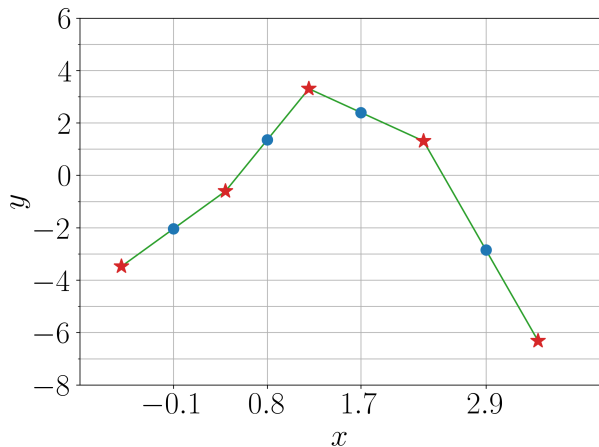
Tādā pašā veidā...

Atrodam taisnes vienādojumu starp diviem punktiem:
 $(x_1, y_1) = (2.3, 1.3068)$ un $(x_2, y_2) = (3.4, -6.3162)$.



<i>x</i>	<i>y</i>
-0.6	-3.4782
0.4	-0.6027
1.2	3.3033
2.3	1.3068
3.4	-6.3162

Gala rezultāts



x	y
-0.6	-3.4782
-0.1	-2.0404...
0.4	-0.6027
0.8	1.3502...
1.2	3.3033
1.7	2.3957...
2.3	1.3068
2.9	-2.8512...
3.4	-6.3162

Kvadrātiskās funkcijas

Patvaļīgs otrās kārtas polinoms ir kvadrātiska funkcija formā:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

kur a , b un c ir patvaļīgas konstantes. Atsauksim atmiņā, ka kvadrātiskās funkcijas grafiku sauc par *parabolu*.

Ievērosim, ka mums ir tieši 3 patvaļīgas konstantes, kas nosaka kvadrātisko funkciju. Tāpēc nebūs pārsteigums, ka caur trīs atšķirīgiem plaknes punktiem ar koordinātām (x_1, y_1) , (x_2, y_2) un (x_3, y_3) , kur $x_1 \neq x_2$, $x_2 \neq x_3$, $x_1 \neq x_3$ un vienlaicīgi nav tā, ka $y_1 = y_2 = y_3$, var izvilkt vienu vienīgu parabolu, kuru apraksta augšā minētais vienādojums.

Kvadrātiskās funkcijas atrašana

Lai noteiktu parabolas vienādojumu formā:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

kas iet caur trīs punktiem: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) un (x_3, y_3) , ir jārisina lineāru vienādojumu sistēma formā:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1,$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = y_2,$$

$$ax_3^2 + bx_3 + c = y_3,$$

tas ir, mums ir 3 lineāri vienādojumi ar 3 nezināmajiem: a , b un c .

Lineāru vienādojumu sistēmu risina ar izslēgšanas metodi.

Izslēgšanas metode

Risinot lineāru vienādojumu sistēmu formā:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1,$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = y_2,$$

$$ax_3^2 + bx_3 + c = y_3,$$

no pirmā vienādojuma mēs varam izteikt nezināmo c , tas ir,

$$c = y_1 - ax_1^2 - bx_1.$$

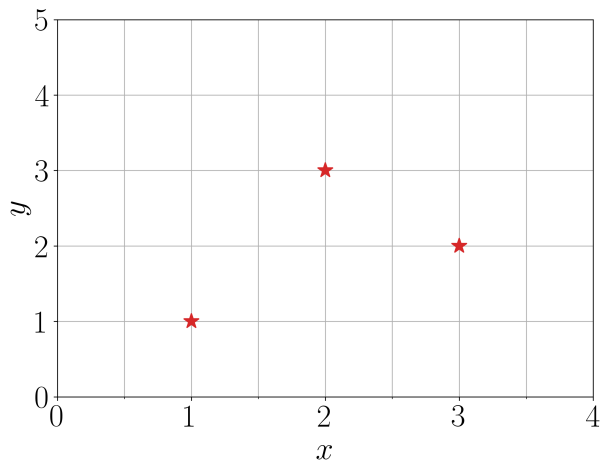
To ievietojot otrajā un trešajā vienādojumā, iegūstam lineāru vienādojumu sistēmu, bet tagad jau tikai ar diviem nezināmajiem a un b :

$$a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = y_2 - y_1,$$

$$a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1) = y_3 - y_1.$$

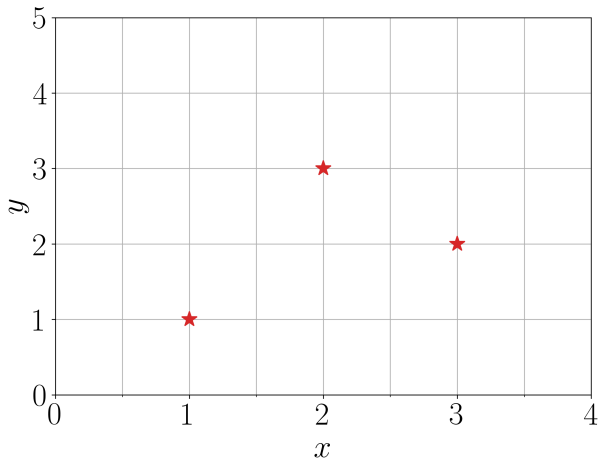
Vai tālāk mācēsiet to atrisināt?

Kvadrātiska interpolācija: problēmas nostādne



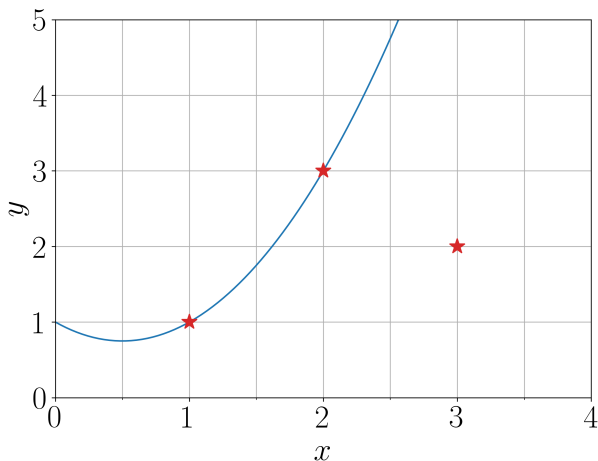
x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3

Kvadrātiska interpolācija: problēmas nostādne



x	y
1	1
2	3
3	2

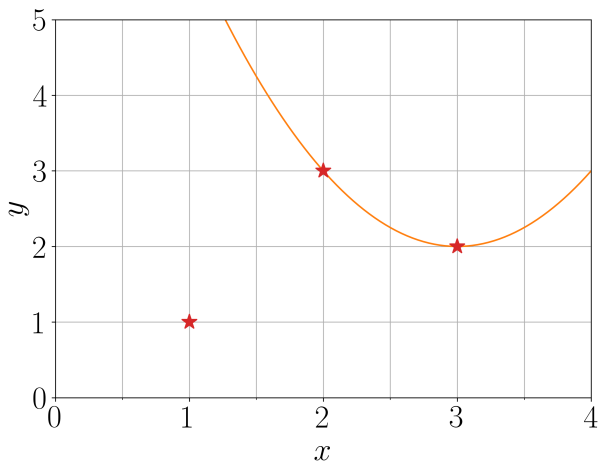
Kvadrātiska interpolācija: problēmas nostādne



x	y
1	1
2	3
3	2

$$y = f(x) = x^2 - x + 1$$

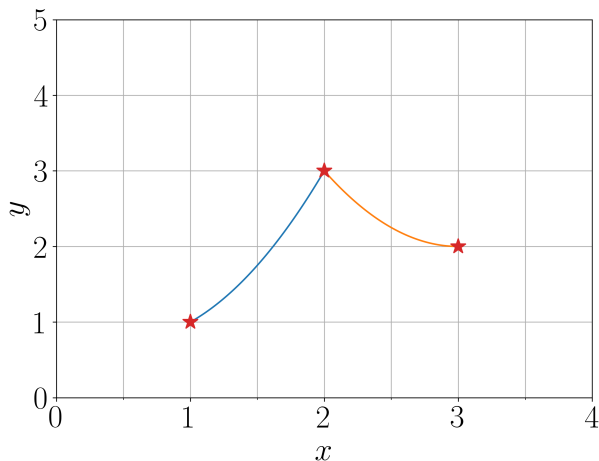
Kvadrātiska interpolācija: problēmas nostādne



x	y
1	1
2	3
3	2

$$y = g(x) = x^2 - 6x + 11$$

Kvadrātiska interpolācija: problēmas nostādne

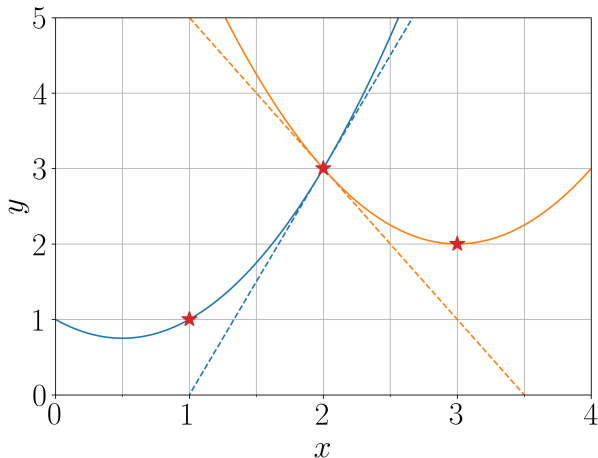


x	y
1	1
2	3
3	2

$$y = f(x) = x^2 - x + 1, \quad y = g(x) = x^2 - 6x + 11.$$

Kvadrātiska interpolācija: problēmas nostādne

Varam ieskicēt abām parabolām pieskares punktā $(2, 3)$.



x	y
1	1
2	3
3	2

$$y = f(x) = x^2 - x + 1, \quad y = g(x) = x^2 - 6x + 11.$$

Gabaliem kvadrātiska interpolācija

Meklējam divas kvadrātiskas funkcijas formā:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c;$$

$$y = g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

ar sešām nezināmām konstantēm: a , b , c , α , β un γ .

Mūsu piemērā mēs prasām, lai izpildītos šādi vienādojumi:

$$f(1) = a + b + c = 1,$$

$$f(2) = 4a + 2b + c = 3,$$

$$g(2) = 4\alpha + 2\beta + \gamma = 3,$$

$$g(3) = 9\alpha + 3\beta + \gamma = 2,$$

turklāt, lai parabolām sakristu pieskares punktā $(2, 3)$, jāprasa arī, ka izpildās sakarība: $4a + b = 4\alpha + \beta$.

Gabaliem kvadrātiska interpolācija

Problēma!!! Mums ir 5 lineāri vienādojumi formā:

$$a + b + c = 1,$$

$$4a + 2b + c = 3,$$

$$4\alpha + 2\beta + \gamma = 3,$$

$$9\alpha + 3\beta + \gamma = 2,$$

$$4a + b = 4\alpha + \beta,$$

bet ar 6 nezināmajiem: a , b , c , α , β un γ .

Mums ir jāiegūst un jāpievieno vēl viens vienādojums.

Gabaliem kvadrātiska interpolācija

Aplūkosim speciālgadījumu, kad ne tikai abas pieskares sakrīt punktā $(2, 3)$, bet tās ir arī paralēlas x asij.

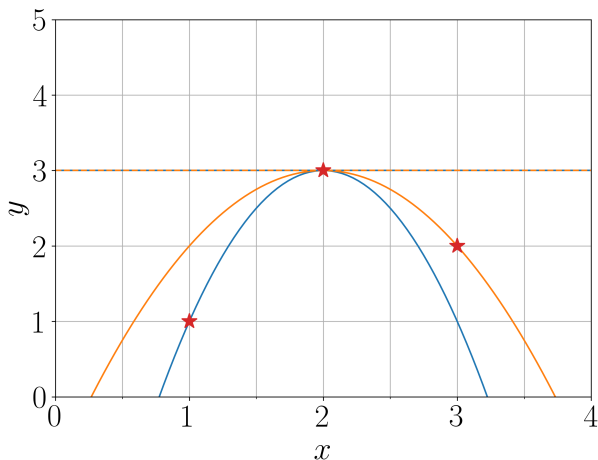
To iegūst, papildus prasot, lai izpildās sakarība formā:

$$4a + b = 0.$$

Ar to mums tagad ir 6 lineāri vienādojumi, lai atrastu 6 nezināmos: a , b , c , α , β un γ .

Gabaliem kvadrātiskas interpolācijas rezultāts

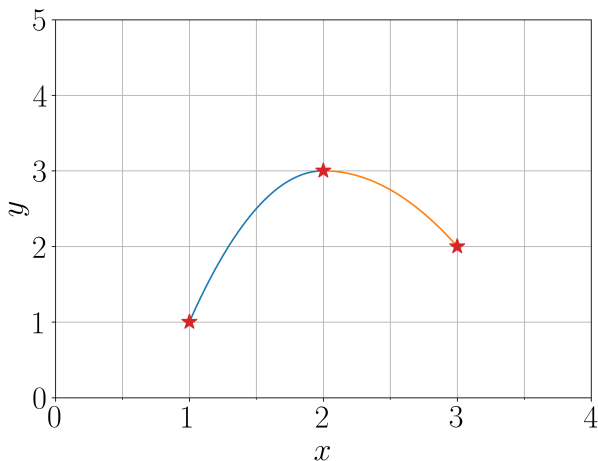
Varam ieskicēt abas parabolas un to pieskares punktā $(2, 3)$.



x	y
1	1
2	3
3	2

$$y = f(x) = -2x^2 + 8x - 5, \quad y = g(x) = -x^2 + 4x - 1.$$

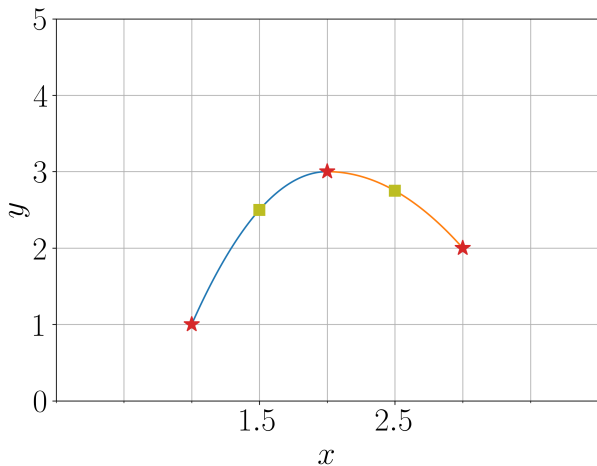
Gabaliem kvadrātiskas interpolācijas gala rezultāts



x	y
1	1
2	3
3	2

$$y = f(x) = -2x^2 + 8x - 5, \quad y = g(x) = -x^2 + 4x - 1.$$

Gabaliem kvadrātiskas interpolācijas gala rezultāts



x	y
1	1
1.5	2.5
2	3
2.5	2.75
3	2

$$y = f(1.5) = -2 * 1.5^2 + 8 * 1.5 - 5 = -4.5 + 12 - 5 = 2.5,$$

$$y = g(2.5) = -2.5^2 + 4 * 2.5 - 1 = -6.25 + 10 - 1 = 2.75.$$

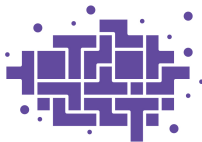
Šajā lekcijā mēs:

- aplūkojām funkcijas vērtību interpolācijas jēdzienu;
- ar piemēru ilustrējām polinomiālo interpolāciju;
- izvedām formulas gabaliem lineāras interpolācijas veikšanai;
- vispārinājām gabaliem lineāro interpolāciju uz gabaliem kvadrātisko interpolāciju.

Praktiskās nodarbības laikā Jums būs iespēja likt lietā tikko iegūtās jaunās zināšanas par funkcijas vērtību interpolāciju.



Latvijas Zinātnes
padome



FLPP

FUNDAMENTĀLO UN
LIETIŠĀO PĒTĪJUMU
PROJEKTI

Autors pateicas Latvijas Zinātnes padomei par atbalstu zinātnes un matemātisko metožu popularizēšanas aktivitātēm projekta “Struktūras un datu virzītu metožu izstrāde kompleksu dinamisko sistēmu analīzei un vadībai” ietvaros, projekta Nr. Izp-2024/1-0207.

Paldies par uzmanību!