Grafi

Ilmārs Štolcers, Kims Georgs Pavlovs

1 Ievads

Šajā materiālā aplūkosim dažus pamatjautājumus par grafiem un to pielietojumus uzdevumos. Grafi ļauj modelēt dažādas struktūras, kur starp objektiem pastāv attiecības. Lielu nozīmību pēdējās desmitgadēs tie ir ieguvuši datorzinātnē, tādēļ grafu teorija ir attīstījusies kā atsevišķa matemātikas pētījumu nozare, kurā ir daudz specifisku rezultātu. Visus no tiem šajā materiālā neaplūkosim, tādēļ lasītāji, kas vēlas uzzināt par grafiem vairāk, ir aicināti angliski meklēt dažādas diskrētās matemātikas grāmatas un palasīt papildus par tādām tēmām kā divdaļīgi (*bipartite*) grafi, Eilera formula grafiem utt.

2 Pamatlietas

Definīcija. Par **grafu** sauc pāri (V, E), kur V ir virsotņu kopa un E ir šķautņu kopa.

Visvienkāršāk grafus risināšanā ir uztvert kā punktus, kuri savā starpā ir savienoti ar nogriežņiem, kur attiecīgi punkti tiek saukti par virsotnēm, bet nogriežņi – par šķautnēm. Grafus izmanto, lai modelētu attiecības starp objektiem. Piemēram, virsotnes var būt cilvēki, bet šķautnes – draudzības starp cilvēkiem, kur šķautnes velk starp tikai tām virsotnēm, kuru modelētie cilvēki ir draugi. Līdzīgā veidā var modelēt arī citus objektus, kā pilsētas un ceļus starp tām, lidostas un avioreisus utml.

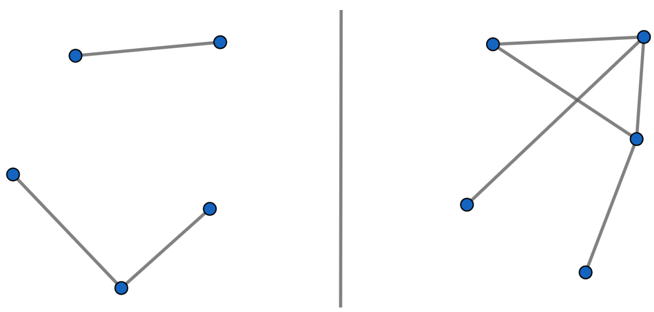
Jāņem vērā, ka olimpiāžu uzdevumos parasti tiek runāts par vienkāršiem grafiem, kur starp divām virsotnēm var pastāvēt ne vairāk kā viena šķautne, kura darbojas abos virzienos vienādi, kā arī virsotnes nav savienotas pašas ar sevi. Eksistē arī dažādi citi grafu paveidi – kur šķautnes var būt orientētas, lai parādītu, ka attiecībai ir svarīga secība; kur ir atļauts, ka šķautne sākas un beidzas tajā pašā virsotnē, veidojot cilpu; kur ir atļautas vairākas atšķirīgas šķautnes starp divām virsotnēm, kas veido multigrafu.

Definīcija. Virsotnes v **pakāpe**, ko apzīmē ar $\deg v$, ir virsotņu skaits, ar kurām šī virsotne ir savienota.

Būtībā pakāpe pasaka to, cik kaimiņu ir konkrētai grafa virsotnei. Iepriekš aplūkotajā piemērā par cilvēkiem un draudzībām katrai virsotnei pakāpe ir draugu skaits konkrētās virsotnes modelētajam cilvēkam.

Definīcija. Grafu sauc par **saistītu**, ja starp jebkurām divām virsotnēm eksistē šķautņu ceļš.

Citiem vārdiem sakot, grafs ir saistīts, ja no jebkuras virsotnes uz jebkuru citu var aiziet pa grafa šķautnēm – šīs šķautnes, pa kurām tika iets, kopā veido ceļu. Citā veidā šo mēdz uztvert tā, ka grafs ir saistīts, ja tajā nav divu vai vairāku daļu (komponenšu), kuras ir viena no otras atdalītas jeb starp kuru virsotnēm nav nevienas šķautnes.



1.zīm. Nesaistīta un saistīta grafa piemērs.

Lemma. Aplūkosim patvaļīgu grafu (V, E). Izpildās sakarība

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|,$$

kur $|E|$ ir kopējais šķautņu skaits grafā.

Pierādījums. Aplūkosim šķautni, kas, piemēram, ir novilkta starp virsotnēm v_1 un v_2. Tā tiks ieskaitīta divas reizes – vienu reizi pie $\deg v_1$ un vienu reizi pie $\deg v_2$. Līdz ar to secinām, ka

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

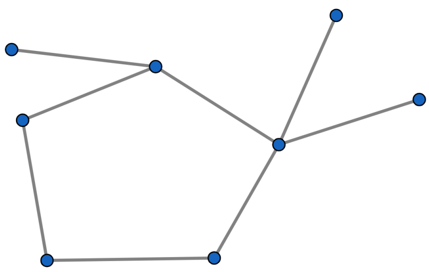
Šī lemma ir noderīga uzdevumos, kuros ir jāpierāda, ka kaut kāds grafs ar noteiktām īpašībām neeksistē.

Lemma. Aplūkosim grafu, kurš satur $n \geq 2$ virsotnes. Tad eksistē divas virsotnes ar vienādām pakāpēm.

Pierādījums. Ievērosim, ka katrai virsotnei v izpildās, ka $0 \leq \deg v \leq n-1$. Tas nozīmē, ka virsotnes pakāpe pieņem vienu no n iespējamām vērtībām. Tādā gadījumā, ja neeksistē divas virsotnes ar vienādu pakāpi, tad tā kā ir n virsotnes, tad visas iespējamās pakāpju vērtības tiek pieņemtas. Tas nozīmē, ka ir virsotne ar pakāpi $n-1$ un virsotne ar pakāpi 0. Citiem vārdiem sakot, eksistē virsotne, kas ir savienota ar visām pārējām virsotnēm, un ir virsotne, kas nav savienota ne ar vienu virsotni. Tā ir acīmredzama pretruna.

Definīcija. Par **ciklu** grafā sauc šķautņu ceļu, kurš sākas un beidzas vienā un tajā pašā virsotnē un kurā neatkārtojas neviena šķautne un neviena virsotne, izņemot sākuma un beigu virsotni.

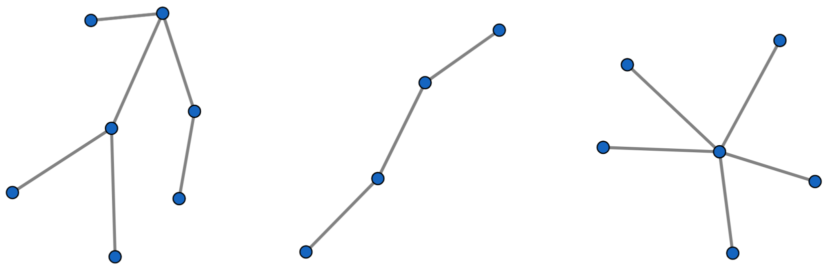
Vērts ievērot, ka īsākais iespējamais cikla garums vienkāršā grafā ir 3 virsotnes, kas veido trijstūri – mazāk virsotņu acīmredzami nevar būt, jo tad kādai šķautnei būtu jāatkārtojas. Garākais iespējamais cikla garums ir n virsotnes, jo pie lielāka skaita atkārtotos kāda virsotne ciklā pa vidu.



2.zīm. Grafs, kurā ir cikls ar garumu 5.

Definīcija. Par **koku** sauc grafu, kurš ir saistīts un kurš nesatur nevienu ciklu.

Šādu nosaukumu šis grafu veids ir ieguvis, jo to struktūra atgādina kokus. Grafu uzdevumos citreiz ir vai nu netiešā veidā dots, ka grafā neeksistē cikli, vai arī ir atsevišķi jāaplūko gadījums, kad grafā nav ciklu, jo mainās risinājuma spriedumi. Koki ir īpaši ar to, ka tiem ir gan ļoti specifiskas īpašības, gan ļoti daudz pielietojumu datorzinātnē.



3.zīm. Daži koku piemēri.

Lemma par kokiem. Minētie grafa raksturojumi ir ekvivalenti (ja izpildās viens, tad izpildās arī pārējie).

1. Grafs G ir koks.
2. Grafs G ir saistīts, un, ja izdzēš jebkuru grafa G šķautni, tad iegūtais grafs nav saistīts.
3. Grafs G nesatur nevienu ciklu, un, ja pievieno grafam G jebkuru vēl nenovilktu šķautni, iegūtais grafs saturēs ciklu.

Pierādījums. Pierādīsim, ka no 1. izriet 2. Pieņemsim, ka grafs G ir koks, tad tas ir saistīts un nesatur ciklu. Izdzēšam šķautni starp virsotnēm v_1 un v_2. Ja iegūtais grafs būtu saistīts, tad eksistē ceļš C starp virsotnēm v_1 un v_2. Tādā gadījumā sākotnējā grafā eksistē ceļš, kurš ir C un šķautnes starp v_1 un v_2 apvienojums. Acīmredzami, ka tas ir cikls – pretruna ar to, ka G ir koks. Līdz ar to jauniegūtais grafs nav saistīts.

Pierādīsim, ka no 2. izriet 1. Aplūkosim grafu G ar īpašību, ka, izdzēšot jebkuru šķautni, iegūtais grafs ir nesaistīts. Mūsu mērķis ir pierādīt, ka sākotnējais grafs ir koks. Pieņemsim pretējo, tad grafs G satur ciklu C. Izdzēšot šķautni starp virsotnēm v_1 un v_2, kuras ir ciklā C, iegūtais grafs būs joprojām saistīts, jo no virsotnes v_1 uz v_2 varēs nonākt, ejot caur ciklu C pretējā virzienā, kā arī visi pārējie ceļi starp virsotnēm, kur tika izmantota daļa no cikla C, joprojām nebūs pārtraukti, izvēloties garāko ceļu starp v_1 uz v_2.

Pierādīsim, ka no 1. izriet 3. Pieņemsim, ka mēs pievienojam šķautni starp virsotnēm v_1 un v_2, kuras nav savienotas ar šķautni – tādas eksistēs, jo pretējā gadījumā acīmredzami grafā ir cikls. Tā kā grafs ir saistīts, tad eksistē ceļš C starp virsotnēm v_1 un v_2. Tādā gadījumā šī ceļa apvienojums ar šķautni starp virsotnēm v_1 un v_2 dod ciklu, kas arī jāpierāda.

Pierādīsim, ka no 3. izriet 1. Pieņemsim, ka grafs G nav saistīts. Tad grafam ir 2 nesaistītas komponentes. Pievienojot šķautni, kas saista šīs divas komponentes, iegūtais grafs joprojām nesaturēs ciklu, jo šī ceļa pievienošana nevar radīt ciklus, kas pilnīgi atrodas kādā no komponentēm, bet, ja būtu cikls, kas iet caur abām komponentēm, tad eksistētu vismaz divas šķautnes, kas saista abas komponentes, tātad tās jau pirms tam bija savienotas – pretruna. Līdz ar to sākotnējais grafs ir saistīts un nesatur nevienu ciklu, līdz ar to koks.

No 2. izriet 3., jo no 2. izriet 1. un no 1. izriet 3. Līdzīgi no 3. izriet 2., jo no 3. izriet 1. un no 1. izriet 2.

Šī lemma ir ļoti noderīga, jo, piemēram, ja mums ir dots grafs, kuru var aprakstīt ar īpašību 3., tad mēs zinām, ka tas ir koks un to, ka tam piemīt arī īpašība 2.

Lemma par lapu. Aplūkosim koku, kurš satur vismaz 2 virsotnes. Tad eksistē virsotne v ar īpašību, ka $\deg v = 1$. Šo virsotni sauc par **lapu**.

Pierādījums. Aplūkosim garāko ceļu dotajā kokā, kas iet caur kaut kādām virsotnēm $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Ja $\deg v_1 \neq 1$, tad virsotne v_1 ir savienota ar vēl kādu virsotni, izņemot v_2. Tā nevar būt savienota ar kādu virsotni v_i, kur $i = 1, 2 \ldots, k$, jo pretējā gadījumā eksistētu garāks ceļš, kas iet caur virsotnēm $v_i, v_1, \ldots, v_k$. Tas nozīmē, ka tā ir savienota ar kādu virsotni v_i, kur $3 \leq i \leq k$, bet tādā gadījumā mums ir cikls $v_1, \ldots, v_i, v_1$ – pretruna ar to, ka grafs ir koks. Līdz ar to secinām, ka $\deg v_1 = 1$. Līdzīgi varam pierādīt, ka $\deg v_k = 1$, kas nozīmē, ka kokā īstenībā ir vismaz 2 lapas.

Teorēma. Kokā ar $n \geq 2$ virsotnēm ir tieši $n - 1$ šķautnes.

Pierādījums. Prasīto pierādīsim ar indukciju pa n, kas ir virsotņu skaits. Acīmredzami, ka, ja mums ir 2 virsotnes, tad tām jābūt savienotām, līdz ar to šķautņu skaits ir 1. Pieņemsim, ka kokā ar k virsotnēm ir $k - 1$ šķautnes. Tad pierādīsim, ka kokā ar $k + 1$ virsotnēm ir k šķautnes. Aplūkosim koku ar $k + 1$ virsotnēm. No lemmas par lapu eksistē virsotne v ar īpašību, ka $\deg v = 1$. Tādā gadījumā, izdzēšot virsotni v un no tās izejošo vienīgo šķautni, iegūtais grafs acīmredzami būs saistīts un bez cikliem, tātad koks ar k virsotnēm, kur pēc induktīvā pieņēmuma ir $k - 1$ šķautnes. Līdz ar to sākotnējā grafā kopā ir tieši $k - 1 + 1 = k$ šķautnes, kas arī bija jāpierāda.

2.1 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs Vai plaknē ir iespējams uzzīmēt 9 taisnes tā, lai katra taisne krusto tieši trīs citas taisnes?

Atrisinājums. Formulēsim uzdevumu grafu teorijas valodā. Ar virsotnēm $v_1, v_2, \ldots, v_9$ apzīmēsim dotās 9 taisnes. Šķautni starp virsotnēm v_i un v_j vilksim tad un tikai, tad, ja i-tā taisne krusto j-to taisni. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $\deg v_i = 3$ visiem $1 \leq i \leq 9$. Taču tādā gadījumā

$$2|E| = 3 \cdot 9 = 27,$$

kas ir pretruna, jo skaitlis 27 ar 2 nedalās. Secinām, ka uzzīmēt taisnes prasītā veidā nevarēs.

Komentārs. Šo ideju, ka virsotņu pakāpju summu izsaka divos dažādos veidos, kuri ir pretrunīgi, literatūrā sauc par **divkāršo skaitīšanu** (*double counting*). To bieži pielieto grafu uzdevumos minētajā veidā, lai iegūtu pretrunu starp nosacījumiem un parādītu, ka ir aplūkota neiespējama situācija.

2.piemērs Karaļvalstī no katras pilsētas iziet 100 ceļi uz citām pilsētām, piedevām no katras pilsētas var aizceļot uz jebkuru citu pilsētu, braucot pa dotajiem ceļiem. Karalis Ilmārs nolēma veikt ceļu pārbūves darbus, kā rezultātā viens no ceļiem tika slēgts. Pierādīt, ka eksistē pilsēta, no kuras joprojām var aizbraukt uz jebkuru citu pilsētu.

Atrisinājums. Aplūkosim grafu, kurā pilsētas ir virsotnes un ceļi ir šķautnes. Pieņemsim pretējo, ka pilsēta ar prasīto īpašību neeksistē. Tad pēc ceļa slēgšanas dotajam grafam ir vismaz 2 nesaistītas komponentes, kuras apzīmēsim ar A un B. Ievērosim, ka slēgtais ceļš savienoja komponentes A un B savā starpā, pretējā gadījumā neizpildītos nosacījums, ka sākotnēji no jebkuras pilsētas varēja aizbraukt uz jebkuru. Komponente A ir sākotnējā grafa apakšgrafs, ar īpašību, ka visām virsotnēm v ir spēkā, ka $\deg v = 100$, izņemot vienu virsotni $v^\star$, kurai izpildās $\deg v^\star = 99$. Tādā gadījumā

$$2|E| = 100 \cdot ((|A| - 1) + 99,$$

taču tā ir pretruna, jo vienādojuma kreisā puse ir pāra skaitlis, bet labā puse ir nepāra skaitlis. Tātad pēc ceļa slēgšanas grafs joprojām saglabājas saistīts, kurā prasītais attiecīgi izpildās.

3.piemērs Rīgas Valsts 1.ģimnāzijas *Biozauru* klubu apmeklē 102 puiši. Katrs puisis ir pazīstams ar vismaz 68 citiem puišiem. Pierādīt, ka eksistē četri puiši ar vienādu paziņu skaitu. Pazīšanās ir abpusējas.

Atrisinājums. Aplūkosim grafu, kurā puiši tiek apzīmēti ar virsotnēm un šķautne starp virsotnēm tiek novilkta tad un tikai tad, ja dotie puiši ir pazīstami. Ievērosim, ka katrai virsotnei v izpildās $68 \leq \deg v \leq 101$. Tas nozīmē, ka virsotnes pakāpe var var pieņemt 34 dažādas vērtības. Pieņemsim pretējo, ka neeksistē 4 puiši ar vienādu paziņu skaitu, kas nozīmē, ka neeksistē 4 virsotnes, kurām ir vienādas pakāpes. Tā kā virsotņu skaits ir 102, bet to iespējamo vērtību skaits ir 34, tad katrai pieļaujamai pakāpes vērtībai var atrast tieši 3 virsotnes, kurām ir šāda pakāpe. Tādā gadījumā

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg v = 3 \cdot (68 + 69 + \ldots + 101) = 3 \cdot \left(\frac{101 \cdot 100}{2} - \frac{67 \cdot 66}{2}\right),$$

taču tā ir pretruna, jo pēdējās sakarības kreisā puse ir pāra skaitlis, bet labā puse ir nepāra skaitlis.

4.piemērs Dots saistīts grafs G. Pierādīt, ka eksistē virsotne v ar īpašību, ka, izdzēšot to un visas no tā izejošās šķautnes, iegūtais grafs būs joprojām saistīts.

Atrisinājums. Ja grafā eksistē virsotne v ar īpašību, ka $\deg v = 1$, tad, izdzēšot to, iegūtais grafs acīmredzami būs saistīts. Pretējā gadījumā katras virsotnes pakāpe ir vismaz 2. Pieņemsim, ka grafā ir n virsotnes. Tādā gadījumā

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg v \geq 2 \cdot n \implies |E| \geq n$$

Ievērosim, ka kokā ar n virsotnēm ir tieši $n-1$ šķautne un no lemmas par kokiem izriet, ka grafā ar vairāk šķautnēm noteikti atradīsies cikls. Tādā gadījumā aplūkosim ciklu C. Izdzēšot patvaļīgu cikla šķautni starp virsotnēm v_1 un v_2, iegūtais grafs būs joprojām saistīts, jo, ja ir vajadzība nokļūt no virsotnes v_1 uz v_2 vai otrādāk, mēs to varam izdarīt, ejot pa ciklu pretējā virzienā, kā arī pārējie ceļi starp virsotnēm, kas izmantoja daļu no aplūkotā cikla, joprojām ir saistīti, izvēloties jauno ceļu starp v_1 un v_2.

5.piemērs Dots grafs, kurā katras virsotnes pakāpe ir vismaz k. Pierādīt, ka šajā grafā eksistē cikls ar garumu vismaz $k+1$.

Atrisinājums. Aplūkosim garāko ceļu šajā grafā. Vispirms pierādīsim, ka tas satur vismaz $k+1$ virsotni. Pieņemsim pretējo, ka tas satur ne vairāk kā k virsotnes. Aplūkosim pēdējo ceļa virsotni – tā nedrīkst būt savienota ar virsotnēm, kas nav ceļā, jo pretējā gadījumā mēs iegūtu garāku ceļu. Līdz ar to tā ir savienota tikai ar ceļa virsotnēm, kas ir atšķirīgas no tās, bet to ir ne vairāk kā $k-1$. Bet tas ir pretrunā ar to, ka virsotnes pakāpe ir vismaz k.

Tātad garākais ceļš satur vismaz $k+1$ virsotni. Aplūkosim virsotni, kas ir šī ceļa galā. Tā drīkst būt savienota tikai ar virsotnēm, kas ir ceļā. Apzīmēsim šo virsotni ar v un tieši pirms tās ejošās virsotnes ceļā ar $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Tā kā $\deg v \geq k$, tad eksistē šķautne starp virsotni v un virsotni v_i, kur $i \geq k$ (virsotne v_k vai vēl tālāk). Tādā gadījumā cikla $v, v_1, v_2, \ldots, v_i$ garums ir vismaz $k+1$, kas arī bija jāpierāda.

3 Eilera un Hamiltona cikli

Definīcija. Par **Eilera ceļu** grafā sauc šķautņu maršrutu, kurā katra grafa šķautne tiek apmeklēta vienu reizi. Par **Eilera ciklu** sauc Eilera ceļu, kurš sākas un beidzas vienā un tajā pašā virsotnē.

Tātad Eilera ceļa/cikla gadījumā mūs interesē, vai ir iespējams secīgi iziet pa visām grafa šķautnēm. Visbiežāk to izmanto grūtos kombinatorikas uzdevumos, kur ir gudrā veidā iespējams nodefinēt grafu, lai būtu nepieciešams secīgi izmantot katru sakarību, ko modelē šķautnes.

Lemma. Saistītā grafā eksistē Eilera cikls tad un tikai tad, ja katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis.

Pierādījums. Vispirms pierādīsim, ka, ja grafā eksistē Eilera cikls, tad katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis. Uzsākam iet pa Eilera ciklu no patvaļīgas virsotnes v_1. Katrā virsotnē, ko mēs apmeklējam, mēs ieejam pa vienu no šķautnēm un izejam pa citu, piedevām katrā virsotnes apmeklēšanas reizē mēs ejam pa 2 pirms tam neapmeklētām šķautnēm. Tātad katras virsotnes pakāpe ir 2 reizes lielāka par tās apmeklējumu skaitu - pāra skaitlis. Vienīgais izņēmums ir sākotnējā virsotne, taču apvienojot pirmo noieto šķautni Eilera ciklā ar pēdējo, arī v_1 pakāpe acīmredzami būs pāra skaitlis.

Pierādīsim, ja savienotā grafā katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis, tad tajā eksistē Eilera cikls. Izmantosim matemātisko indukciju – bāzes gadījumā ar 3 virsotnēm acīmredzami veidojas trijstūris, kas ir Eilera cikls. Pieņemsim, ka visiem grafiem ar $i \leq k$ virsotnēm, kur visām virsotnēm ir pāra pakāpe, eksistē Eilera cikls. Aplūkojam grafu ar $k+1$ virsotnēm, kur visām virsotnēm ir pāra pakāpe. Sākam iet patvaļīgā virsotnē v_1 uz citām virsotnēm, šķautnes izmantojot vienu reizi, līdz kādā brīdī atgriežamies v_1. Tā noteikti būs, jo katrā citā virsotnē, kurā mēs ieejam, noteikti būs arī šķautne, pa kuru iziet – tas tādēļ, ka ikvienā reizē, kad apmeklējam virsotni, mēs tās pieejamo šķautņu skaitu samazinām par 2, tātad tas saglabājas pāra skaitlis. Iešana kādā brīdī arī noteikti nonāks atpakaļ v_1, jo grafā ir galīgs šķautņu.

Izdzēšam no grafa visas šķautnes, kas bija ietajā ceļā. Paliek grafs, kurā joprojām katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis. Ja tas joprojām ir saistīts, tad veicam šo darbību atkal, tikai jau grafā ar mazāk šķautnēm. Vienā brīdī grafs kļūs nesaistīts, jo procesa gaitā šķautņu skaits var kļūt mazāks var $n-1$. Tad no induktīvā pieņēmuma varam secināt, ka ikvienā iegūtajā grafa komponentē eksistē Eilera cikls. Tā kā sākotnēji grafs bija saistīts, katrai no komponentēm eksistē virsotne, kura bija kādā no izdzēstajiem ceļiem. Pievienojot šos komponenšu Eilera ciklus izdzēstajam ceļam brīžos, kad tiek iets caur kādu no komponentes virsotnēm, mēs iegūsim Eilera ciklu visam sākotnējam grafam.

Līdz ar to abi uzdevumā izteiktā apgalvojuma virzieni ir pierādīti.

Secinājums. Var arī pierādīt, ka saistītā grafā eksistē Eilera ceļš tad, ja grafā ir tieši divas virsotnes, kuru pakāpe ir nepāra skaitlis. Ja savieno šīs divas virsotnes ar jaunu šķautni, tad var pielietot augstāk veiktos secinājumus.

Definīcija. Par **Hamiltona ceļu** grafā sauc ceļu, kurā katra grafa virsotne tiek apmeklēta vienu reizi. Par **Hamiltona ciklu** sauc Hamiltona ceļu, kurš sākas un beidzas vienā un tajā pašā virsotnē.

Hamiltona ceļš/cikls un ar to saistītās idejas ir svarīgas, ja uzdevumā aplūkojam lielāko ciklu/garāko ceļu. Diemžēl Hamiltona cikla eksistencei grafā nav tik uzskatāmu kritēriju kā Eilera cikla gadījumā. Literatūrā eksistē vairāki mēģinājumi izveidot vispārīgu kritēriju, tomēr tie olimpiāžu uzdevumos reti kad ir pielietojami, tādēļ visbiežāk Hamiltona cikla eksistenci pierāda no pretējā.

3.1 Uzdevumu risināšanas piemēri

1.piemērs Dots nepāra naturāls skaitlis $n \geq 3$ un kāršu kava ar $\frac{n(n-1)}{2}$ kārtīm, kur kārtis ir sanumurētas ar skaitļiem $1, 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}$. Divas kārtis sauksim par *maģisku pāri*, ja to numuri ir secīgi naturāli skaitļi vai arī tie ir 1 un $\frac{n(n-1)}{2}$. Pierādīt, ka dotās kārtis var sadalīt n kaudzēs tā, ka jebkuru divu kaudžu kāršu apvienojumā var atrast tieši vienu maģisku pāri.

Atrisinājums. Aplūkojam n virsotņu grafu, kurā starp katrām divām virsotnēm ir novilkta šķautne – šajā grafā ir $\frac{n(n-1)}{2}$ šķautnes. Tā kā n ir nepāra skaitlis, tad katras virsotnes pakāpe $n-1$ ir pāra skaitlis. Tātad šajā grafā eksistē Eilera cikls. Aplūkojam to, un apzīmējam apmeklēto virsotņu secību tajā ar $v_1, v_2, \ldots, v_{\frac{n(n-1)}{2}}, v_1$, kur katram apzīmējumam atbilst kāda no grafa n virsotnēm, līdz ar to katrai grafa virsotnei atbilst vairāki apzīmējumi. Liekam kārti ar numuru i tajā kaudzē, kurai atbilst virsotne v_i. Tādā gadījumā maģiskie pāri atbilst šķautnēm grafā, pie tam katrs no tiem atbilst unikālai šķautnei, to secinot Eilera cikla īpašību dēļ. No sākotnējās grafa definīcijas izriet, ka starp jebkurām divām virsotnēm ir tieši viena šķautne, tādēļ prasītais ir sasniegts.

Komentārs. Šo uzdevumu varētu arī risināt algoritmiski, uzdodot precīzu skaitļu sadalījumu pa kaudzēm un pierādot, ka izpildās prasītās īpašības, tomēr šeit uzdevuma translācija grafu valodā ļauj izmantot grafu īpašības (šajā gadījumā – Eilera cikla īpašības), lai ātri iegūtu risinājumu.

2.piemērs Grafā G ir n virsotnes, kā arī zināms, ka ikvienas virsotnes pakāpe ir vismaz $\frac{n}{2}$. Pierādīt, ka G eksistē Hamiltona cikls.

Atrisinājums. Vispirms pierādīsim, ka G ir savienots grafs. Pieņemsim, ka tā nav, tad aplūkojam mazāko grafa savienoto komponenti C. Tā kā ir vismaz 2 komponentes, tad C nav vairāk par $\frac{n}{2}$ virsotnēm. Tādā gadījumā katra virsotne C var būt savienota ar ne vairāk kā $\frac{n}{2} - 1 < \frac{n}{2}$ virsotnēm, kas ir pretrunā ar nosacījumu. Tātad G ir savienots.

Aplūkojam garāko ceļu G, kurš satur virsotnes $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Ja v_1 vai v_k ir savienota ar kādu virsotni u, kas nepieder garākajam ceļam, tad ceļu var pagarināt, pievienojot u tā galā - pretruna ar maksimalitāti. Pierādīsim, ka eksistē virsotne v_i (ar $1 \leq i \leq k-1$), ka šķautnes $v_1 v_{i+1}$ un $v_i v_k$ ir novilktas G. Pieņemsim, ka tas tā nav. Tādā gadījumā katram i izpildās, ka ir novilkta ne vairāk kā viena no šķautnēm $v_1 v_{i+1}$ un $v_i v_k$, tātad kopā no v_1 un v_k iziet ne vairāk kā $k-1$ šķautnes, jo šīs virsotnes nav savienotas ar citām virsotnēm, kas nepieder garākajam ceļam. Līdz ar to v_1 vai v_k pakāpe ir ne lielāka par $\frac{k-1}{2} \leq \frac{n}{2}$. Ja izpildās vienādība, tad n ir nepāra un pēc nosacījumiem katras virsotnes pakāpei ir jābūt vismaz $\frac{n+1}{2}$ - pretruna; ja n ir pāra, tad acīmredzama pretruna ar nosacījumiem. Tātad minēto virsotni un šķautņu pāri var atrast, kas veidos ciklu

$$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_i \to v_k \to v_{k-1} \to \ldots \to v_{i+1} \to v_1.$$

Pierādīsim, ka minētais cikls satur visas grafa virsotnes. Pieņemsim, ka eksistē viena vai vairākas virsotnes, kas nepieder minētajam ciklam. Tā kā G ir savienots, tad varam atrast virsotni u, kura ir savienota ar kādu v_i. Tādā gadījumā eksistē ceļš ar garumu $k+1$, kurš sākas u un tālāk iet pa minēto ciklu. Tā ir pretruna ar maksimalitāti aplūkotajam garākajam ceļam, tādēļ šādas ārpus cikla virsotnes neeksistē. Tātad iegūtais cikls satur visas G virsotnes, kas nozīmē, ka tas ir Hamiltona cikls.

3.piemērs Kādā valstī ir 100 lidostas. *Super-Air* kompānija nodrošina tiešos reisus abos virzienos starp dažiem lidostu pāriem. Par lidostas *nozīmību* sauksim lidostu skaitu, uz kurām var aizlidot ar tiešo *Super-Air* reisu no aplūkotās lidostas. Jauna kompānija *Concur-Air* nolēma ienākt tirgū un izveidot tiešos reisus starp tiem lidostu pāriem, kuriem abu lidostu nozīmību summa ir vismaz 100. Izrādījās, ka ar tikai *Concur-Air* reisiem ir iespējams apceļot visas lidostas, katru apmeklējot vienu reizi un beigās atgriežoties sākuma lidostā. Pierādīt, ka arī ar tikai *Super-Air* reisiem ir iespējams apceļot visas lidostas, katru apmeklējot vienu reizi un beigās atgriežoties sākuma lidostā.

Atrisinājums. Ar G un G' apzīmēsim grafus, kuri atbilst attiecīgi *Super-Air* un *Concur-Air* reisiem. Tad lidostas nozīmība ir tās pakāpe grafā, kā arī uzdevuma nosacījumi nozīmē, ka G' satur Hamiltona ciklu.

Lemma. Aplūkojam grafu H, kurā ir 100 virsotnes un kurš satur Hamiltona ceļu (ne ciklu), kas sākas virsotnē A un beidzas virsotnē B. Ja A un B pakāpju summa ir vismaz 100, tad H satur Hamiltona ciklu.
Pierādījums. Apzīmējam $N = \deg A$. Tad $\deg B \geq 100 - N$. Sanumurējam virsotnes Hamiltona ceļā: $C_1 = A, C_2, \ldots, C_{100} = B$. Apzīmējam tās N virsotnes, kuras ir savienotas ar A, kā $C_p, C_q, C_r, \ldots$. Aplūkojam N virsotnes, kuras ceļā atrodas pirms minētajām: $C_{p-1}, C_{q-1}, C_{r-1}, \ldots$. Tā pārējās virsotnes, kas nav starp tikko nosauktajām, ir $100 - N$ (ieskaitot B), un $\deg B \geq 100 - N$, tad B ir savienota ar kādu no aplūkotajām virsotnēm – nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka tā ir C_{r-1}. Tādā gadījumā veidojas Hamiltona cikls

$$A = C_1 \to C_2 \to \ldots \to C_{r-1} \to B = C_{100} \to C_{99} \to \ldots \to C_r \to A.$$

Atgriezīsimies pie uzdevuma. Pieņemsim, ka G nesatur Hamiltona ciklu. Aplūkojam divas virsotnes A un B, kuras G nav savienotas, bet grafā G' – ir (ja tādu nav, tad acīmredzami G' ir G apakšgrafs un G eksistē Hamiltona cikls). Tas nozīmē, ka $\deg A + \deg B \geq 100$ grafā G. Pievienojam G šķautni AB. No lemmas ir zināms, ka G pirms tam nepastāvēja Hamiltona ceļš starp A un B (pretējā gadījumā jau eksistētu arī Hamiltona cikls). Līdz ar to pēc AB pievienošanas grafā G nevarēs rasties Hamiltona cikls. Atkārtojot šo operāciju katrām minētajam virsotņu pārim, iegūsim, ka grafā G būs savienoti visi virsotņu pāri, kas ir savienoti G', taču grafā G joprojām nebūs Hamiltona cikla. Tā ir acīmredzama pretruna, jo grafā G būs visas tās šķautnes, kas G' veido Hamiltona ciklu. Tātad pieņēmums ir aplams, un G satur Hamiltona ciklu, kas ir uzdevumā prasītais.

4 Dažu ideju piemēri

1.piemērs Pilnajā Vienvirziena zemē katra pilsēta ir savienota ar katru citu ar vienu vienvirziena ceļu. Pierādīt, ka, ja šajā zemē ir vismaz 3 pilsētas, tad ir iespējams nomainīt maksimums viena ceļa virzienu tā, ka pēc tam būs iespējams no katras pilsētas nonākt jebkurā citā.

Atrisinājums. Translējam uzdevumu grafu valodā, kur pilsētas ir virsotnes, bet vienvirziena ceļi ir orientētas šķautnes, kas kā bultiņas no vienas virsotnes iziet un ieiet otrā virsotnē. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu. Bāzes gadījums, kad ir 3 virsotnes, ir acīmredzams. Pieņemsim, ka prasītais izpildās pilnam orientētam grafam ar $k \geq 3$ virsotnēm (pilns grafs - kurā novilktas visas iespējamās šķautnes). Pierādīsim, ka tas izpildās arī pilnam orientētam grafam ar $k + 1$ virsotnēm.

Ievērosim, ka pilnā orientētā grafā nevar būt vairāk par vienu virsotni, kurai visas šķautnes ir izejošas (ja tādas virsotnes būtu divas, tad aplūko tās savienojošo šķautni un iegūst pretrunu), kā arī ne vairāk kā viena virsotne, kurai visas šķautnes ir ieejošas. Tā kā aplūkotajā $k + 1$ virsotņu grafā ir vismaz 4 virsotnes, tad var atrast virsotni v, kurai ir gan ieejoša šķautne no kādas citas virsotnes v_{in}, gan izejoša šķautne uz kādu citu virsotni v_{out}.

Paslēpjam v un visas ar to saistītās šķautnes, rezultātā paliek k virsotņu pilns orientēts grafs. Tas izpilda visus induktīvā pieņēmuma nosacījumus, tādēļ varam to pielietot, lai ar maksimums vienas šķautnes virziena maiņu panāktu, ka no katras pilsētas var nonākt jebkurā citā. Padarām paslēpto virsotni v atkal redzamu ar visām tās šķautnēm. Ievērosim, ka no v var nonākt v_{out}, no kuras pēc induktīvā pieņēmuma iegūtā var nonākt jebkurā citā grafa virsotnē, kas nav v. Papildus tam no jebkuras grafa virsotnes, kas nav v, var nonākt v_{in}, no kuras var nonākt tālāk v. Tātad šajā grafā var no jebkuras virsotnes sasniegt jebkuru citu, kas pierāda prasīto.

Komentārs. Šajā uzdevumā ilustrētas divas idejas – pirmkārt, kā uzdevumos var izmantot orientētus grafus. Orientētiem grafiem īpašības un lietojumi ir samērā līdzīgi neorientētiem grafiem, ko aplūkojām iepriekš, taču ar šiem grafiem var attēlot attiecības, kurām ir svarīgs virziens/secība. Piemēram, ja salīdzina objektus savā starpā kā uzvarētājs/zaudētājs, lielāks/mazāks utml.

Otra svarīgā ideja ir indukcijas nozīmība. Šis nav pirmais piemērs materiālā, kura pierādījumā tiek izmantota matemātiskā indukcija. Grafu uzdevumus bieži var risināt ar indukciju, jo tajos var ērti samazināt virsotņu skaitu, iegūt mazākas komponentes utt., kā arī bieži ir pietiekami paanalizēt tikai kādu īpašu virsotni un iegūt secinājumu. Taču jāatceras indukcijas materiālā aplūkotās detaļas par indukcijas lietošanu grafu uzdevumos – parasti lietotā shēma ir patvaļīgu lielāku grafu pārveidot uz induktīvajam pieņēmumam derīgu mazāku, nevis otrādi.

2.piemērs Kādā valstī ir N aviolīnijas, kas nodrošina tiešos lidojumus starp pilsētām (abos virzienos). Katra aviolīnija no katras pilsētas nodrošina tieši vienu lidojumu, pie tam tā, ka no jebkuras pilsētas var aizlidot uz jebkuru citu, izmantojot vienas vai vairāku aviolīniju pakalpojumus. Ja sliktu laikapstākļu dēļ tiek atcelti $N - 1$ lidojumi (abos virzienos), katrs no citas aviolīnijas, pierādīt, ka, joprojām no jebkuras pilsētas var ar vienu vai vairākiem lidojumiem aizlidot uz jebkuru citu pilsētu.

Atrisinājums. Ar G apzīmēsim attiecīgo grafu, kur pilsētas ir virsotnes un neorientētas šķautnes ir aviolīniju lidojumi starp pilsētām. Ar G' apzīmēsim grafu, kurā ir izdzēstas $N - 1$ šķautnes, kas atbilst atceltajiem lidojumiem. Pastāvēs viena aviolīnija, kuras lidojumi netika atcelti – apzīmējam to ar C, bet pārējās ar $C_1, C_2, \ldots, C_{N-1}$. Ar G_k apzīmēsim grafu, ko veido C un C_k piedāvāto lidojumu apvienojums. Tādā gadījumā G_k katras virsotnes pakāpe ir 2, jo no tās iziet viens C lidojums un viens C_k lidojums.

Viegli redzams, ka G_k sastāv no viena vai vairākiem nesaistītiem cikliem, jo katras virsotnes pakāpe ir 2. To var viegli pierādīt, sākot iet no kādas virsotnes. Katrai nākamajai virsotnei, kurā ejot nonāk pa vienu šķautni, būs iespējams no tās iziet pa otru šķautni. Tā kā šķautņu skaits ir galīgs, kādā brīdī būs jāatgriežas jau apmeklētā virsotnē, taču visām pārējām saistītajām virsotnēm abas šķautnes jau būs izietas, tādēļ ceļš atgriezīsies sākuma virsotnē, veidojot ciklu.

Tātad G_k sastāvēs no viena vai vairākiem cikliem. Pieņemsim, ka atceltais aviolīnijas C_k reiss ir e, kurš ir kādā no minētajiem cikliem. Tad e būs vienīgā šķautne, kas nebūs novilkta grafā G'. Ievērosim arī, ka visas virsotnes, kas bija ciklā ar e, pēc tās izdzēšanas joprojām paliek saistītas. Tādēļ grafā G' jebkurš ceļš, kurš savā ceļā izmantoja šķautni e, joprojām paliek saistīts, jo var iet pa neskarto cikla daļu. Šo secinājumu varam pielietot jebkuram grafam G_k, tādēļ jebkurš ceļš grafā G' joprojām saglabāsies saistīts, kas pierāda, ka jebkura pilsēta būs saistīta ar jebkuru citu arī pēc šķautņu dzēšanas.

Komentārs. Šis uzdevums ir samērā grūts piemērs, tomēr tas ilustrē plaši izmantotu ideju grafu uzdevumos – papildu dīvaini nosacījumi par virsotņu savienojamību, pakāpēm utml. bieži vien nozīmē, ka uzdevuma nosacījumi izpildās tikai grafiem ar specifisku struktūru. Piemēram, šajā uzdevumā var iegūt, ka sākotnējais grafs būtībā ir daudzu ciklu apvienojums. Tādēļ vienmēr ir vērts paanalizēt, ja uzdevumā ir doti kādi specifiski ierobežojumi virsotnēm vai šķautnēm, un kad tie vispār var izpildīties.

3.piemērs Labirinta pilsētā katrā ceļu krustojumā satiekas tieši 3 ielas (šajos krustojumos atrodas ielu sākumi un beigas, t.i., nav tādu ielu, kas ietu cauri kādam krustojumam un turpinātos tālāk). Katra iela ir nokrāsota vienā no trim krāsām, pie tam katrā krustojumā satiekas trīs dažādu krāsu ielas. Pilsētā arī ir trīs ielas, kuras iziet ārā no Labirinta pilsētas un bezgalīgi turpinās tālajos valsts plašumos. Pierādīt, ka šīs trīs no pilsētas izejošās ielas ir visas atšķirīgās krāsās.

Atrisinājums. Apzīmēsim krustojumus kā grafa virsotnes un ielas kā šķautnes, pie tam katra šķautne ir nokrāsota vienā no 3 krāsām. Papildus tam pieņemsim, ka plašumi ir vēl viens krustojums, kurā satiekas 3 no pilsētas izejošās ielas. Ja pilsētas iekšienē ir n krustojumi, tad izveidojas grafs ar $n + 1$ virsotnēm, kur no katras iziet 3 šķautnes. Apzīmējot šķautņu skaitu grafā ar E, izpildās sakarība

$$2E = 3(n + 1).$$

No tās var secināt, ka $n + 1$ jābūt pāra skaitlim, tātad n ir nepāra. Pieņemsim, ka īpašajā plašumu krustojumā ieiet c_1 pirmās krāsas šķautnes, c_2 otrās krāsas šķautnes un c_3 trešās krāsas šķautnes. Zināms, ka $c_1 + c_2 + c_3 = 3$.

Aplūkojam šķautnes, kuras ir pirmajā krāsā. Kopā šīm šķautnēm ir $n+c_1$ galu, kas ieiet krustojumos (viens katrā no n pilsētas krustojumiem un c_1 plašumu krustojumā). Tā kā galu skaits ir 2 reizes lielāks nekā šķautņu skaits, tad $n + c_1$ jābūt pāra skaitlim. Ņemot vērā, ka n ir nepāra, tad c_1 arī ir nepāra un $c_1 \geq 1$. Līdzīgu secinājumu var veikt arī par $c_2 \geq 1$ un $c_3 \geq 1$. Tātad $c_1 + c_2 + c_3 \geq 3$. Ņemot vērā iepriekšējo, ir jāizpildās vienādībai, tātad $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, kas nozīmē, ka visas no pilsētas izejošās šķautnes ir katra savā krāsā.

4.piemērs Atrast lielāko naturālo skaitli k, kuram eksistē vienkāršs 2023 virsotņu grafs G, kam vienlaicīgi izpildās minētās trīs īpašības:

1. G nesatur ciklus ar garumu 3;
2. katram naturālam i, kur $1 \leq i \leq k$, eksistē vismaz viena G virsotne, kuras pakāpe ir i;
3. visām G virsotnēm pakāpe nav lielāka par k.

Atrisinājums. Atbilde ir $k = 1348$.

Aplūkojam virsotni, kuras pakāpe ir k. Tās kaimiņu virsotnēm maksimālā pakāpe ir $n-k$, jo nekādas divas no šīm k virsotnēm savā starpā nevar būt savienotas, citādi grafā veidotos cikls ar garumu 3. Tas nozīmē, ka šīs k virsotnes var maksimāli būt ar $n-k$ dažādām pakāpēm.

Aplūkojam atlikušās $n-k-1$ virsotnes. Tās var radīt ne vairāk kā $n-k-1$ dažādas virsotņu pakāpes. Tā kā grafā ir jābūt k dažādām virsotņu pakāpēm, tad jāizpildās nevienādībai

$$1 + (n-k) + (n-k-1) \geq k,$$

pretējā gadījumā uzdevuma nosacījumi neizpildītos. Pārveidojot nevienādību, iegūst $2n \geq 3k \implies \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor \geq k$. Tātad $k \leq \left\lfloor \frac{2 \cdot 2023}{3} \right\rfloor = 1348$.

Atliek atrast grafu, kuram $k = 1348$ un izpildās visas minētās īpašības. Apzīmējam $t = 674$, tad $3t + 1 = 2023$. Mēs vēlamies konstruēt tādu grafu, kurā ir virsotnes ar pakāpēm $1, 2, \ldots, 2t$. Sadalām virsotnes grupās: $A_1, A_2, \ldots, A_{2t}$, tad arī $B_1, B_2, \ldots, B_t$, kā arī viena virsotne X. Savienojam X ar visām virsotnēm $A_1, A_2, \ldots, A_{2t}$. Tādā gadījumā X pakāpe ir $2t$.

Tālāk savienojam katru A_i, kur $2 \leq i \leq t$, ar virsotnēm $B_1, B_2, \ldots, B_{i-1}$. Tagad virsotnēm $A_1, A_2, \ldots, A_t$ ir attiecīgi pakāpes $1, 2, \ldots, t$ (jo tās ir savienotas arī ar X), bet $B_1, B_2, \ldots, B_t$ attiecīgi ir pakāpes $t-1, t-2, \ldots, 0$. Visbeidzot, savienojam katru B_i ar visām virsotnēm $A_{t+1}, A_{t+2}, \ldots, A_{2t}$. Tad

- $B_1, B_2, \ldots, B_t$ attiecīgi ir pakāpes $2t-1, 2t-2, \ldots, t$;
- $A_{t+1}, A_{t+2}, \ldots, A_{2t}$ visām ir pakāpe $t+1$;
- $A_1, A_2, \ldots, A_t$ ir attiecīgi pakāpes $1, 2, \ldots, t$;
- X ir pakāpe $2t$.

Visas pakāpes ir iegūtas, tās nepārsniedz $2t$, kā arī grafā nav ciklu ar garumu 3, jo visi savienojumi ir starp divām grupām – A_i un $X \cap B_j$. Ja grafā būtu cikls ar garumu 3, tad divām virsotnēm no vienas grupas būtu jābūt savienotām savā starpā, taču konstrukcija nodrošina, lai tā nebūtu. Tātad lielākā iespējamā k vērtība patiešām ir 1348.