

Grafi - 1.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums. Universitātes māja sastāv no daudzām istabām. Katrā istabā, kurā ir nepāra skaits durvju, atrodas dators. Mājai ir tieši vienas ieejas durvis, visas pārējās durvis ir starp istabām. Pierādīt, ka ir iespējams no ārpuses ienākt mājā un aiziet līdz kādam datoram.

Atrisinājums. Pieņemsim pretējo, ka līdz datoram nav iespējams aiziet. Tādā gadījumā visām istabām, kuras var sasniegt no ieejas telpas (kurā ir ieejas durvis), būtu jābūt ar pāra skaitu durvju.

Saskaitīsim kopējo šajās istabās esošo izeju skaitu. No vienas puses, katrā istabā ir pāra skaits durvju, tātad kopējais izeju skaits arī ir pāra skaitlis, ko apzīmēsim $2t$. No otras puses, katras durvis starp istabām rada 2 izejas (vienu katrā no istabām, kas ir savienotas ar konkrētajām durvīm). Vienīgais izņēmums ir ieejas durvis, jo tās rada tikai vienu izeju uz mājas ārpusi. Ja starp istabām esošo durvju skaits ir k , tad, šādi skaitot pa durvīm, kopējais istabu izeju skaits ir $2k + 1$, kas ir nepāra skaitlis. Tādā gadījumā būtu jāizpildās $2t = 2k + 1$, kas ir acīmredzama pretruna. Pieņēmums ir nepatiess, tādēļ prasīto var izdarīt.

2. uzdevums. Kādā valstī ir N pilsētas. Jebkuras 2 pilsētas ir savienotas vai nu ar zemes ceļu, vai ar asfalta ceļu. Kāds tūrists vēlas ceļojumā apmeklēt katru pilsētu vienu reizi un beigās atgriezties sākuma pilsētā. Pierādīt, ka tūrists to var izdarīt, sava maršruta laikā mainot ceļa segumu ne vairāk kā vienu reizi.

Atrisinājums. Pierādīsim prasīto ar matemātiskās indukcijas palīdzību.

Indukcijas bāze. Ja $N = 1$, tad procesa sākumā prasītais ir sasniegts. Ja $N = 2$, tad tūrists izmanto vienīgo ceļu divas reizes. Ja $N = 3$, tad ar gadījumu pārlasi prasītais acīmredzams.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam $n = k - 1$ tūrists var apceļot visas $k - 1$ pilsētas, atgriežoties sākuma pilsētā un mainot ceļa segumu ne vairāk kā vienu reizi.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim to $n = k$. Aplūkojam patvaļīgu pilsētu v , paslēpjam to un visus no tās izejošos ceļus. Atlikušajām $k - 1$ pilsētām acīmredzami izpildās induktīvā pieņēmuma nosacījumi, tātad varam atrast maršrutu $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_1$, kurā segums mainās ne vairāk kā vienu reizi. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka pirmais ceļš $v_1 v_2$ ir zemes. Ja segums maršrutā mainās, tad pēdējais ceļš $v_{k-1} v_1$ ir asfalta.

Paslēpto pilsētu v padarām atkal redzamu ar visiem tās ceļiem. Aplūkojam ceļus $v_{k-1} v$ un vv_1 . Ir izšķirami četri gadījumi.

- Ja $v_{k-1} v$ ir zemes un vv_1 ir zemes. Tad tūrists maršrutu var sākt $v_{k-1} \rightarrow v \rightarrow v_1$ un tālāk turpināt kā iepriekš iegūtajā maršrutā. Redzams, ka izmaiņas sākumā nerada jaunas seguma maiņas, tāpēc šim maršrutam izpildās uzdevuma nosacījumi.
- Ja $v_{k-1} v$ ir asfalta un vv_1 ir zemes. Tad tūrists maršrutu sāk $v \rightarrow v_1$, tālāk iet pa iepriekšējo maršrutu un noslēgumā iet $v_{k-1} \rightarrow v$. Redzams, ka sākumā pirms zemes ceļa tiek pievienots vēl viens zemes ceļš, un beigās tiek pievienots asfalta ceļš. Ja pirms tam maršruta noslēgumā bija asfalta ceļi, tad papildu seguma maiņas nav notikušas; ja pirms tam bija tikai zemes ceļi līdz v_{k-1} , tad pievienotais asfalta ceļš rada tieši vienu maiņu visā maršrutā.
- Ja $v_{k-1} v$ ir asfalta un vv_1 ir asfalta. Tad tūrists maršrutu sāk v_1 , ejot pa iepriekšējo maršrutu, tikai noslēgumā izejot $v_{k-1} \rightarrow v \rightarrow v_1$. Ja pirms tam maršruta noslēgumā bija asfalta ceļi, tad papildu seguma maiņas nav notikušas; ja pirms tam bija tikai zemes ceļi līdz v_{k-1} , tad pievienotie asfalta ceļi rada tieši vienu maiņu visā maršrutā.
- Ja $v_{k-1} v$ ir zemes un vv_1 ir asfalta. Ja visi ceļi iepriekšējā maršrutā no v_1 līdz v_{k-1} ir zemes, tad tūrists maršrutu sāk v_1 , ejot pa iepriekšējo maršrutu, tikai noslēgumā izejot $v_{k-1} \rightarrow v \rightarrow v_1$, līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā. Ja tā nav, tad iepriekšējā maršrutā notiek maiņa no zemes uz asfaltu. Aplūkojam ceļu vv_2 . Ja tas ir asfalta, tad tūrists maršrutu sāk v_2 , iet uz priekšu pa iepriekšējo maršrutu līdz v_{k-1} un beigās iziet $v_{k-1} \rightarrow v_1 \rightarrow v \rightarrow v_2$. Redzams, ka visas pilsētas šādi tiek izietas, un pēc nomainas uz asfaltu visi tālākie ceļi ir tikai no asfalta. Ja vv_2 ir zemes, tad tūrists maršrutu sāk $v \rightarrow v_2$, tālāk iet pa iepriekšējo maršrutu līdz v_{k-1} un beigās iziet $v_{k-1} \rightarrow v_1 \rightarrow v$. Sākums maršrutam iet pa zemes ceļiem, bet pēc nomainas uz asfaltu atlikušie ceļi ir asfalta. Abos gadījumos notiek tikai viena seguma maiņa.

Visos gadījumos redzams, ka tūrists var pielāgot maršrutu atkarībā no v izejošo ceļu īpašībām. Tā kā visi iespējamie gadījumi ir aplūkoti, tas pierāda induktīvo pāreju un attiecīgi arī uzdevumā prasīto.

3. uzdevums. Pūķis sastāv no vairākām galvām un vairākiem kakliem, kur katrs kakls savieno divas galvas. Kad pūķa galvai A iecērt ar zobenu, visi no A izejošie kakli pazūd, taču izaug jauni kakli no A uz visām tām galvām, kas pirms pēdējā cirtiena nebija savienotas ar A . Bruņinieks uzveic pūķi, ja tas tiek sagriezts vismaz divās nesaistītās daļās. Atrast minimālo N vērtību, kam izpildās, ka bruņinieks jebkādu pūķi ar tieši 100 kakliem var uzveikt ne vairāk kā N cirtienos.

Atrisinājums. Atbilde ir $N = 10$.

Pārveidojam uzdevumu grafu valodā, kur galvas ir virsotnes, bet kakli - šķautnes. Vispirms pierādīsim, ka prasīto noteikti var sasniegt ne vairāk kā 10 cirtienos. Ievērosim, ja kādai virsotnei v izpildās $\deg(v) < 10$, tad varam mazāk kā 10 gājienos cirst pa katru no v blakusvirsotnēm, kas to atvienos no grafa un sasniegs prasīto.

Tātad paliek gadījums, ja visām virsotnēm pakāpe ir vismaz 10. Ievērosim, ka ir pavisam 100 šķautnes, tāpēc varam noteikt pakāpju summu $200 = 2|E| = \sum d(v) \geq 10|V|$. Tas nozīmē, ka $|V| \leq 20$ jeb grafā ir ne vairāk kā 20 virsotnes. Varam aplūkot patvaļīgu virsotni v , tā nav savienota ar maksimums $20 - 1 - 10 = 9$ citām virsotnēm, jo $\deg(v) \geq 10$. Varam veikt gājieni katrai no šīm nesavienotajām virsotnēm, un beigās veikt gājieni virsotnei v , kas atdalīs to no visām pārējām virsotnēm. Tas aizņems ne vairāk par $9 + 1 = 10$ gājieniem, un prasītais bus sasniegts.

Uzkonstruēsim grafu, kurā ir nepieciešami vismaz 10 cirtieni kādas virsotnes atdalīšanai. Aplūkojam divdaļīgu grafu ar 20 virsotnēm, kas sadalīts divās grupās pa 10 (t.i., ir divas grupas ar virsotnēm, kur vienas grupas virsotnes ir savienotas ar visām otras grupas virsotnēm, bet grupas iekšienē savienojumu nav). Viegli redzams, ka $2|E| = \sum d(v) = 20 \times 10 = 200$, tātad grafā ir tieši 100 šķautnes.

Apzīmēsim šo divdaļīgo grafu $K_{10,10}$. Viegli redzams, ka cirtiena laikā virsotne maina savu grupas piederību (savienojas ar savas sākotnējās grupas virsotnēm, un atvienojas no sākotnēji otras grupas virsotnēm) un grafa struktūra saglabājas divdaļīga, tādēļ cirtiena rezultātā grafs pārveidojas no $K_{a,b}$ uz $K_{a-1,b+1}$ vai $K_{a+1,b-1}$. Viegli redzams, kamēr abās grupās ir vismaz viena virsotne, grafs ir saistīts. Tātad ir jāsasniedz situācija $K_{1,19}$ vai $K_{19,1}$ pirms pēdējā cirtiena, lai grafu padarītu nesaistītu. Tam acīmredzami ir nepieciešami vismaz 9 cirtieni, un papildus vēl 1 gala cirtienu, kas pierāda, ka minimālais cirtienu skaits šajā grafā ir 10, kas pierāda prasīto.

4.uzdevums. Fizikis Kvantiņš nejauši atklāja jaunu elementārdaļiņu - *imonu*, un pēc neveiksmīga eksperimenta vairāki imoni parādījās viņa laboratorijā. Daži no imonu pāriem ir saistīti, un viens imons var izveidot vairākas saites. Kvantiņš ir atklājis, ka ar imoniem ir iespējams veikt divu veidu operācijas:

1. ja kāds imons ir saistīts ar nepāra skaitu imonu, tad šo imonu (un visas tā saites) var iznīcināt;
2. ir iespējams nodublēt visu laboratorijas imonu kopu tā, ka katram imonam I izveidojas atbilstošs imons I' . Šī procesa laikā I' un J' sasaistās tad un tikai tad, ja to oriģināli I un J bija sasaistīti, un, papildus tam, katrs I sasaistās ar tā kopiju I' . Citos brīžos saites neveidojas un nepazūd.

Pierādīt, ka ar šīm operācijām Kvantiņš spēj iegūt pilnīgi nesaistītu imonu saimi.

Atrisinājums. Aplūkojam grafu, kurā imoni ir virsotnes, un, ja divi imoni ir saistīti, starp to atiecīgajām grafa virsotnēm ir novilkta šķautne. Izkrāsojam grafa virsotnes vairākās krāsās tā, lai katrām divām savienotām virsotnēm būtu dažādas krāsas (to noteikti var izdarīt, jo šis ir labi zināms rezultāts par grafu krāsošanu, kas tiek daudz pētīts zinātnē, taču var vieglākajā veidā katru virsotni nokrāsot savā krāsā). Sauksim šādi nokrāsotu grafu par *labi izkrāsotu*.

Apgalvojums. Pieņemsim, ka grafs G ir labi izkrāsots ar n krāsām ($n > 1$). Tad šim grafam var atkārtoti pielietot dotās operācijas, lai iegūtu labi izkrāsotu grafu ar $n - 1$ krāsām.

Pierādījums. Sākotnēji pielietojam grafam pirmo operāciju, kamēr vien tas ir iespējams. Ja šādā veidā tiek izdzēstas visas virsotnes no kādas krāsas, tad apgalvojums ir pierādīts. Pretējā gadījumā paliek grafs, kurā visām virsotnēm ir pāra pakāpe un tas ir labi izkrāsots n krāsās. Sanumurējam šīs krāsas $1, 2, \dots, n$.

Pielietojam otro operāciju šim grafam. Jauniegūtās virsotņu kopijas nokrāsojam pēc šāda principa – ja virsotnes oriģināls ir nokrāsots krāsā i , tad kopija tiek nokrāsota krāsā $i + 1 \pmod{n}$. Acīmredzami, ka oriģinālās virsotnes savā starpā joprojām ir labi izkrāsotas, arī kopijas savā starpā ir labi izkrāsotas (ja eksistētu kopiju pāris vienādā krāsā, tad arī oriģinālais pāris būtu vienādā krāsā), kā arī šķautnes starp oriģinālajām virsotnēm un kopijām ir ar dažādu krāsu galapunktiem, jo $n > 1$. Tātad šādi iegūtais un nokrāsotais grafs ir labi izkrāsots n krāsās, kā arī visas virsotņu pakāpes tajā ir nepāra.

Tagad jauniegūtajā grafā izvēlamies patvaļīgu krāsu un secīgi ar pirmo operāciju izdzēšam visas virsotnes šajā krāsā. To var izdarīt, jo nevienas divas šīs krāsas virsotnes nav savienotas, tāpēc dzēšana neietekmē pārējo šīs krāsas virsotņu pakāpju paritāti. Galā tiks iegūts grafs, kurš ir labi izkrāsots $n - 1$ krāsās, kas pierāda apgalvojumu.

Atkārtoti izmantojot aprakstīto pierādījumu stratēģiju, mēs varam sākotnējo grafu pārveidot līdz labi izkrāsotam grafam 1 krāsā. Acīmredzami, ka vienā krāsā var izkrāsot tikai grafu, kurā visas virsotnes ir nesaistītas, tātad sasniegtais stāvoklis būs meklētais, kas pierāda prasīto.

Grafi - 2.mājasdarba atrisinājumi

1.uzdevums. Muzejs sastāv no 4004001 istabām, kas izvietotas 2001×2001 rūtiņu kvadrātā. Par blakusesošām istabām saucim tās, kurām attiecīgi rūtiņu kvadrātā ir kopīga mala. Vai ir iespējams, ka ikvienā istabā ir tieši 2 durvis, kas ved uz blakusesošām istabām?

Atrisinājums. Nē, nav iespējams.

Izkrāsojam istabas šahveidā. Tā kā rūtiņu skaits ir nepāra, tad acīmredzami, ka vienas krāsas rūtiņu būs par 1 vairāk, nekā otras krāsas. Pieņemsim, ka melno rūtiņu ir vairāk. Apzīmējam melno rūtiņu skaitu ar M , bet balto rūtiņu skaitu – ar B . Tad $M = B + 1$.

Ievērosim, ka jebkuras durvis ved tikai starp blakusesošām istabām, kas šahveidā krāsojumā ir atšķirīgās krāsās. Ja mēs skaitām durvju skaitu melnajās rūtiņās un baltajās rūtiņās, tad sanāktu, ka ikvienas durvis pieskaitītu klāt vienu reizi melnajām rūtiņām un vienu reizi baltajām. Ja durvju skaitu melnajās rūtiņās apzīmē ar D_M , bet baltajās – D_B , tad izpildītos $D_M = D_B$, jo nekādu cita veida durvju muzejā nav.

Papildus tam uzdevumā ir dots, ka ikvienā istabā ir tieši 2 durvis. Tātad $D_M = 2M$ un $D_B = 2B$. Taču zināms, ka $D_M = 2M = 2B + 2 \neq D_B$, kas ir pretrunā ar iepriekš iegūto. Tātad aprakstītā situācija nav iespējama.

2. uzdevums. Ziemeļzemē atrodas vairākas pilsētas, un katrs pilsētu pāris ir savienots ar vienu no trim pieejamajiem transporta veidiem: autobusu, vilcienu vai lidmašīnu. Zināms, ka Ziemeļzemē vismaz reizi tiek izmantots katrs no trim transporta veidiem, kā arī nav tādas pilsētas, kura izmanto visus trīs transporta veidus. Pie tam, nav tādu trīs pilsētu, kuras visas ir savstarpēji savienotas tikai ar vienu transporta veidu. Kāds ir lielākais iespējamais pilsētu skaits Ziemeļzemē?

Atrisinājums. Lielākais iespējamais pilsētu skaits ir 4.

Vispirms konstruēsim derīgu Ziemeļzemi ar 4 pilsētām. Nosaucam pilsētas A, B, C, D un apzīmējam pilsētu savienojumu ar abu pilsētu burtiem, piemēram, AD savieno pilsētas A un D . Tad šajā Ziemeļzemē AC izmanto autobusu, BD izmanto vilcienu, bet visiem pārējiem savienojumiem izmanto lidmašīnu. Viegli redzēt, ka ikviens transporta veids ir reizi izmantots, nevienai pilsētai nav visi trīs transporta veidi, jo starp AC un BD nav kopīgu pilsētu, kā arī ar pilno pārlassi var viegli pārlicināties, ka nevar atrast trīs pilsētas ar tikai vienu transporta veidu.

Pierādīsim, ka pie 5 vai vairāk pilsētām derīgu Ziemeļzemi nav iespējams izveidot. Sadalām pilsētas 3 grupās:

- grupā X ir pilsētas, kas izmanto tikai autobusu un vilcienu;
- grupā Y ir pilsētas, kas izmanto tikai vilcienu un lidmašīnu;
- grupā Z ir pilsētas, kas izmanto tikai autobusu un lidmašīnu.

Ja kāda pilsēta izmanto tikai vienu transporta veidu, to var patvaļīgi pievienot vienā no grupām, kas izmanto attiecīgo transporta veidu. Ievērosim, ka šādā sadalījumā vismaz divām grupām ir jābūt ar vismaz vienu pilsētu, pretējā gadījumā būtu kāds transporta veids, kas vispār nebūtu izmantots.

Pieņemsim, ka pilsētas pieder tieši divām grupām. Nezaudējot vispārīgumu, pieņemsim, ka grupas ir X un Y . Pierādīsim, ka katrā no šīm grupām nav vairāk par 2 pilsētām. Pieņemsim pretējo, ka X ir vismaz 3 pilsētas, ko apzīmējam ar x_1, x_2, x_3 . Apzīmējam pilsētu no Y ar y . Tādā gadījumā katram savienojumam x_1y, x_2y, x_3y jābūt ar vilcienu. Aplūkojam savienojumus x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3 . Ja kāds no tiem ir ar vilcienu, tad acīmredzami šīs divas pilsētas kopā ar y veidos trijstūri ar viena veida savienojumu, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad visi šie trīs savienojumi ir ar autobusu. Taču atkal tiek iegūts trijstūris, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad mūsu pieņēmums ir aplams, un X nevar būt vairāk par 2 pilsētām. Tādā gadījumā kopā pa X un Y nav vairāk par $2 + 2 = 4$ pilsētām.

Pieņemsim, ka visām trim grupām ir katrā pa vismaz vienai pilsētai. Pierādīsim, ka tādā gadījumā katrā grupā var būt tikai viena pilsēta. Pieņemsim pretējo, ka X ir vismaz 2 pilsētas, ko apzīmējam ar x_1, x_2 . Apzīmējam pilsētu no Y ar y un pilsētu no Z ar z . Tad savienojumiem x_1y un x_2y jābūt ar vilcienu un x_1z, x_2z jābūt ar autobusu. Taču neatkarīgi no tā, vai savienojums x_1x_2 ir ar autobusu vai vilcienu, veidosies viena veida transporta savienojumu trijstūris, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad šajā gadījumā maksimālais pilsētu skaits ir $1 + 1 + 1 = 3$.

Redzams, ka visos iespējamajos gadījumos pilsētu skaits nepārsniedz 4, tādēļ lielāka Ziemeļzeme neeksistē, kas pierāda prasīto.

3. uzdevums. Ceļotājzemē ir vairākas pilsētas, un viena no tām ir galvaspilsēta. Katrām divām pilsētām A un B ir tiešs avioreiss no A uz B un tiešs avioreiss no B uz A , pie tam ir zināms, ka abu virzienu cenas sakrīt. Papildus zināms, ka visi maršruti, kas apceļo katru pilsētu vienu reizi un atgriežas sākumpunktā, maksā vienādu summu. Pierādīt, ka visi ceļojumi, kas tieši vienu reizi apmeklē katru pilsētu, izņemot galvaspilsētu, un atgriežas sākumpunktā, arī maksā vienādu summu.

Atrisinājums. Ar C apzīmēsim galvaspilsētu un ar C_1, C_2, \dots, C_n – pārējās pilsētas. Ar $d(x, y)$ apzīmēsim cenu avioreisam starp pilsētām x un y , kā arī ar σ apzīmējam cenu maršrutam, kas apceļo katru pilsētu vienu reizi un atgriežas sākumpunktā.

Aplūkojam patvaļīgu maršrutu, kas tieši vienu reizi apmeklē katru pilsētu, izņemot galvaspilsētu, un atgriežas sākumpunktā. Pieņemsim, ka tā kopējā cena ir s . Maršrutā aplūkojam divas secīgi apmeklētās pilsētas C_i un C_j . Ja mēs aizstājam lidojumu $C_i \rightarrow C_j$ ar diviem citiem lidojumiem $C_i \rightarrow C$ un $C \rightarrow C_j$, tad tiek iegūts maršruts cauri visām pilsētām ar cenu σ . Tas nozīmē, ka

$$\sigma = s + d(C, C_i) + d(C, C_j) - d(C_i, C_j).$$

Ja mēs pierādītu, ka vērtība $\alpha(i, j) = d(C, C_i) + d(C, C_j) - d(C_i, C_j)$ ir konstanta visiem pāriem $\{i, j\} \in \{1, 2, \dots, n\}$, tas pierādītu uzdevumā prasīto.

Pierādīsim, ka $\alpha(i, j) = \alpha(i, k)$, ja i, j, k ir trīs dažādi indeksi. Aplūkojam divus maršrutus cauri visām pilsētām, kuriem sakrīt maršruta daļa no C_k uz C_j caur visām pārējām pilsētām, kas nav C un C_i , taču vidējā daļa no C_j uz C_k atšķiras šādi: vienā gadījumā tiek braukts $C_j \rightarrow C \rightarrow C_i \rightarrow C_k$, bet otrā brauc $C_j \rightarrow C_i \rightarrow C \rightarrow C_k$. Šiem maršrutiem izpildās

$$\begin{aligned} d(C_j, C) + d(C, C_i) + d(C_i, C_k) + x = \sigma = d(C_j, C_i) + d(C_i, C) + d(C, C_k) + x \implies \\ d(C_j, C) + d(C, C_i) - d(C_i, C_j) = d(C_i, C) + d(C, C_k) - d(C_i, C_k). \end{aligned}$$

Tātad $\alpha(i, j) = \alpha(i, k)$, kas nozīmē, ka jebkuriem virsotņu pāriem ar kopīgu virsotni izpildās šī vienādība. Taču tādā gadījumā izpildās $\alpha(i, j) = \alpha(i, j') = \alpha(i', j')$ visiem indeksiem i, j, i', j' , kur $i \neq j, i' \neq j'$. Tātad aplūkotās vērtības ir konstantas visiem virsotņu pāriem, kas no augstāk minētā pierāda prasīto.

4. uzdevums. Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$. Portālā *draugiem.lv* ir n^3 lietotāju, un daži no šiem lietotājiem ir *draugi*. Kopa no vismaz trim lietotājiem tiek saukta par *domubiedru grupu*, ja katrs lietotāju pāris šajā kopā ir draugi. Ir zināms, ka starp jebkuriem n lietotājiem eksistē 3, kas veido domubiedru grupu. Pierādīt, ka portālā eksistē domubiedru grupa ar 5 lietotājiem.

Atrisinājums. Pārfrāzējam uzdevumu grafu teorijas valodā, kur ir n^3 virsotnes; ja lietotāji ir draugi, tad viņu attiecīgās virsotnes ir savienotas ar šķautni; starp katrām n virsotnēm var grafā atrast trijstūri. Mums ir jāpierāda, ka dotajā grafā eksistē pilns apakšgrafs no 5 virsotnēm (kurā novilkta visas iespējamās šķautnes).

Apgalvojums. Aplūkotajā grafā starp katrām n^2 virsotnēm eksistē pilns apakšgrafs no 4 virsotnēm.

Pierādījums. Pierādīsim to ar matemātiskās indukcijas palīdzību.

Indukcijas bāze. $n = 3$. Šajā gadījumā katras 3 virsotnes veido trijstūri, tāpēc viss grafs ir pilns, kas acīmredzami dod vēlamu.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam $n = k - 1$ grafā ar $(k - 1)^2$ virsotnēm var atrast pilnu apakšgrafu ar 4 virsotnēm, ja starp katrām $k - 1$ virsotnēm var atrast trijstūri.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim to $n = k$. Aplūkojam patvaļīgas $n^2 = k^2$ virsotnes un starp tām virsotni v . Ja $\deg(v) \geq k$, tad varam izvēlēties šo virsotni un k tās kaimiņus, starp kuriem varēs atrast trijstūri, kas kopā veidos 4 virsotņu pilnu grafu. Ja $\deg(v) < k$, tad eksistē vismaz $k^2 - (k - 1) - 1 = k^2 - k > (k - 1)^2$ virsotnes, ar ko v nav savienota (nevienādība izpildās, jo $k \geq 3$). Izvēlamies starp tām $(k - 1)^2$ virsotnes.

Pierādīsim, ka šīs virsotnes izpilda induktīvā pieņēmuma nosacījumus, t.i., katrās $k - 1$ virsotnēs starp tām eksistē trijstūris. Paņemam v un patvaļīgas $k - 1$ virsotnes no aplūkotajām $(k - 1)^2$. Kopā ir k virsotnes, kurām zināms, ka ir jābūt starp tām trijstūrim. Tā kā v nav savienota ar nevienu no pārējām virsotnēm, šis trijstūris var acīmredzami veidoties tikai starp atlikušajām $k - 1$ virsotnēm. Tas izpildās jebkurām $k - 1$ virsotnēm no $(k - 1)^2$, tātad šai virsotņu grupai izpildās induktīvais pieņēmums un starp tām var atrast pilnu apakšgrafu ar 4 virsotnēm.

Abi iespējamie gadījumi ir aplūkoti, tātad pāreja ir noslēgta.

Līdzīgā veidā ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka starp dotajām n^3 virsotnēm var atrast pilnu apakšgrafu ar 5 virsotnēm.

Indukcijas bāze. $n = 3$. Šajā gadījumā katras 3 virsotnes veido trijstūri, tāpēc viss grafs ir pilns, kas acīmredzami dod vēlamu.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka naturālam $n = k - 1$ grafā ar $(k - 1)^3$ virsotnēm var atrast pilnu apakšgrafu ar 5 virsotnēm, ja starp katrām $k - 1$ virsotnēm var atrast trijstūri.

Induktīvā pāreja. Pierādīsim to $n = k$. Aplūkojam $n^3 = k^3$ virsotnes un starp tām virsotni v . Ja $\deg(v) \geq k^2$, tad varam izvēlēties šo virsotni un k^2 tās kaimiņus, starp kuriem no iepriekš pierādītā varēs atrast pilnu apakšgrafu ar 4 virsotnēm, kas kopā veidos 5 virsotņu pilnu grafu. Ja $\deg(v) < k^2$, tad eksistē vismaz $k^3 - (k^2 - 1) - 1 = k^3 - k^2 > (k - 1)^3$ virsotnes, ar ko v nav savienota (nevienādība izpildās, jo $k \geq 3$). Izvēlamies starp tām $(k - 1)^3$ virsotnes.

Pierādīsim, ka šīs virsotnes izpilda induktīvā pieņēmuma nosacījumus, t.i., katrās $k - 1$ virsotnēs starp tām eksistē trijstūris. Paņemam v un patvaļīgas $k - 1$ virsotnes no aplūkotajām $(k - 1)^3$. Kopā ir k virsotnes, kurām zināms, ka ir jābūt starp tām trijstūrim. Tā kā v nav savienota ar nevienu no pārējām virsotnēm, šis trijstūris var acīmredzami veidoties tikai starp atlikušajām $k - 1$ virsotnēm. Tas izpildās jebkurām $k - 1$ virsotnēm no $(k - 1)^3$, tātad šai virsotņu grupai izpildās induktīvais pieņēmums un starp tām var atrast pilnu apakšgrafu ar 5 virsotnēm.

Abi iespējamie gadījumi ir aplūkoti, tātad pāreja ir noslēgta un prasītais ir pierādīts.