

ROBEŽAS

Māris Krastiņš

Latvijas Universitāte

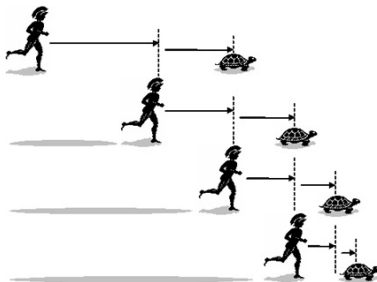
2026. gada 17. janvāris

Saturs

- 1 Vēsturiskā retrospekcija
- 2 Funkcijas robeža
- 3 Dalīšana ar bezgalību
- 4 Dalīšana ar nulli
- 5 Nenoteiktība $\frac{\infty}{\infty}$
- 6 Nenoteiktība $\frac{0}{0}$
- 7 Nenoteiktība $\infty - \infty$

Zenona paradokss

Zenons no Elejas dzīvoja 490. - 430. gadā pirms mūsu ēras tagadējās Itālijas dienvidos.

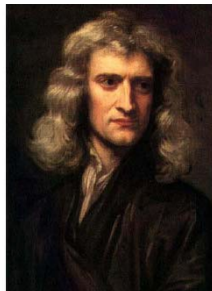


Katru reizi, kad Ahilejs sasniedzis nākamo atzīmes punktu, bruņurupucis ticis par vienu tālāk. Vai Ahillejs tiešām nenoķers bruņurupuci?

Īzaks Ņūtons un Gotfrīds Vilhelms Leibnics



Gotfrīds Vilhelms Leibnics
(1646 - 1716)



Īzaks Ņūtons
(1642 - 1727)

Strādājot ar bezgalīgi maziem lielumiem, Ņūtons un Leibnics neatkarīgi viens no otra guva ievērojamus rezultātus diferenciālrēķinu jomā.

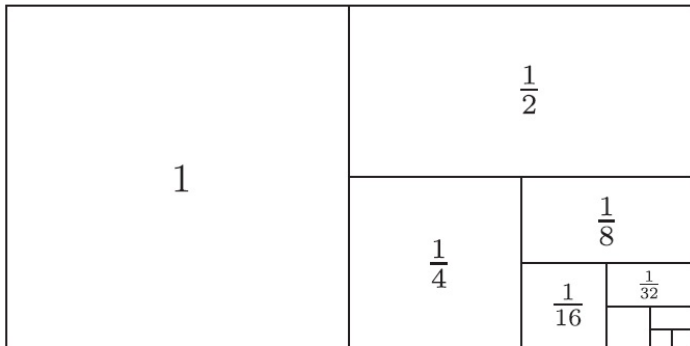
Augustīns Luiss Košī



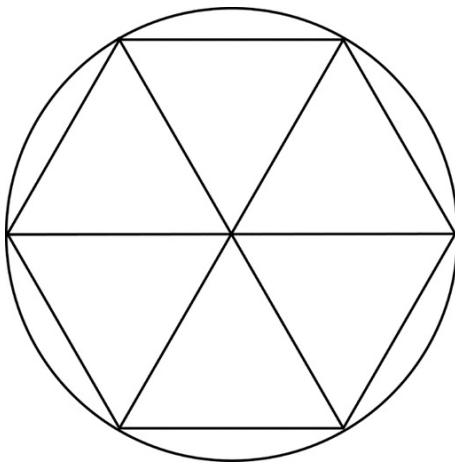
Franču matemātiķis barons Augustīns Luiss Košī (1789 - 1857)
pirmais precīzi formulēja funkcijas robežas definīciju.

Taisnstūra laukums

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 2.$$



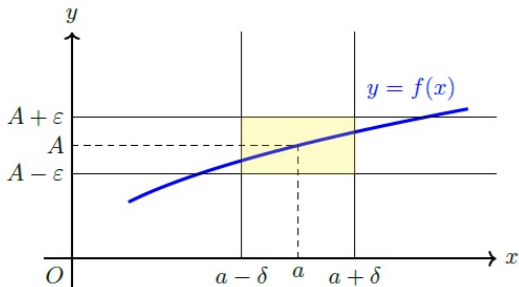
Riņķa laukums



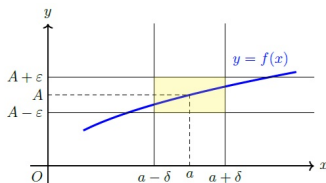
Funkcijas robežas definīcijas ideja

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Jo tuvāk x atrodas punktam a , jo mazāk funkcijas vērtība $f(x)$ atšķiras no A .



Funkcijas robežas definīcija



Definīcija

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ tad un tikai tad, ja katram $\varepsilon > 0$ var atrast $\delta > 0$ tādu, ka visiem x , kas no a atrodas tuvāk kā δ attālumā, bet nesakrīt ar a , funkcijas vērtība $f(x)$ no A atšķiras mazāk par ε .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \neq a : |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Funkcijas robežas aprēķināšana

Domājot par funkcijas robežu, mūs interesē nevis funkcijas vērtība šajā punktā (kas bieži vien nepieder funkcijas definīcijas apgabalam D_f), bet kas notiek ar funkcijas vērtībām šī punkta apkārtnē.

Jāņem vērā, ka gan arguments var tiekties uz kādu konkrētu skaitli vai bezgalību, gan funkcijas robeža var būt skaitlis vai bezgalība.

Situācijas var būt šādas:

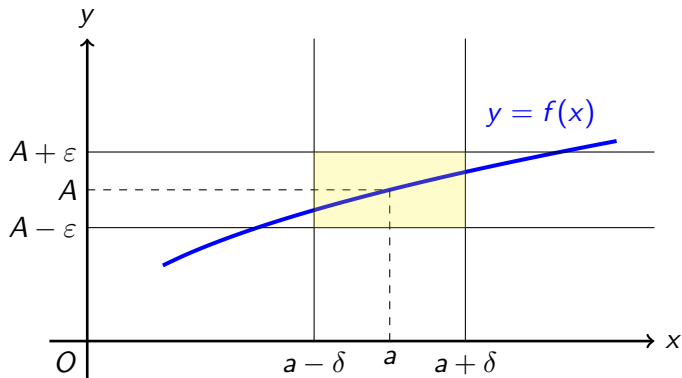
$$1. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty;$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Funkcijas robežas aprēķināšana



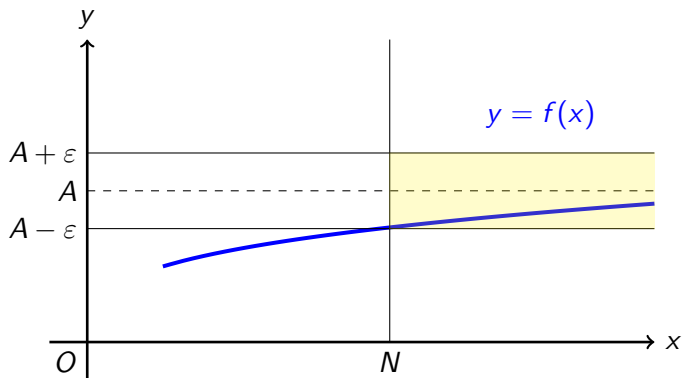
Funkcijas robežas aprēķināšana

Skaitli A sauc par **funkcijas $f(x)$ robežu**, kad x tiecas uz $+\infty$, un raksta $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, ja katram pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu skaitli N , ka ar visām x vērtībām, kas lielākas nekā N ir spēkā nevienādība $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jeb, saīsinātajā pierakstā:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \quad x > N : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Funkcijas robežas aprēķināšana



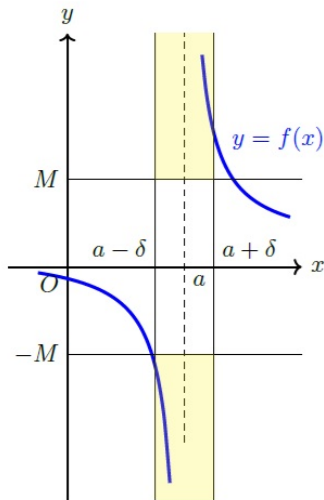
Funkcijas robežas aprēķināšana

Funkcijas $f(x)$ **robeža ir bezgalība**, kad x tiecas uz a , un raksta $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, ja katram pozitīvam skaitlim M var atrast tādu pozitīvu skaitli δ , ka ar visām x vērtībām, kurām $0 < |x - a| < \delta$, ir spēkā nevienādība $|f(x)| > M$.

Jeb, saīsinātajā pierakstā:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta : |f(x)| > M.$$

Funkcijas robežas aprēķināšana



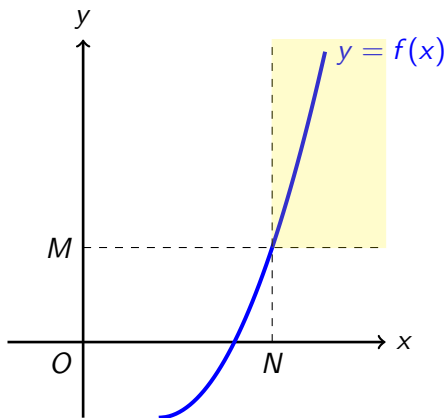
Funkcijas robežas aprēķināšana

Funkcijas $f(x)$ **robežai ir bezgalība, kad x tiecas uz bezgalību**, un raksta $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, ja katram pozitīvam skaitlim M var atrast tādu pozitīvu skaitli N , ka ar visām x vērtībām, kurām $|x| > N$, ir spēkā nevienādība $|f(x)| > M$.

Jeb, saīsinātajā pierakstā:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N > 0 \quad |x| > N : |f(x)| > M.$$

Funkcijas robežas aprēķināšana



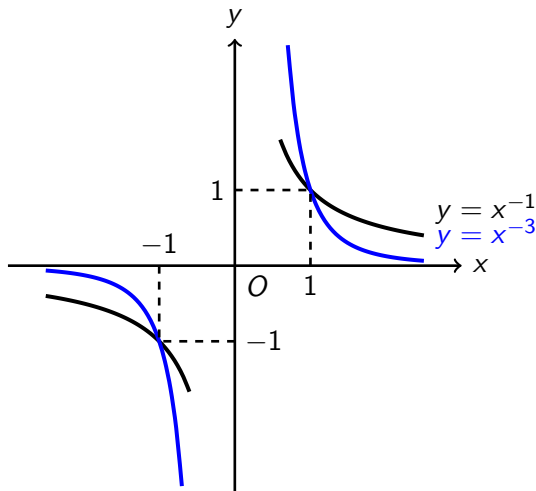
Funkcijas robežas aprēķināšanas piemēri

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$$

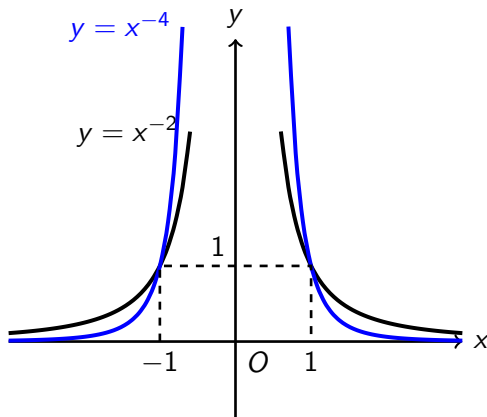
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x^2 + 3} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 2}{2^{-x}} = \frac{16 - 2}{2^4} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

Pakāpes funkcija, kuras kāpinātājs ir nepāra skaitlis



Pakāpes funkcija, kuras kāpinātājs ir pāra skaitlis



Kā dalīt ar bezgalību?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : x > \delta \quad 0 < f(x) < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : x < -\delta \quad -\varepsilon < f(x) < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : |x| > \delta \quad |f(x)| < \varepsilon$$

Funkcijas robežas aprēķināšanas piemēri

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{30000}{x^5} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100}{x^7 + 7} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50}{x^5 - 700} = 0$$

Funkcijas robežas aprēķināšanas piemēri

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (4^{-x} + 3^{-x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4^x} + \frac{1}{3^x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^x} = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Funkcijas robežas aprēķināšanas piemēri

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{2n}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)n}{n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2 \end{aligned}$$

Kā daļīt ar nulli?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : 0 < x < \delta \quad f(x) > \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : -\delta < x < 0 \quad f(x) < -\varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : x \neq 0 \& |x| < \delta \quad |f(x)| > \varepsilon$$

Funkcijas robežas aprēķināšanas piemēri

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2} = \infty$$

Funkcijas robežas aprēķināšanas piemēri

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{-5}{(x-7)^4} = -\infty$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{\infty}{\infty}$?

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2 + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{\infty}{\infty}$?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 4x^3 + 5x^5}{-x^2 - 6x^5} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^5} + \frac{4x^3}{x^5} + \frac{5x^5}{x^5}}{-\frac{x^2}{x^5} - \frac{6x^5}{x^5}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^4} + \frac{4}{x^2} + 5}{-\frac{1}{x^3} - 6} = -\frac{5}{6}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{\infty}{\infty}$?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 7}{2x^3 + 5x^2 + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^5}{x^5} + \frac{7}{x^5}}{\frac{2x^3}{x^5} + \frac{5x^2}{x^5} + \frac{x}{x^5}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{7}{x^5}}{\frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = +\infty$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{\infty}{\infty}$?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + x^2 + 5}{x^9 + 5x^8 + x^7 + 5} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^7}{x^9} + \frac{x^2}{x^9} + \frac{5}{x^9}}{\frac{x^9}{x^9} + \frac{5x^8}{x^9} + \frac{x^7}{x^9} + \frac{5}{x^9}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^7} + \frac{5}{x^9}}{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^9}} = 0$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{\infty}{\infty}$?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - x^2 + 1}{x^8 - 5x^5 + x^2 + 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^5}{x^8} - \frac{x^2}{x^8} + \frac{1}{x^8}}{\frac{x^8}{x^8} - \frac{5x^5}{x^8} + \frac{x^2}{x^8} + \frac{3}{x^8}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^8}}{1 - \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^6} + \frac{3}{x^8}} = 0$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{0}{0}$?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 2x - 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{x+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{0}{0}$?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 3} = \frac{12}{5}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{0}{0}$?

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 16} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1 - \sqrt{x-3})(1 + \sqrt{x-3})}{(x^2 - 16)(1 + \sqrt{x-3})} = \\&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - (x-3)}{(x^2 - 16)(1 + \sqrt{x-3})} = \\&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{(x^2 - 16)(1 + \sqrt{x-3})} = \\&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{(x-4)(x+4)(1 + \sqrt{x-3})} = \\&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1}{(x+4)(1 + \sqrt{x-3})} = -\frac{1}{16}\end{aligned}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{0}{0}$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1)}{x^2(\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 - 1}{x^2(\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} = \frac{1}{3}$$

Kā novērst nenoteiktību $\frac{0}{0}$?

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5-x} - 2)(\sqrt{5-x} + 2)}{(\sqrt{2-x} - 1)(\sqrt{5-x} + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 - x - 4}{(\sqrt{2-x} - 1)(\sqrt{5-x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{(\sqrt{2-x} - 1)(\sqrt{5-x} + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{2-x} + 1)}{(\sqrt{2-x} - 1)(\sqrt{2-x} + 1)(\sqrt{5-x} + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{2-x} + 1)}{(2-x-1)(\sqrt{5-x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{2-x} + 1)}{(1-x)(\sqrt{5-x} + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2-x} + 1)}{(\sqrt{5-x} + 2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Kā novērst nenoteiktību $\infty - \infty$?

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \frac{2}{x^2-4} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-2}{x^2-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2-4} = \infty \end{aligned}$$

Kā novērst nenoteiktību $\infty - \infty$?

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 2x} + x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}} + \frac{x}{x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = 1
\end{aligned}$$

PALDIES PAR UZMANĪBU!